

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ  
АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА (САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, РОССИЯ)

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА  
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И ПРОГРАММОТЕХНИКИ

**НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Материалы научной КОНФЕРЕНЦИИ  
«ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2017»,  
посвящённой 220-летию Университета

10–14 апреля 2017 г.

**LXX**

Санкт-Петербург  
Издательство РГПУ им. А. И. Герцена  
2017

ББК 22.1.431  
Н 47

*Печатается по решению  
Оргкомитета конференции*

**Редакционная коллегия:** д. ф. -м. н., профессор **Зайцев В. Ф.**  
д. ф. -м. н., профессор **Будаев В. Д.**  
д. ф. -м. н., профессор **Флегонтов А. В.**

**Рецензенты:** д. ф. -м. н., профессор **Ханин С. Д.**  
д. ф. -м. н., профессор **Широков Н. А.**

**Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017.** Материалы научной конференции, 10–14 апреля 2017 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. – 260 с.

ISBN 978-5-8064-2346-8

Материалы 70-ой научной конференции “Герценовские чтения”, проходившей при кафедре математического анализа и кафедре информационных систем и программного обеспечения РГПУ им. А. И. Герцена 10–14 апреля 2017 г. Представленные статьи подготовлены по наиболее содержательным докладам четырёх основных секций: “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений”, “Современные проблемы теории функций и функционального анализа”, “Актуальные проблемы математического образования” и “Актуальные информационные системы и технологии моделирования”.

Результаты работ рекомендуется использовать при чтении спецкурсов, а также как материал для научной работы аспирантов, магистрантов, студентов старших курсов математических факультетов.

ББК 22.1.431

ISBN 978-5-8064-2346-8

© Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2017  
© Коллектив авторов, 2017

# История и современность

## ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В РОССИЙСКОМ ОБРАЗОВАНИИ (до 1917 г.)

Локоть Н. В.

Мурманский арктический государственный университет  
Мурманск  
e-mail: natalyalokot@yandex.ru

**Lokot' N. V. History of mathematics in the Russian education (up to 1917).**  
For the first time in Russia the course of the history of mathematics began to read V. Bobynin at the University of Moscow (1882/83). The article discusses earlier attempts of a course of history of mathematics in teaching, as well as the contribution of local educators to the methodology of the new discipline and popularization of historical and mathematical knowledge.

Впервые в России курс истории математики начал читать В. В. Бобынин в Московском университете (1882/83). В статье рассматриваются более ранние попытки введения курса истории математики в преподавание, а также вклад отечественных педагогов в методологию новой дисциплины и популяризацию историко-математических знаний.

Новая дисциплина в отечественном образовании – история математики – появилась в XIX столетии сначала в высшей школе, причем не сразу как отдельный предмет, а в связи с изложением общих курсов и чаще всего читалась по личной инициативе лекторов. Одним из первых в России, кто начал использовать элементы истории математики в преподавании, был П. Л. Лавров.

**Петр Лаврович Лавров** (1823–1900) (псевдонимы Миртов, Арнольди и др.) – личность в российской истории легендарная. Он широко известен как пламенный пропагандист русского “крестьянского” социализма, революционер–подпольщик, член известных организаций “Земля и воля” и “Народная воля”. После покушения Д. Каракозова на Александра II (1866) Лавров был арестован (как распространитель вредных идей и автор нескольких революционных стихов), сослан в Вологодскую губернию (1867–1870), откуда бежал во Францию [1]. Его философские воззрения, труды по социологии, истории русского революционного движения, огромное литературное наследие изучаются до сих пор.

Менее известно, что Петр Лаврович – замечательный педагог, публицист, литератор и популяризатор истории науки. Воспитанный в обычной дворянской семье и получивший отличное домашнее образование, он поступил в военное училище, решив пойти по стопам отца, подполковника русской армии, участника Отечественной войны 1812 года, и служить Отечеству. Но волею судеб Петр Лавров – выпускник Петербургского артиллерийского училища, лучший ученик Остроградского, оставленный при этом училище репетитором (1842), с 1844 года начал преподавать математические науки сначала в Alma-mater, затем в Михайловской артиллерийской академии (СПб). Отметим, что руко-

водство академии доверило молодому профессору (с 1858 г.) читать все те курсы высшей математики, что вёл до него (1841–1860) его знаменитый учитель – академик М. В. Остроградский.

Именно П. Л. Лавров впервые в России (1865–1866) прочел “... публичный (неоконченный) курс истории физико-математических наук в лаборатории артиллерийской академии, а в 1865 году прочел для офицеров три лекции о влиянии успехов точных наук на военное дело. Эти лекции привлекали очень много слушателей” [2, с. 502]. Их посещал студент последнего курса Петербургского университета К. А. Тимирязев, оставивший воспоминания и о Лаврове, и об излагаемом материале (в основном, о философских воззрениях). Правда, лекции эти продлились “не далее Аристотеля” и были начальством запрещены. По замыслу автора таких лекций должно быть двадцать, а их цель - “... набросать общие черты великого движения физико-математических наук, движения, которого в его целостности ..., не имело еще ни одного историка” [2, с. 511]. При этом, читая курс математики, Петр Лаврович “... нередко делал передышку и прочитывал одну или две лекции обзорного характера по истории математики, в которых говорил о значении математики в ряду других наук, о зависимости естествознания от математики и т. д.” [2, с. 505].

Более того, Лавров был глубоко убеждён в важности и необходимости включения историко-научных сведений в образовательный процесс средней школы и отмечал, что история науки должна составлять последний заключительный курс общего семилетнего обучения в гимназиях. По истории математики ему принадлежат два заметных сочинения [3] и [4]; первое из них – публикация уже упомянутых выше трёх лекций для офицеров, где раскрыты исторические связи артиллерии с точными науками, начиная с Древнего Вавилона; второе, более обширное и значимое для современной науки, кроме истории математики, содержит главы по истории механики, астрономии, физики, химии, биологии и медицины [5].

Нельзя обойти вниманием и редакторскую деятельность Лаврова, тесно связанную с просвещением и популяризацией истории науки. Он начинал в качестве сотрудника второго издания “Военного энциклопедического лексикона” (1852–1858, под общим руководством генерала М. И. Богдановича), примерно в этот же период работал помощником редактора “Артиллерийского журнала”, а затем был приглашен известнейшим русским публицистом А. А. Краевским для создания “Энциклопедического словаря, составленного русскими учеными и литераторами”. Словарь должен был иметь универсальный характер, нести, в основном, просветительскую функцию и задумывался очень ёмким (40 томов, по другим сведениям – 45), но вышли только шесть (СПб, 1861–1863). Общим редактором первого тома являлся сам Краевский, а всех остальных – П. Л. Лавров, сумевший привлечь к работе над словарем замечательных авторов, в том числе, выдающихся математиков: П. Л. Чебышева (3 статьи), М. В. Остроградского (2 статьи), В. Я. Буняковского (около 50 статей), И. И. Сомова (10 статей). Анализ и краткое изложение некоторых из них даны В. Е. Прудниковым [6].

Другая попытка чтения лекций по истории математики принадлежит Гольденбергу. **Александр Иванович Гольденберг** (1837–1902) – педагог, математик–методист, один из основоположников методики начальной арифме-

тики, выпускник физико-математического факультета Московского университета (1858) и Михайловской артиллерийской академии (1861), преподаватель математики 2-ой военной Московской гимназии. После отставки (1867) работал в разных учебных заведениях, а в 1879–1882 гг. издавал и редактировал “Математический листок”, почти все математические статьи которого сопровождались историческими справками. В. В. Бобынин в своей работе о русской журналистике указывал: “В январе-марте 1876 г. Гольденберг прочитал в Московском Политехническом музее девять публичных лекций по истории геометрии, не появившиеся в печати, и, по-видимому, не сохранившиеся в рукописи” [7, с. 293–294].

Но первым в России полный, хотя и необязательный курс истории математики стал читать (с октября 1882 г., по другим сведениям, с осени 1883 г.) **Виктор Викторович Бобынин** (1849–1919) в Московском университете. Будучи уверенным, что в преподавании математики целесообразно применение генетического метода, Бобынин понимал огромную важность такого курса для выпускников высшей школы, многие из которых будут впоследствии учителями. В это время дисциплина “история математики” уже появилась в Гейдельбергском (М. Кантор, 1860), Копенгагенском (Х. Цейтен, 1876) и Падуанском (А. Фаваро, 1878) университетах. Профессора Московского университета А. Ю. Давидов и В. Я. Цингер еще в 1872 г. ставили вопрос о необходимости чтения такого курса в университете, но поддержки не получили [5, с. 219]. Наконец, Бобынин (спустя 10 лет) приступил к подготовке программы курса и рассчитывал на 4 года ее выполнения по 2 часа в неделю, но факультет выделил ему только место для трёхгодичного курса. Пришлось сократить наработанный материал по истории древних и Средневековья, подробнее излагая историю математики XV–XVIII вв. Первую программу курса и содержание лекций он опубликовал в своем журнале “Физико-математические науки в их прошлом и настоящем” (1890–1897), но по прошествию семестров постепенно ее совершенствовал. Ещё один вариант программы, относящийся к 1888–1889 и 1889–1890 ак. гг., имеется в упомянутом выше журнале (1890, т. IX, с. 7–22), а программа лекций по истории древней математики, читанных в 1883–1884 ак. г., помещена полностью в статье Н. Г. Башмаковой и Л. Е. Майстрова [8].

Отметим, что имеется отдельный оттиск программы (1888–1889 ак. г.) с приложением речи “Современное состояние преподавания математики”, посвящённой изложению основных идей и принципов курса, – это сообщение, прочитанное Бобыниным в заседании секции математики и астрономии VIII съезда русских естествоиспытателей и врачей 2 января 1890 г. (М., 1890, 22 с.). Кроме того, существует французский перевод в *Bibliotheca mathematica*, Stockholm, nouvelle serie, 1891, pp.79–88.

Как утверждают Н. Г. Баранец и Н. Б. Веревкин, с 1890 г. Бобынин “... перешел к чтению двух параллельных курсов: истории математики от древности до Возрождения, который заканчивался характеристикой трудов Леонардо Пизанского и обзором средневековой математической литературы, и истории математики в XV–XVIII вв., который начинался обзором математических работ Кардано, Тартальи и простирался до описания вклада Монжа, Карно и Понселе”.

По воспоминаниям студентов, “лекции Бобынина не пользовались популярностью. Во-первых, потому что по времени часто совпадали с обязательными предметами, во-вторых, из-за монотонной дикции лектора и его сухого изложения, в-третьих, из-за преимущественного освещения донаучного и древнего периода развития математики, в то время как студенты интересовались периодом новой математики. Те же, кто прослушивали курс целиком, привыкнув к лекторской манере В. В. Бобынина, отзывались позднее о его лекциях восторженно” [9, с. 16]. Этот курс приват-доцент Бобынин читал в течение 35 лет. После его кончины чтение лекций по истории математики в Московском университете возобновили С. А. Яновская и М. Я. Выгодский.

Заслуживает нашего внимания и тот факт, что В. В. Бобынин свой доклад [10] на Первом Всероссийском съезде преподавателей математики (СПб, 1911) полностью посвятил вопросу использования элементов истории математики в школьном образовании. По его мнению, исторические элементы можно ввести в преподавание в одной из двух форм: систематической или эпизодической. Введение в систематической форме маловероятно ввиду недостатка времени и “недостаточной степени умственного развития, так как природа истории математики, как предмета философского характера, требует значительного напряжения сил и подготовки для усвоения” [10, с. 137]. Вторая же форма, при условии адаптированного изложения, вполне приемлема. При этом можно в помощь учителю и ученику составить историко-математическую хрестоматию, в которой “... должны быть введены наряду со статьями историко-математического содержания, также и удовлетворяющие условиям целесообразности и доступности для учащихся отрывки произведений древней математической литературы” [там же]. Исследования Бобынина в области методики преподавания освещались и на страницах журнала “Математическое образование”, опубликовавшего его речь на II Всероссийском съезде преподавателей математики (М., 1913) [11].

Нужно отметить, что задача создания хрестоматии и курса истории математики для средней школы оказалась для историков науки и педагогов довольно сложной. Об этом свидетельствуют слова Г. Ф. Попова (1920): “В 1889 году в торжественном заседании Венецианского Института наук, беллетристики и искусств было заявлено о выдаче премии за составление элементарного курса по истории математики и историко-математической хрестоматии. Премия оказалась не присужденной, потому что не было представлено ни одного сочинения” [12, с. 66].

Профессор З. Гюнтер (1893, Германия), рассматривая возможности генетического метода, отметил, что перед изучением в университетах курса анализа будет очень полезен исторический очерк развития проблем, лежащих в основе анализа бесконечно малых. Эта идея была сразу же подхвачена в России и воплощена в жизнь (в конце 90-х гг. XIX в.) профессором **Александром Васильевичем Васильевым** (1853–1929), ежегодно читавшим в Казанском университете “...сжатый, но превосходно составленный курс, начинавшийся с разбора метода исчерпывания и работ Архимеда; затем автор переходил к трудам Кеплера, Кавальери и Роберваля. Следующая глава была посвящена вопросам о проведении касательных к кривым и задаче нахождения наибольших и наименьших значений (Ферма, Барроу); трудам Лейбница и Ньютона уделя-

лись также особые главы, а в заключении давался общий обзор дальнейших успехов анализа в смысле попыток критического обоснования его начал ввиду расхождения во взглядах виднейших математиков на природу бесконечно малых” [12, с. 59].

Еще один казанский математик – известный астроном и логик **Платон Сергеевич Порецкий** (1846–1907), читая математическую логику (1887–1888), вступительную лекцию обязательно посвящал истории науки. Его “Исторический очерк развития сферической тригонометрии” был напечатан в “Протоколах ...” секции физико-математических наук при Обществе естествоиспытателей в Казани [13].

**Дмитрий Матвеевич Синцов** (1867–1946) – харьковский математик, ученик А. В. Васильева, в связи с деятельным участием в реформе Клейна много занимался и вопросами школьной методики, а также проведением курсов для преподавателей математики Харьковского учебного округа. Синцов составил программу этих курсов так, чтобы убрать пробелы в учительском образовании и дать практические навыки для работы в гимназиях и реальных училищах. Поэтому для курсантов были разработаны темы, среди которых такие, как “История «Начал» Евклида”, “История теории параллельных” и др. Синцов ратовал также за пронизывание математического материала элементами истории математики и “видел в этом большое воспитательное и образовательное значение. Поэтому он считал желательным, чтобы такой материал содержался в учебниках. В своих многочисленных вузовских учебниках Д. М. Синцов дает не только исторические справки в конце или начале книги, но и сообщает некоторые данные исторического характера по ходу изложения материала” [14, с. 39].

Курс истории математики читался и в Новороссийском университете (Одесса), первым это осуществил **Иван Юрьевич Тимченко** (1863–1939) после защиты магистерской диссертации (1899). К сожалению, не нашлось пока сведений ни об этом курсе, ни о самом преподавании в тот период. Но при поиске материалов о Тимченко были обнаружены мемуары одессита Сергея Снегова “Книга бытия”, в которых он вспоминает о профессорах Новороссийского университета, где учился уже после 1917 г., в частности и о И. Тимченко: “...он замечательно знал историю математики. Утверждали, что сравниться в этом с Тимченко во всей стране может только ростовский профессор Мордухай-Болтовской. Особенно интересовали Ивана Юрьевича XVII–XVIII века – возникновение и бурное развитие высшей математики, дифференциального и интегрального исчисления, начатых великими открытиями Ньютона и Лейбница” [15, с. 68]. К великому сожалению, полному раскрытию таланта этого замечательного ученого помешала “эпоха перемен”, в которой ему пришлось выживать. Арест (1938) и год тюрьмы окончательно подорвали его и так слабое здоровье; он скончался в 1939 году.

И, наконец, рассмотрим историко-математические сочинения, которые, быть может, не сыграли такую важную роль для развития истории математики как науки, но очень многое сделали для возникновения интереса к ней и привлечения к занятиям ею молодого поколения. Это работы отечественных педагогов: К. Мазинга, Ю. Вишпера, А. И. Кельсиева, В. Р. Мрочека, В. К. Бел-

люстина и др.

**Юрий Францевич Виппер** (1824–1891) – воспитанник физико-математического факультета Московского университета, известный педагог, преподаватель математики, основ механики и географии в московских учебных заведениях, активно работавший в области популяризации истории математики. Можно указать его сочинения о доказательствах теоремы Пифагора [16], о золотом сечении [17], о семействе Бернулли [18], об истории метрологии [19], [20].

**Карл Карлович Мазинг** (1849–1926) – ученый, математик, педагог, учредитель и директор широко известного частного реального училища (“Коммерческое училище К. К. Мазинга”). Его “Исторический очерк развития счисления” был впервые опубликован в журнале Министерства народного просвещения (1873), а затем неоднократно переиздавался.

**Александр Иванович Кельсиев** (1849–1885) – археолог, хранитель Московского Политехнического музея, секретарь Общества распространения технических знаний. Он не был педагогом по образованию, но тоже занимался популяризацией историко-математических знаний, активно и безвозмездно участвуя в “воскресных объяснениях” при музее. Некоторые тексты этих выступлений изданы, например, “Цифры у различных народов древних и новых” [22] и “Фигурные письма” [23].

**Всеволод Константинович Беллюстин** (1865–1925) – выпускник Московского университета, учитель арифметики и геометрии в уездном училище, впоследствии – директор учительской семинарии во Владимирской губернии, методист. Самая известная его книга, выдержавшая много изданий, – “Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики” (1909). Цитата из предисловия объясняет стремления всех авторов обсуждаемых выше изданий: “Всякому, кто любит свой предмет, бывает интересно знать, как он начался, каким путем он развивался, и как он вылился в свою последнюю форму. В этой книжке изложена история арифметики, и очерки ее назначены для тех, кто чувствует расположение к математике. Юным математикам я прежде всего назначаю свой труд. Он же может пригодиться и для педагога: для учителя крайне важно, чтобы расширился его кругозор, чтобы он мог критически отнестись к настоящему положению преподавания, и чтобы исторические данные оживили обучение и осветили его. В Германии имеется масса сочинений по истории математики; очевидно, они нужны и полезны. Пусть же и в России мой небольшой труд сослужит скромную службу” [24].

Характерным примером использования элементов истории математики в преподавании могут служить работы В. Р. Мрочка “Прямолинейная тригонометрия и начала теории гониометрических функций” (1908, 1913) и “Арифметика в прошлом и настоящем” (1912). **Вацлав Ромуальдович Мрочек** (1879–1937) – поляк по происхождению, математик и педагог, один из забытых историков науки, расстрелянный в Ленинграде в жестоком 1937 году. После окончания Петербургского университета (1904) он преподавал в реальном училище и гимназии математику и физику (1904–1912), на политехнических курсах – техническую математику (1912–1919), затем работал старшим научным сотрудником НИИ им. П. Ф. Лесгафта (с 1930) [25]. Годы его основной деятельности по истории науки приходятся, в основном, на более поздний период,



который в статье не рассматривается, но одно обстоятельство заставляет упомянуть о его работе по тригонометрии, написанной явно в педагогических целях. Ясно, что 28-летний учитель из лучших побуждений снабдил свой труд сведениями из истории математики. Но реакция на его публикацию была разгромной: В. В. Бобынин резко критиковал эти исторические вкрапления, обвинив автора в бесцеремонном отношении к историческим данным и фактам, в неумении правильного подбора источников [26]. Позднее, правда, рецензент менее жёстко отзывался о работах Мрочека, но доволен ими не был. Как знать, не будь этого строгого разбора, может быть, и не получился бы в дальнейшем из Вацлава Мрочека серьезный ученый и историк науки ...

Естественно, это далеко не все авторы и не все сочинения по истории математики, вышедшие в рассматриваемый период и предназначенные для учащихся, но на их примере мы можем судить о работе, направленной на популяризацию сведений по истории математики и внедрение их в образование, которую уже проводили лучшие представители русского педагогического сообщества.

### **Выводы**

1. В последней четверти XIX столетия ученые и педагоги России почти одновременно с западноевропейскими коллегами пришли к выводу, что в высшее математическое образование нужно вводить новую дисциплину – историю математики.

2. Первые попытки чтения лекций по истории физико-математических наук были осуществлены П. Л. Лавровым (1865–1866) и А. И. Гольденбергом (1876), что по времени сопоставимо с появлением первых лекционных курсов на Западе.

3. Анализ программы лекций по истории математики В. В. Бобынина показал, что его курс “... был наиболее полным курсом, когда-либо читавшимся студентам, по-видимому, в любом университете мира” [8, с. 18].

4. Российские математики и историки математики в конце XIX – начале XX вв. активно занимались проблемами методики преподавания математики в школе, предлагая пути ознакомления учащихся с историко-математическими сведениями, и поставили задачу составления хрестоматии по истории науки в помощь педагогам и учащимся.

5. Отечественные педагоги, сознавая полезность историко-математических знаний в деле воспитания и образования, пропагандировали материалы по истории науки, издавая научно-популярную литературу для учащихся.

## **Литература**

- [1] Исторический словарь. <http://slovariki.org/istoriceskij-slovar/22720>
- [2] Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII-XIX веков. – М.: 1956. – 640 с.
- [3] Лавров П. Л. Влияние развития точных наук на успех военного дела и в особенности артиллерии // Артиллерийский журнал. – 1865. - № 6 и 7.
- [4] Лавров П. Л. Очерк истории физико-математических наук // Морской сборник. – СПб.: 1865/1866.

- [5] Токарева Т. А. История математики в России. Рождение дисциплины // Историко-математические исследования. – 2005. – В. 44. – С. 209–237.
- [6] Прудников В. Е. О статьях П. Л. Чебышева, М. В. Остроградского, В. Я. Буняковского и И. И. Сомова в “Энциклопедическом словаре, составленном русскими учеными и литераторами” // Историко-математические исследования. – 1953. – В. VI. – С. 223–237.
- [7] Бобынин В. В. Материалы по истории математической журналистики в России // Физико-математические науки в ходе их развития. – Т. 1. – 1899–1904. – С. 298–299.
- [8] Башмакова И. Г., Майстров Л. Е. О первом курсе истории математики в Московском университете // История и методология естественных наук. – В. XXIX. – Математика, механика. – М.: МГУ, 1982. – С. 9–18.
- [9] Баранец Н. Г., Веревкин А. Б. Российские математики о науке и философии. – Ульяновск: издатель Качалин А. В., 2012. – 160 с.
- [10] Бобынин В. В. Цели, формы и средства введения исторических элементов в курс математики средней школы (доклад, прочитанный 29 дек. 1911 г.) // Труды 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики. – Т. 1. – СПб.: 1913. – С. 129–140.
- [11] Бобынин В. В. Об указаниях, получаемых преподаванием математики от её истории. Речь, произнесенная 31 дек. 1913 г. на Общем собрании Второго Всероссийского съезда преподавателей математики // Математическое образование. – М., 1914. – № 2. – С. 76–83.
- [12] Попов Г. Н. История математики. Выпуск 1. – М., 1920. – 236 с.
- [13] Порецкий П. С. Исторический очерк развития сферической тригонометрии. Сообщение, читанное 28 февр. 1887 г. в 65-м заседании Секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете. – Казань, 1887. – 16 с.
- [14] Наумов И. А. Дмитрий Матвеевич Синцов (очерк жизни и научно-педагогической деятельности). – Харьков: ХГУ им. А. М. Горького, 1955. – 72 с.
- [15] Снегов С. Книга бытия. [http://royallib.com/read/snegov\\_sergey/kniga\\_bitiya.html#1351680](http://royallib.com/read/snegov_sergey/kniga_bitiya.html#1351680)
- [16] Вишпер Ю. Сорок пять доказательств Пифагоровой теоремы с приложением кратких биографических сведений о Пифагоре. Собрал Юрий Вишпер. – М., 1876. – 46 с.
- [17] Вишпер Ю. Ф. Золотое деление как основной морфологический закон в природе и искусстве (открытие профессора Цейзинга). – М.: тип. Т. Рис, 1876. – 24 с.
- [18] Вишпер Ю. Семейство математиков Бернулли. Речь, произнесенная в день годовщины основания Московской классической гимназии Фр. Креймана. – М.: МГУ, 1875. – 24 с.
- [19] Вишпер Ю. Греческая и римская метрология. Сост. по Гюлтшу и др. – М.: тип. В. М. Фриш, 1873. – 30 с.
- [20] Вишпер Ю. Метрическая система / Сост. Ю. Ф. В. – М.: тип. В. М. Фриш, 1873. – 16 с.
- [21] Мазинг К. Исторический очерк развития счисления // Журнал Министерства народного просвещения. – Ч. 169 – 1873 – Отдел 2. – С. 113–135.

- [22] Кельсиев А. И. Цифры у различных народов древних и новых. – М.: тип. С. П. Архипова и К<sup>о</sup>, 1880.
- [23] Кельсиев А. И. Фигурные письма. – М., 1880. – 9 с.
- [24] Беллюстин В. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. – М.: тип. К. Меншова, 1909. – 206 с.
- [25] Баранец Н. Г., Варевкин А. Б. Историк науки Вацлав Мрочек – судьбы в эпоху перемен. <http://staff.ulsu.ru/baranetz/files/2011/06/baranec-verevkin-istorik-nauki-mrochek.pdf>
- [26] Бобынин В. В. История математики в книге г. Мрочека “Прямолинейная тригонометрия и основания теории гониометрических функций” // Математическое образование. – 1913. – № 7. – С. 305–306.

УДК 517.9

## ВУЛИХ ЗАХАР БОРИСОВИЧ (1844–1897) – ПЕРВЫЙ В ДИНАСТИИ ИЗВЕСТНЫХ МАТЕМАТИКОВ–ПЕДАГОГОВ

Одинец В. П.

Сыктывкарский государственный университет

им. Питирима Сорокина

Сыктывкар

e-mail: w.p.odyniec@mail.ru

**Odyniec W. P. Vulich Zakhar Borisovich (1844-1897) – the first in the dynasty of famous mathematicians and teachers.** About life and works of the mathematics teacher Zakhar Borisovich Vulich (to pronounce Vulikh) (1844–1897).

О жизни и творчестве учителя математики Захара Борисовича Вулиха (1844–1897).

Жизнь Захара Борисовича Вулиха<sup>1</sup>, родившегося 5 (17) февраля 1844 года в Одессе в семье купца, пришлась на переломные для истории Российского государства годы. Время учебы Захара в одесской гимназии пришлось на Крымскую войну (1853–1856)<sup>2</sup> и руководство Одесским учебным округом (1856–1858) прославленного врача–учёного и новатора–педагога Николая Ивановича Пирогова (1810–1881). Блестящее окончание гимназии у З. Б. Вулиха совпало с освобождением крестьян по реформе от 19 февраля 1861 года и введением земских учреждений.

По окончании гимназии З. Б. Вулих едет в Москву и поступает в Московский университет, но вскоре переводится на физико-математический факультет

---

<sup>1</sup> Предки Вулихов приехали в Новороссию из Германии в конце 18 века. Отец, Борис Вулих, купец второй гильдии, умер, когда сын заканчивал гимназию.

<sup>2</sup> 4(16) октября 1853 года Турция объявила войну России, а 15(27) марта 1854 г. к ней присоединились Великобритания, Франция и Королевство Сардиния. Война закончилась 18 марта 1856 года подписанием Парижского трактата. Основные военные действия шли в Крыму, являвшемся составной частью Новороссии, центром которой была Одесса.

Санкт-Петербургского университета. В 1868 году он выдерживает экзамен на звание кандидата физико-математических наук и поступает на недавно возникшие педагогические курсы при 2-й военной гимназии<sup>3</sup>. На этих курсах его ближайшими руководителями становятся известные педагоги: Василий Адрианович Евтушевский (1836–1888)<sup>4</sup> и Иван Фёдорович Рашевский (1831–1897)<sup>5</sup> [1]. По окончании этих курсов в 1870 году З. Б. Вулих был оставлен преподавателем математики на этих же курсах [2].

В 1873 г. выходит его «Приготовительный курс геометрии», изданный журналом «Семья и школа» (объём – 126 с.). (Для понимания методического значения курса приведем цитату из написанных Вулихом методических указаний о способе прохождения курса: «Предлагаемый курс разделяется на две части. В первой части ученики, рассматривая геометрические тела, постепенно приобретают основные геометрические представления и понятия . . . Поэтому для прохождения курса необходима коллекция моделей геометрических тел . . . Нужно, чтобы ученики, видя перед собой модель куба, призмы и т. д., сами замечали всё требуемое; точно так же и все выводы должны быть добыты самими учащимися. Дело же учителя состоит в том, чтобы наводящими вопросами довести учеников до заранее предположенной цели . . . Приобретение геометрических понятий совершается на кубе, призме, пирамиде, цилиндре, конусе и шаре. Второй отдел первой части составляет измерение площадей фигур и объёмов тел . . . Вторая часть составляет переход к систематическому курсу геометрии: тут ученики знакомятся с аксиомами, теоремами и их доказательствами, с задачами и их решениями»<sup>6</sup>).

Летом 1873 года Захар Борисович вместе с преподавателем тех же педагогических курсов Н. Н. Запольским<sup>7</sup> был командирован Главным Управлением

---

<sup>3</sup> 2-я военная гимназия помещалась по адресу: 9-я линия В. О., д. 6. Ныне там находится гимназия №700 Василеостровского района Санкт-Петербурга (см.: Никитенко Г., Соболев В. Дома и люди Васильевского острова – М.: ЗАО Центрполиграф, 2007. – 735 с.)

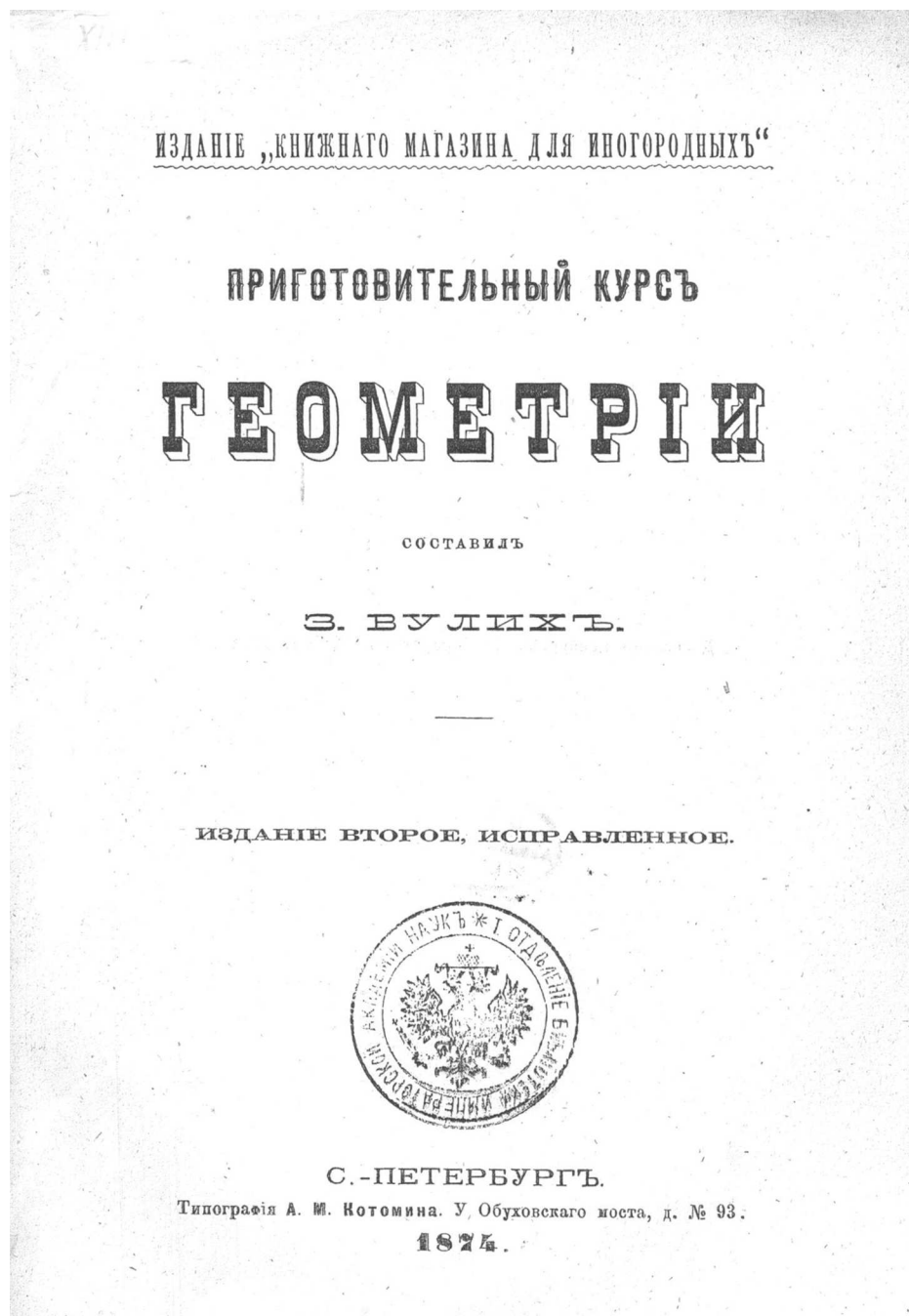
<sup>4</sup> В. А. Евтушевский окончил физико-математический факультет Санкт-Петербургского университета. Был руководителем по математике на педагогических курсах при главном управлении военно-учебных заведений. Был одним из главных деятелей на Аларчинских женских курсах (организованы в 1869 г.), предшествовавших устройству высших женских курсов. Он был также одним из основателей Андреевских курсов для приготовления учителей народных школ. Его «Сборник арифметических задач» выдержал свыше 40 переизданий и разошелся невиданным до 1917 года общим тиражом свыше миллиона экземпляров.

<sup>5</sup> И. Ф. Рашевский окончил курс в Харьковском университете. Был учителем словесности в Орловской гимназии. С 1868 года стал руководителем по русскому языку на педагогических курсах при 2-й военной гимназии. Вместе с В. А. Евтушевским принимал активное участие в организации Андреевских курсов. После их преобразования в земскую учительскую школу в течение 8 лет был её директором. Был одним из учредителей Аларчинских женских курсов. Впоследствии состоял инспектором педагогических женских курсов и Директором Петровского коммерческого училища (1881–1897). Неоднократно руководил съездами учителей.

<sup>6</sup> З. Б. Вулих подробно разбирает все содержание обеих частей курса. Его методические указания составляют 18 страниц текста (со 121 по 137 страницы книги).

<sup>7</sup> Запольский Николай Никитич (1840–1894) – русский педагог, родом сибиряк, сын священника; окончил Иркутскую духовную семинарию и Санкт-Петербургскую духовную академию, а также Педагогические курсы при 2-й военной гимназии. Его статьи «О ручном труде», «О медицине и педагогике», «Историко-статистический очерк общего и специального образования в России», «О детских играх» и многие другие были изданы в разных периодических изданиях, в частности, в журналах: «Женское образование», «Народная школа», «Педагогический сборник», «Журнал Министерства народного просвещения».

военно-учебных заведений в Германию и Швейцарию для осмотра реальных училищ. В следующем 1874 году в «Педагогическом сборнике» вышли его четыре статьи (в феврале–мае) «О преподавании математики и геометрического черчения в реальных училищах Пруссии и Саксонии и Великого Герцогства Баденского» [3]<sup>8</sup>. В этом же году выходит второе, исправленное издание «Приготовительного курса геометрии» [4].



Титульный лист издания 1874 года.

<sup>8</sup> Вулих (и Запольский) вышли за рамки посещения реальных гимназий, посетив Friedrich–Werdersche Gewerbeschule в Берлине, где в рамках школы на последнем 8-м году обучения давались «Основания дифференциального и интегрального исчисления» (см. [3], кн. III).

По возвращении из командировки в Германию и Швейцарию З. Б. Вулих был назначен руководителем на педагогических курсах вместо Е. А. Евтушевского и оставался на этой должности 10 лет вплоть до закрытия курсов в 1883 году. Поддерживая идею высшего женского образования, З. Б. Вулих стал с 1875 года преподавать математику и методику на женских (Аларчинских) педагогических курсах<sup>9</sup>. Для женских гимназий в том же году им был составлен «Краткий курс геометрии и собрание геометрических задач» [5]. До 1897 года этот курс выдержал 17 изданий и разошелся более, чем в 100 тысячах экземпляров. Приведем только одну страницу из этой книги с доказательством того, что «поверхность шара равняется учетверенной площади большого круга», а также начало доказательства Следствия о том, что «поверхности шаров относятся между собой как квадраты радиусов».

Вопросам преподавания арифметики в народных школах посвящена статья З. Б. Вулиха (1876) в журнале «Народная Школа» [6]. В этой статье он по сути развивает взгляды своего наставника Евтушевского [7], [8], который придерживался, хотя и в изменённом виде, идей немецкого педагога Августа–Вильгельма Грубе (Grube August–Wilhelm: 1816–1884)<sup>10</sup>. Вулих подчёркивает необходимость живых, интересных и знакомых для обучающихся задач и примеров, особенно на ранней стадии обучения арифметике. В 1878 году З. Б. Вулих публикует фундаментальную руководящую статью о преподавании арифметики и геометрии в народных школах [11]<sup>11</sup>.

1878 г. принёс изменения в карьере З. Б. Вулиха – он был назначен инспектором классов Третьей военной гимназии<sup>12</sup> (с 1882 г. преобразована в Александровский кадетский корпус), где проработал в этой должности до 1892 года.

В 1885 году Захар Борисович удостоился высокой чести – приглашения давать уроки по математике августейшим детям Александра III: Георгию Александровичу (1871–1899) и Ксении Александровне (1875–1960), а позже и Михаилу Александровичу (1878–1918) и Ольге Александровне (1882–1960)<sup>13</sup> [12].

---

<sup>9</sup> Он преподавал на этих курсах до последних дней своей жизни.

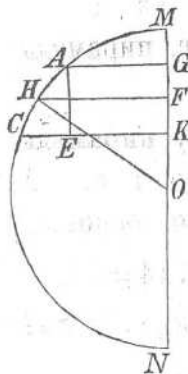
<sup>10</sup> Август–Вильгельм Грубе был автором популярных и в России книг для детей и юношества. Так, его «Арифметика» выдержала 5 изданий, «Очерки из истории и народных сказаний» (3 издания). Совершенно несправедливо в советской педагогике методика Грубе была представлена как «скучная и действующая на учеников отупляющим образом» [9]. Наоборот, его книги написаны весьма живо и интересно. То, что Грубе ратовал за необходимость закрепления материала при изучении арифметических действий путем решения повторяющихся задач, звучит современно и теперь, когда школьники не умеют складывать дроби, упоная на компьютер. Добавим, что Грубе интуитивно, а Евтушевский более осознано, фактически подошли к понятию первичности порядковых чисел ([10], с 62–63).

<sup>11</sup> Будучи летом 1873 г. в командировке в Германии Вулих с удивлением отмечал [4], что преподавание в средней школе там проходит на основе подробных программ, но без учебников. Впрочем, сжатый учебник Мелера «Основные теоремы элементарной математики» (объёмом 156 страниц) вышел в 1872 году. Ситуация изменилась в 70-е годы. Так в 1878–80 гг. в Германии выходит нормальный учебник по элементарной математике Виктора Шлегеля (Schlegel Victor: 1843–1905) «Lehrbuch der elementaren Mathematik» (издатель: J. Zwissler) в четырёх частях.

<sup>12</sup> Третья Петербургская военная гимназия была образована в 1873 году с допуском в неё представителей всех сословий и с платой, как в гражданских гимназиях.

<sup>13</sup> Думается, что кроме репутации образцового преподавателя математики, в приглашении сыграла роль рекомендация И. Ф. Рашевского, который уже преподавал августейшим детям русский язык и литературу.

*Доказательство.* Возьмемъ (черт. 190) полуокружность MACN. Пусть его полуокружность раздѣлена на нѣсколько частей, и изъ концовъ каждой



части, напр. изъ А и С, опущены перпендикуляры на діаметръ MN. При вращеніи около MN, полуокружность образуетъ шаръ, полуокружность—шаровую поверхность; часть круга АСКГ—шаровой поясъ; а дуга АС—поверхность шароваго пояса. —Вообразимъ себѣ, что полуокружность раздѣлена на безконечно большое число частей; въ такомъ случаѣ дугу АС можно считать приблизительно за прямую линію; шаровой поясъ, образуемый вращ. АГКС, за усѣченный конусъ, а поверхность шароваго пояса—за боковую поверхность усѣченнаго конуса.

Обозначимъ эту поверхность: Пов. АС, и пусть Н будетъ середина АС и  $NH \perp MN$ . Въ такомъ случаѣ (268):

$$\text{Пов. АС} = 2\pi \cdot NH \cdot AC.$$

Опустивъ изъ точки А перпендикуляръ на прямую СК и соединивъ точку Н съ центромъ шара О, получаемъ два треугольника АСЕ и FHO, которые подобны. Въ самомъ дѣлѣ:  $\angle AEC = \angle HFO = d$ ,  $\angle FHO = \angle CAE$  (58), такъ какъ  $FH \perp AE$  и  $HO \perp AC$ ; значить (209, сл.)  $\triangle ACE \sim \triangle FHO$ ; а потому:

$$NH : AE = HO : AC, \text{ откуда: } NH \cdot AC = HO \cdot AE.$$

Слѣд. Пов. АС  $= 2\pi HO \cdot AE = 2\pi R \cdot GK$ , (R радиусъ шара), т. е. Поверхность шароваго пояса АС равняется окружности большаго круга ( $2\pi R$ ), помноженной на высоту пояса (GK).

Но поверхность шара можно разсматривать какъ сумму поверхностей такихъ шаровыхъ поясовъ; поэтому она равна  $2\pi R$ , помнож. на сумму высотъ, т. е. на діаметръ  $2R$ , т. е.  $S_{\text{шар.}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$ .

**271. Слѣствие.** Пусть радиусъ одного шара  $= r$ , а радиусъ другаго шара  $R = 2r$ , или  $R = 3r$ , или  $R = 5r$  и т. д.

$$\text{Поверхность перваго шара} = 4\pi r^2.$$

Повер. 2-го шара  $= 4\pi R^2 = 4\pi (2r)^2 = 4\pi \cdot 2r \cdot 2r = 4 \cdot 4\pi r^2$ ,  
или » »  $4\pi (3r)^2 = 4\pi \cdot 3r \cdot 3r = 9 \cdot 4\pi r^2$ ,  
или » »  $4\pi (5r)^2 = 4\pi \cdot 5r \cdot 5r = 25 \cdot 4\pi r^2$ ,  
т. е. если радиусъ одного шара въ 2, или въ 3, или въ 5 разъ больше радиуса другаго шара, то его поверхность въ 4 или въ 9

Через год в 1886 году З. Б. Вулих был пожалован чином действительного статского советника.

В 1889 году Вулих публикует в журнале «Женское образование» статью «Первоначальное преподавание арифметики». Наконец, в 1891 году в «Педагогическом сборнике» (в феврале и марте) выходит обширная статья З. Б. Вулиха: «Современное преподавание математики в средних учебных заведениях Германии», состоящая из двух частей [13]. Первая часть вышла в феврале, вторая – в марте 1891 года. Обе части статьи написаны на основе книги Фридриха Райта (Reidt Friedrich) «Введение в обучение математики в старших классах средней школы»<sup>14</sup>.

В февральском номере «Педагогического сборника» основное внимание уделено методике. В предисловии к статье З. Б. Вулих вспоминает о своей командировке в Германию летом 1873 года. За прошедшие 18 лет, как он отмечает, в Германии «постепенно развивалась методика преподавания математики в средних учебных заведениях, благодаря в особенности журналу Hoffmann'a "Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", а также собраниям учителей и директорским конференциям, ... и новым учебным планам»<sup>15</sup>.

Вместе с тем, Вулих выражает сожаление, что Фридрих Райт держится исключительно немецких источников и не обращается к богатой французской литературе<sup>16</sup>. В частности, Вулих пишет, что «более всего подходит к книге Райта замечательное и весьма поучительное сочинение известного составителя руководств по низшей и высшей математике Lacroix<sup>17</sup>, первое издание которого появилось в 1805 году под заглавием "Essais sur l'Enseignement en general et sur celui des mathematiques en particulier"». Далее, при рассмотрении книги Райта, З. Б. Вулих неоднократно обращается к книге Лякруа, используя и свой собственный опыт обучения математике.

В мартовской части статьи Вулиха приводятся учебные планы и вспомогательные средства, используемые в средних учебных заведениях Германии и разобранные в книжке Райта, включая наиболее известные учебники для средней школы [13].

В 1892 году З. Б. Вулих оставляет Александровский корпус, а в 1893 году назначается инспектором Александровского лицея.

Наконец, в 1896 году З. Б. Вулих занимает новый пост – начальника женских столичных и Царскосельской гимназий, и одновременно петербургских

---

<sup>14</sup> Reidt Fr., Anleitung zum Mathematischen Unterzàcht (=Unterricht) an höheren Schulen. – Berlin: G. Grote, 1886. – 252 S.

<sup>15</sup> В февральском номере (Книжка II) «Педагогического сборника» 1874 года (с. 232–243) З. Б. Вулихом были приведены не только нормальный план (с еженедельным числом часов и подробным содержанием), но и некоторые отличия в отдельных реальных гимназиях. Обращает на себя внимание содержание коммерческой арифметики, включавшее вычисление процента, выигрыша, и потери, учет векселей и срочные уплаты, правила товарищества и смешения по Коху.

<sup>16</sup> Вулих пишет, что задаче книги Райта отвечает сочинение Duhamel'a "Méthodes dans les sciences des raisonnements" [14]. Интересно, что к этому же автору (Duhamel Jean Marie Constant (1797–1872)) обращается при создании идемпотентного анализа академик Валерий Павлович Маслов (р. 1930). (См., например, [15], с. 236–240).

<sup>17</sup> Lacroix Silvestre Françoise: 1765–1843 – известный французский математик.





З. Б. Вулих в 1895 (слева);  
Дети Александра III: Михаил и Ольга, которых учил З. Б. Вулих (справа)

Мариинских женских училищ.

К сожалению, тяжелый недуг, которым страдал уже несколько лет З. Б. Вулих, обострился в последний год его жизни, и 11(23) февраля 1897 года Захара Борисовича не стало. 13 (25) февраля состоялись похороны Захара Борисовича на Новодевичьем кладбище в Санкт-Петербурге. Последнее прощальное слово в присутствии многочисленных учеников, включая и августейших детей, друзей и педагогов Санкт-Петербурга, произнёс товарищ Захара Борисовича по педагогическим курсам при 2-й военной гимназии Юрий Юрьевич Цветковский<sup>18</sup> [2].

Ещё в 1865 году Захар Борисович, будучи студентом 4-го курса университета, женится на Елене Антоновне Березовской, потомственной дворянке (1845–1918), внучке героя войны 1812 года полковника С. С. Васильковского. Имели они четверо детей: Александра (1867–1907), Захара (1869–1941), Бориса (1872–?) и Елену (1884–1918). Продолжателем династии математиков стал Захар Захарович Вулих, в советское время профессор и декан ЛГПИ им. А. И. Герцена, умерший от истощения при эвакуации зимой 1941 г. из Ленинграда на станции Котельнич (подробнее, см. [16], с. 83). Захар Захарович Вулих был женат на потомственной дворянке Гродненской губернии Нине Александровне Волковицкой (1890–1970). Их сын, Борис Захарович Вулих (1913–1978) стал известным

---

<sup>18</sup> Ю. Ю. Цветковский (1843–1913) стал преподавателем математики в военных училищах, включая и Киевское военное училище. С 1907 года стал директором Торгового училища имени Александра III в Москве, в котором (23.12.1909–4.01.1910) проходила выставка учебников и пособий по элементарной математике Московского математического кружка (руководитель – профессор Б. К. Млодзеевский (1858–1923) [17].

советским математиком (подробнее см., например, [18]).



З. З. Вулих



Б. З. Вулих

## Литература

- [1] Гуревич Я. Г. Двадцатипятилетний юбилей З. Б. Вулиха // Русская школа. 1893. №№ 9, 10. – С. 283–284.
- [2] Цветковский Ю. (Ю.Ц.) Памяти Захара Борисовича Вулиха. 1844–1897 // Русская школа. 1897. № 2 – С. 298–300.
- [3] Вулих З. Б. Преподавание математики и геометрического черчения в реальных училищах Пруссии, Саксонии и реальных гимназиях Великого Герцогства Баденского // Педагогический сборник, издаваемый при Главном Управлении Военно-учебных заведений. – СПб.: Типогр. В. С. Балашева, 1874. – Кн. II. – С. 226–255; Кн. III. – С. 274–326; Кн. IV. – С. 363–412; Кн. V. – С. 488–512.
- [4] Вулих З. Б. Приготовительный курс геометрии (изд. 2-е, исправленное). – СПб.: Типогр. А. М. Котомина, 1874. – 137 с.
- [5] Вулих З. Б. Краткий курс геометрии и собрание геометрических задач (изд. 2-е, исправленное). – СПб.: Типогр. А. М. Котомина, 1877.
- [6] Вулих З. Б. Цели преподавания арифметики в народных школах // Народная Школа. 1876. № 8. – 67 с.
- [7] Евтушевский В. А. Сборник арифметических задач и численных примеров для подготовительного и систематического курса (2-я часть – Дроби). Изд. 9-е. – СПб.: Изд-е Е. А. Полубариновой, 1881. – 140 с.+31 с. (ответы).
- [8] Евтушевский В. А. Методика арифметики (руководство для учителей и учительниц к преподаванию начальной Арифметики в народных школах). – СПб.: Изд-е Е. А. Полубариновой, 1874. – 334 с.
- [9] Ланков А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. – М.: Учпедгиз, 1951. – 151 с.
- [10] Вейль Г. О философии математики. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 128 с.
- [11] Вулих З. Б. О преподавании арифметики и геометрии в народных школах // Обзор русской народной учебной литературы. – СПб.: СПб Комитет грамотности, 1878.
- [12] Гребельский П. Х., Мирвис А. Б. Дом Романовых (изд. 2-е, дополн. и переработ.). – СПб.: ЛИО “Редактор”, 1992. – 279 с.

- [13] Вулих Э. Б. Современное преподавание математики в средних учебных заведениях Германии // Педагогический сборник, издаваемый при Главном Управлении Военно-учебных заведений. 1891. – Кн. II. – С. 200–226; Кн. III. – С. 324–342. – СПб.: Типогр. М. М. Стасюлевича, 1891.
- [14] Duhamel J.-M.-C. Méthodes dans les sciences des raisonnements. – Paris: Gauthier–Villars, 1885. – 470 А.
- [15] Одинец В. П., Шлензак В. А. Избранные главы теории графов: авториз. пер. с польск. В. П. Оди́нца при участии М. В. Поспелова; под ред. П. А. Головача. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 504 с.
- [16] Авдеев Ф. С., Авдеева Т. К. Роль московского математического кружка в развитии методики преподавания математики: исторический экскурс // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. – Орёл: Изд-во Орловского госуниверситета, 2012, № 2.
- [17] Профессора Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. Биографический справочник (под ред. Г. А. Бордовского и В. А. Козырева). – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2000. – 391 с.
- [18] Одинец В. П. О Борисе Захаровиче Вулихе – потомственном математике и типичном петербуржце (к 100-летию со дня рождения) // Вестник Сыктывкарского университета, Сер. 1. – 2013. – Вып. 17. – С. 123–128.

# Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

УДК 517.9

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МЕДЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Андреев В. К.

Институт вычислительного моделирования СО РАН —  
обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН

Красноярск

e-mail: andr@icm.krasn.ru

**Andreev V. K. Solving problem of a slowly motion of heat conduction viscous liquid in rotating spherical layer.** The problem of a slowly flow of viscous heat conduction fluid in spherical rotating layer is investigated. The interior solid sphere and exterior sphere are rotating with a different angular velocities, moreover into solid ball there are nonhomogeneity heat sources. Some new exact solutions are found. For the temperature fields the conjugate initial boundary value problem is solved. A priori estimates are obtained and input data conditions when solution tends to stationary one are found. Some numerical results of velocities behaviour in meridional sections are presented.

**Key words:** Oberbeck – Boussinesq equations, stationary solution, conjugate initial boundary value problem, Fourier series

Изучается задача о ползущем движении вязкой теплопроводной жидкости в сферическом слое. Внутренний твёрдый шар и внешняя сфера вращаются с разными угловыми скоростями, причём в шаре имеются неоднородные источники тепла. Найдено стационарное течение жидкости в рамках модели Обербека – Буссинеска. При этом для температурных полей решена сопряжённая начально-краевая задача. Указаны условия на входные данные, при которых решение с ростом времени выходит на стационарный режим. Приведены примеры расчёта стационарных течений, возникающих в меридиональных сечениях.

**Ключевые слова:** уравнения Обербека – Буссинеска, стационарное решение, сопряжённая начально-краевая задача, ряды Фурье

**1. Решение задачи в приближении Стокса с постоянным ускорением силы тяжести.** Будем считать, что вязкая теплопроводная жидкость находится в сферическом слое  $V = \{r, \theta, \varphi | R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ . Внутри шара  $0 \leq r \leq R_1$  источник тепла  $h(r, \theta, \varphi, t) \neq 0$ , а в слое  $h(r, \theta, \varphi, t) = 0$ . Внутренняя твёрдая сфера вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ , а внешняя — со скоростью  $\omega_2$ , они считаются постоянными. Далее все искомые величины не зависят от времени и угла  $\varphi$ . Положим для компонент скоростей

$$u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad w = \frac{\omega}{r \sin \theta}, \quad (1.1)$$

где  $\psi(r, \theta)$  — функция тока в меридиональной плоскости, а  $\omega$  — угловой момент,

$\omega = \omega(r, \theta)$ . Нетрудно видеть [1], что  $\omega$  есть решение линейного уравнения

$$L\omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0, \quad (1.2)$$

а функция тока —

$$L^2 \psi = 0. \quad (1.3)$$

Для уравнения (1.2) ставятся условия  $\omega(R_1, \theta) = R_1^2 \sin^2 \theta \omega_1$ ,  $\omega(R_2, \theta) = R_2^2 \sin^2 \theta \omega_2$ , для (1.3)  $\psi(R_{1,2}, \theta) = 0$ ,  $\psi_r(R_{1,2}, \theta) = 0$ .

Ограниченное решение уравнения (1.2) находится методом разделения переменных, так что с учётом граничных условий линейная скорость по углу  $\theta$

$$w = \sin \theta \left( \frac{a_1}{r^2} + a_2 r \right), \quad a_1 = \frac{(R_1 R_2)^3 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^3 - R_1^3}, \quad a_2 = \frac{\omega_2 R_2^3 - \omega_1 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}. \quad (1.4)$$

Из (1.3) и граничных условий ясно, что  $\psi(r, \theta) = 0$ , т. е. происходит вращение слоя как твёрдого тела.

Пусть  $T_1(r, \theta)$  — температура внутреннего твёрдого шара, тогда

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_1}{\partial \theta} \right) = -h(r, \theta) / \chi_1. \quad (1.5)$$

Для  $T_2(r, \theta)$  выполнено уже однородное уравнение вида (1.5). На границе раздела при  $r = R_1$

$$T_1(R_1, \theta) = T_2(R_1, \theta), \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} (R_1, \theta) = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} (R_1, \theta),$$

$k_1, k_2$  — коэффициенты теплопроводностей сред. Кроме того, на внешней сфере задана температура  $T_2(R_2, \theta) = T_{20}(\theta)$ . Поставленная задача для  $T_{1,2}(r, \theta)$  с учётом ограниченности  $T_1(0, \theta)$  решается методом разделения переменных. Для этого решение ищется в виде рядов Фурье

$$T_j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^j(r) P_n(\cos \theta), \quad (1.6)$$

где

$$R_n^1(r) = d_n r^n + f_n(r), \quad R_n^2(r) = a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}, \quad (1.7)$$

$$f_n(r) = \frac{1}{2n+1} \int_0^r \left( r^n \tau^{-n+1} - \frac{\tau^{n+2}}{r^{n+1}} \right) h_n(\tau) d\tau,$$

$h_n(r)$  — коэффициенты разложения функции  $-h(r, \theta) / \chi_1$  в ряд по полиномам Лежандра. Далее,  $a_n, b_n$  и  $d_n$  находятся из алгебраической системы уравнений

$$\begin{aligned} a_n R_1^n + b_n R_1^{-(n+1)} &= d_n R_1^n + f_n(R_1), \\ k_1 f_n'(R_1) + k_1 n d_n R_1^{n-1} &= k_2 [n a_n R_1^{n-1} - (n+1) b_n R_1^{-(n+2)}], \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-(n+1)} &= T_{20n}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В последнем уравнении  $T_{20n}$  — коэффициент ряда Фурье функции  $T_{20}(\theta)$ .

**2. О влиянии температуры на движение сферического слоя в модели Обербека–Буссинеска.** Введём безразмерные параметры:

$$\delta_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \delta_2 = \frac{R_2}{R_1}, \quad \text{Re} = \frac{R_1^2 \omega_1}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad (2.1)$$

где  $\text{Re}$  — число Рейнольдса,  $\text{Pr}$  — число Прандтля. Пусть  $T_2^0 = \text{const}$  — характерная температура внешней сферы, скажем,  $T_2^0 = \max |T_{20}(\theta)|$ , а  $R_1$  и  $\omega_1 R_1$  — характерные длина и скорость. Тогда стационарная система уравнений для жидкой среды примет вид [3], [4]

$$\frac{1}{\text{Re}} L\omega = \frac{1}{r^2 \sin \theta} L_1 \omega; \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} L^2 \psi = \frac{2\omega}{r^2 \sin^2 \theta} L_2 \omega + \sin \theta L_1 \left( \frac{L\psi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\delta_3 (\delta_2 - 1) \sin \theta}{r^2} \frac{\partial T_2}{\partial \theta}; \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \Delta T_2 = \frac{\text{Pr}}{r^2 \sin \theta} L T_2, \quad (2.4)$$

где оператор  $L$  определён в (1.2),

$$L_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad L_2 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \delta_3 = \frac{\beta g |T_1^0 - T_2^0|}{(R_2 - R_1) \omega_1^2}. \quad (2.5)$$

В последней формуле (2.5)  $\beta$  — коэффициент объёмного расширения жидкости,  $T_1^0 = \text{const}$  — температура в центре внутреннего твёрдого шара. Согласно (1.6)  $T_1^0 = R_0^1 = d_0$ , а  $d_0$  находится из системы (1.8). Граничные условия остаются прежними, как и в п. 1.

Ищем решение в виде рядов по целым положительным степеням  $\text{Re}$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}^{2n} w^{(2n)}(r, \theta), \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}^{2n+1} \psi^{(2n+1)}(r, \theta), \\ T_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}^{2n} T_2^{(2n)}(r, \theta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

При  $n = 0$  из системы (2.2)–(2.4) получим уравнения

$$\begin{aligned} L\omega^{(0)} &= 0, \quad \Delta T_2^{(0)} = 0, \\ L^2 \psi^{(1)} &= \frac{2\omega^{(0)}}{r^2 \sin^2 \theta} L_2 \omega^{(0)} - \frac{\delta_3 (\delta_2 - 1)}{r^2} \sin \theta \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Значит,  $\omega^{(0)}(r, \theta)$  находится из (1.2), где  $r$  — уже безразмерный радиус,

$$a_1 = \frac{\delta_1 \delta_2^3 - 1}{\delta_2^3 - 1}, \quad a_2 = \frac{(1 - \delta_1) \delta_2^3}{\delta_2^3 - 1}, \quad (2.8)$$

а линейная безразмерная скорость  $w_0(r, \theta)$  даётся равенством (1.4).

Функция  $T_2^{(0)}(r, \theta)$  определяется в безразмерной форме из равенств (1.6). Функция тока  $\psi^{(1)}(r, \theta)$  вторичного течения [5] находится методом разделения

переменных из последнего уравнения (2.7) и однородных граничных условий  $\psi^{(1)}(1, \theta) = \psi^{(1)}(\delta_2, \theta) = 0$ ,  $\psi_r^{(1)}(1, \theta) = \psi_r^{(1)}(\delta_2, \theta) = 0$ . Для сравнения с результатами работы [3] положим в безразмерной форме

$$T_2(\delta_2, \theta) = 1 - \varepsilon P_2(\cos \theta), \quad \theta \in [0, \pi], \quad (2.9)$$

$\varepsilon$  — малый параметр. Кроме того, внутренние источники тепла являются постоянными,

$$h(r, \theta) = \text{const} = h_0. \quad (2.10)$$

Тогда

$$T_2^{(0)}(r, \theta) = C + \frac{D}{r} + \left( Ar^2 + \frac{B}{r^3} \right) P_2(\cos \theta), \quad (2.11)$$

$$T_1^{(0)}(r, \theta) = -\frac{H_0 r^2}{6} + Er^2 P_2(\cos \theta) + F$$

с постоянными  $C, D, A, B, E, F$ , определяемыми из равенств (1.8) и (2.9).

Функция тока в меридиональной плоскости с учётом граничных условий имеет вид

$$\psi^{(1)}(r, \theta) = (r - 1)^2 (r - \delta_2)^2 \left( A_1 r + B_1 + \frac{C_1}{r} + \frac{D_1}{r^2} \right) P_2^1(\cos \theta) \sin \theta, \quad (2.12)$$

где  $P_2^1(\cos \theta) = 3 \cos \theta \sin \theta$  — присоединённая функция Лежандра. Постоянные  $A_1, B_1, C_1, D_1$  определяются через постоянные  $a_1, a_2$  из (2.8) и  $A, B$  путём решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2(1 + \delta_2)A_1 - B_1 &= \frac{1}{24} \delta_3 (\delta_2 - 1)A, \\ \delta_2^2 C_1 - 2\delta_2(1 + \delta_2)D_1 &= -\frac{1}{24} \delta_3 (\delta_2 - 1)B + \frac{a_2}{12}, \\ -2\delta_2(1 + \delta_2)A_1 + [2\delta_2 + (1 + \delta_2)^2]B_1 - 2(1 + \delta_2)C_1 + D_1 &= -\frac{a_1}{12}, \\ \delta_2^2 A_1 - 2\delta_2(1 + \delta_2)B_1 + [2\delta_2 + (1 + \delta_2)^2]C_1 - 2(1 + \delta_2)D_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Предположим теперь, что внутренние источники тепла в твёрдом шаре распределены по закону  $-h_0 \chi_1^{-1} P_2(\cos \theta)$ . Тогда для температуры в этом шаре получим представление

$$T_1^{(0)}(r, \theta) = r^2 \left[ E - \frac{H_0}{5} \left( \ln r - \frac{1}{5} \right) \right] P_2(\cos \theta) + F, \quad (2.14)$$

отличное от второго равенства в (2.11). Из условия сопряжения для температур при  $r = 1$  находим постоянные  $A, B, C, D, E$  и  $F$ , отличные от постоянных в (2.11).

Функция тока по-прежнему даётся равенством (2.12), где постоянные  $A_1, B_1, C_1, D_1$  находятся из системы (2.13). Расчёты проводились для  $\chi_1 = 6,4 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $k_1 = 50 \text{ Вт}/\text{м} \cdot \text{°C}$ ;  $\omega_1 = 7,61 \cdot 10^{-5} \text{ 1}/\text{с}$ ;  $R_1 = 13 \cdot 10^5 \text{ м}$ ;  $\chi_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $k_2 = 12 \text{ Вт}/\text{м} \cdot \text{°C}$ ;  $\omega_2 = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ 1}/\text{с}$ ;  $R_2 = 64 \cdot 10^5 \text{ м}$ ;  $\beta = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1}/\text{°C}$ , см. [6].

Заметим, что  $\omega_1 > \omega_2$ , поскольку угловая скорость вращения внутреннего ядра на 0,3 градуса в год больше  $\omega_2$ . Далее, примем  $|T_2^0 - T_1^0| = 3500^\circ\text{C}$  [6]; легко подсчитать, что  $\delta_1 = 0,942$ ,  $\delta_2 = 4,9$ ,  $k = k_1/k_2 = 4,17$ , а постоянные  $a_1, a_2$  в (2.8) равны  $a_1 = 0,94$ ,  $a_2 = 0,06$ . Кроме того, согласно (2.5) при  $g = 0,2 \text{ м/с}^2$  получим  $\delta_3 = 3,55$ . Расчёты проводились при  $H_0 = 10; 10^3; 10^5$  для  $\varepsilon = 10^{-3}$ , где  $H_0 = h_0 R_1^2 (\chi_1 |T_2^0 - T_1^0|)^{-1}$ . Постоянные  $A_1, B_1, C_1, D_1$  определялись из системы (2.13) с известными  $A, B, a_1, a_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ , построены функции тока меридионального сечения для разных значений  $H_0$ .

При  $H_0 = 10$  существует два вихря (восемь во всём меридиональном сечении). С ростом  $H_0$  (сильный прогрев мантии изнутри) образуется один вихрь, который смещается ближе к твёрдому ядру. Отметим, что в работе [3] всегда имеется только один вихрь.

**3. Нестационарное ползущее движение во вращающемся сферическом слое.** В этом случае левые части уравнений (2.2), (2.3), (2.4) будут иметь вид

$$\frac{1}{\text{Re}} (L\omega - \omega_t), \quad \frac{1}{\text{Re}} L(L\psi - \psi_t), \quad \frac{1}{\text{Re}} (\Delta T_2 - \text{Pr}T_{2t}), \quad (3.1)$$

соответственно. Кроме того, необходимо добавить начальные условия при  $t = 0$ :

$$\psi = 0, \quad T_2 = Q_2(r, \theta), \quad \omega = \Omega_0(r, \theta). \quad (3.2)$$

Уравнение (1.5) для температуры внутри твёрдого шара в безразмерных переменных будет таким:

$$\Delta T_1 - \text{Pr}_1 T_{1t} = -f(r, \theta, t) \quad (3.3)$$

с заданной функцией  $f(r, \theta, t)$  (“источником” тепла),  $\text{Pr}_1 = \nu/\chi_1$ . При  $t = 0$

$$T_1 = Q_1(r, \theta). \quad (3.4)$$

В (3.2), (3.4) функции  $Q_j(r, \theta)$ ,  $j = 1, 2$ , и  $Q_0(r, \theta)$  являются известными. Отметим, что при  $r = \delta_2$  (на внешней сфере) считается известной температура (безразмерная)

$$T_2 = Q_3(\theta, t). \quad (3.5)$$

Для малых чисел Рейнольдса вновь получим линейные задачи вида (2.7)

$$\begin{aligned} \omega_t^{(0)} = L\omega^{(0)}, \quad \Delta T_2^{(0)} - \text{Pr}T_{2t}^{(0)} = 0, \\ L(L\psi^{(1)} - \psi_t^{(1)}) = \frac{2\omega^{(0)}}{r^2 \sin^2 \theta} L_2\omega^{(0)} - \frac{\delta_3(\delta_2 - 1)}{r^2} \sin \theta \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Функция  $\omega^{(0)}(r, \theta, t)$  удовлетворяет граничным условиям  $\omega^{(0)}(1, \theta, t) = \alpha_1(t) \sin^2 \theta$ ,  $\omega^{(0)}(\delta_2, \theta, t) = \alpha_2(t) \delta_2^2 \sin^2 \theta$ , причём  $\Omega_0(1, \theta) = \sin^2 \theta$ ,  $\Omega_0(\delta_2, \theta) = \delta_2^2 \sin^2 \theta$ , т. е.  $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 1$ . Последние равенства суть условия согласования с (3.2).

Будем искать решение задачи для  $\omega^{(0)}(r, \theta, t)$  в виде  $\omega^{(0)} = R(r, t) \sin^2 \theta$ . Тогда (предполагается, что  $\Omega_0 = \Omega(r) \sin^2 \theta$ ) функция  $R(r, t)$  находится с помощью определённой функции Грина [2]. Таким образом, функция  $\omega^{(0)}(r, \theta, t)$  также полностью определена. Предположим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_j(t) = 1, \quad (3.7)$$



более точно  $|\alpha_j(t) - 1| \leq C_j e^{-\sigma t}$  ( $\sigma > 0$ ,  $C_j$  — постоянные). С помощью явных выражений для  $R(r, t)$ ,  $w^{(0)}(r, t)$  и предположения (3.7) доказывается, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w^{(0)}(r, \theta, t) = w_s^{(0)}(r, \theta), \quad (3.8)$$

где  $w_s^{(0)}(r, \theta)$  — стационарное решение (1.4) с коэффициентами  $a_1$ ,  $a_2$  из (2.8).

Сопряжённая задача для  $T_j^{(0)}(r, \theta, t)$ ,  $j = 1, 2$ , сначала решается разделением переменных по  $(r, t)$  и  $\theta$ , см. п. 1. Затем возникающие задачи для неизвестных  $Z_j(r, t)$  ( $T_j^{(0)} = \sum_{l=0}^{\infty} Z_j^{(l)} P_l(\cos \theta)$ ,  $Z^{(l)}(r, t) \equiv Z_j(r, t)$ ) решаются методом преобразования Лапласа по времени. В результате в образах по Лапласу решение для  $Z_j(r, t)$  находится в квадратурах, которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Тем не менее, если дополнительно к (3.7)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_3(\theta, t) = Q_3(\theta), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(r, \theta, t) = h(r, \theta), \quad (3.9)$$

то с ростом времени температуры  $T_j^{(0)}$  стремятся к их стационарным значениям.

Наконец, задача для  $\omega^{(1)}(r, \theta, t)$  с нулевыми начальными и граничными условиями 1-го и 2-го рода решается методом разделения переменных (либо методом преобразования Лапласа). После длинных вычислений доказывается, что при условиях (3.7), (3.9) функция  $\omega^{(1)}(r, \theta, t)$  стремится к своему стационарному значению.

## Литература

- [1] Rosenhead, L. *Laminar boundary layers*. — Oxford University Press. 1963.
- [2] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* — М. : Физматлит, 2001. — 576 с.
- [3] Яворская И. М. Влияние широтного градиента температуры на сферическое течение Куэтта // *МЖГ*. 1975. № 2. С. 15–23.
- [4] Riley, T. A., Mack L. R. Thermal effects on slow viscous flow between rotating concentric spheres // *Jour. Nonlinear Mech.* 1972. V. 7. № 3.
- [5] Haberman, W. L. Secondary Flow about a Sphere Rotating in a Viscous Liquid inside a Coaxially Rotating Spherical Container // *Physics of Fluids*. 1962. V. 5. Issue 5. P. 625–626.
- [6] Добрецов Н. Л., Кирдяшкин А. Г., Кирдяшкин А. А. *Глубинная геодинамика*, 2-е изд. — Новосибирск: СО РАН, филиал “ГЕО”, 2001. — 409 с.

# ОДНОМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет  
(КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева

г. Казань

e-mail: ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

**Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. The one-dimensional and two-dimensional inverse problems of heat and mass transfer on hypersonic aircraft permeable surfaces.** The hypersonic aircraft permeable surfaces effective heat protection mathematical modeling problems are considered. The statements of one- and two-dimensional inverse problems of heat and mass transfer are given. The computational experiments results on control (the blowing) restoration by heat and mass transfer parameters (local heat flow and local friction) are discussed.

**Keywords:** heat and mass transfer, hypersonic flows, laminar boundary layer, control, inverse problem, interpolation statement, approximation statement, computational experiment.

Рассмотрены задачи математического моделирования эффективной тепловой защиты проницаемых поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов. Приведены постановки одномерных и двумерных обратных задач теплообмена. Обсуждены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению управления (вдува) по параметрам теплообмена (локальным тепловому потоку и трению).

**Ключевые слова:** теплообмен, гиперзвуковые течения, ламинарный пограничный слой, управление, обратная задача, интерполяционная постановка, аппроксимационная постановка, вычислительный эксперимент.

**1. Одномерные обратные задачи.** Ранее в [1] (для случая кусочно-линейного вдува) были рассмотрены одномерные *обратные задачи* (ОЗ) теплообмена на проницаемых поверхностях (боковая поверхность кругового цилиндра и поверхность сферического носка) *гиперзвуковых летательных аппаратов* (ГЛА) для тропо-, страто- и нижних слоёв мезосферы (10–30 км).

**2. Обратные по вдуву задачи теплообмена.** Приведём по [2] постановку ОЗ по управлению – *вдуву*  $m(x)$  в ламинарный пограничный слой (ПС), где  $x \in X = [0; 1]$  (ось  $x$  направлена вдоль контура тела). Пусть **заданы**:

1) сетка *управления*  $X_1: x_0^\wedge = 0 < x_1^\wedge < \dots < x_{n_1}^\wedge = 1;$

2) сетка *наблюдения*  $X_2: x_0^\vee = 0 < x_1^\vee < \dots < x_{n_2}^\vee = 1;$

3) непрерывное управление  $s(x) = \sigma B_0^2(x)$  – *магнитное поле* (МП).

Тогда при непрерывно-дифференцируемом управлении – *температурном факторе* (ТФ)  $\tau(x) = T_w(x)/T_{e_0}$  (где  $T_w(x)$  – температура стенки, а  $T_{e_0}$  – температура в *точке торможения* (ТТ) потока) и ограничениях  $I_{j,k}^m = [b_{j,k}^m; t_{j,k}^m]$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ ,  $k = 0, \dots, \nu_1^m$ ,  $\nu_1^m \geq 0$ , для «контрольных» значений локального *теплого потока* (ТП)  $q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$  требуется **найти** непрерывное на  $X$  управление  $m^\sim$ , задаваемое [3] элементами  $m^\sim(x) = m_j^\sim(x)$  для  $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ ,

$j = 1, \dots, n_1$ , удовлетворяющими условиям

$$(m^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^m \quad \text{для } x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \quad k = 0, \dots, \nu_1^m, \quad (1)$$

такое, что вычисленные [4–6] на  $X_2$  значения  $q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}$ , где  $q_j^\sim = q(x_j^\vee; m^\sim, \tau, s)$ , должны быть *близкими* к  $q^\vee$ , т. е.

$$q^\vee \rightarrow m^\sim, \quad (m^\sim, \tau, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim), \quad (2)$$

где  $f^\sim = (f_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}$ ,  $f_j^\sim = f(x_j^\vee; m^\sim, \tau, s)$ .

Если вместо  $q^\vee$  задать «контрольные» значения локального *напряжения трения* (НТ)  $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$ , то ОЗ по  $m$  для НТ будет иметь вид:

$$f^\vee \rightarrow m^\sim, \quad (m^\sim, \tau, s) \rightarrow (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee). \quad (3)$$

**Замечания.** 1) Элементы  $m_j^\sim(x)$  управления будем искать в виде многочленов степени  $\deg(m_j^\sim) = \mu \geq \nu_1 + 1$ , а всё  $m^\sim$  будем строить в классе кусочно-полиномиальных функций с точками стыка в узлах  $X_1$ . В работе [1] приведены постановки ОЗ для кусочно-линейного ( $\mu = 1$ ) случая. Для установления условий однозначной разрешимости задачи в [1] были рассмотрены случаи вида: а)  $X_1 = X_2$ ; б)  $X_1 \supseteq X_2$  при  $X_1 \neq X_2$ ; в)  $X_1 \subseteq X_2$  при  $X_1 \neq X_2$ .

2) Пусть  $\mu \geq \nu_1 + 1$  и  $X_1 \subseteq X_2$ . Предполагая для простоты, что все множества  $X_{1,j}^+ = (X_2 \setminus X_1) \cap [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ , содержат одинаковое количество  $\nu_2 \geq 0$  точек, можно считать, что  $X_{1,j}^+ = (x_{j,k}^+)_{k=1, \dots, \nu_2}$  – дополнительные сетки управления (при  $\nu_2 = 0$  – они пусты). В зависимости от соотношения между  $\mu$  и  $\nu_2$  задача будет *однозначно определённой*, *недо-* или *переопределённой*, что влечёт разные возможности для введения условий близости [1, 2] наборов  $q^\sim$  (или  $f^\sim$ ) и  $q^\vee$  (или  $f^\vee$ ).

**3. Аппроксимационная и интерполяционная постановки.** Введём

$$R_\infty(q^\sim; q^\vee) = \max_{j=0, \dots, n_2} |q_j^\sim - q_j^\vee|, \quad (4)$$

$$R_p(q^\sim; q^\vee) = \left( \sum_{j=0}^{n_2} |q_j^\sim - q_j^\vee|^p \right)^{1/p} \quad \text{при } p \in [1; +\infty). \quad (5)$$

Постановка ОЗ (2), (1) называется [1, 2] *интерполяционной* (ИПОЗ), если для **заданного** малого  $\varepsilon_1 > 0$  требуется найти такое управление  $m^\sim$ , что в узлах  $X_2$  значения  $q^\sim$  совпадают с  $q^\vee$  с точностью  $\varepsilon_1$ :

$$R_\infty(q^\sim; q^\vee) \leq \varepsilon_1. \quad (6)$$

Постановка ОЗ (2), (1) называется [1, 2] *аппроксимационной* (АПОЗ), если для **заданного**  $p \in [1; +\infty]$  требуется отыскать пару  $(m^\sim, q^\sim)$ , где управление  $m^\sim$  является приближённым решением экстремальной задачи

$$R_p^*(q^\vee) = \inf_{m^\sim} R_p(q^\sim; q^\vee). \quad (7)$$

При реализации на ЭВМ необходимо, чтобы  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{\min}$ , где  $\varepsilon_{\min}$  зависит от способа представления вещественных чисел и применяемых численных методов. Определения ИПОЗ и АПОЗ для (3), (1) – аналогичны (6) и (7).

#### 4. Вычислительные эксперименты по восстановлению вдува.

Приведём два примера восстановления вдува как по значениям локального ТП  $q^\vee$ , так и по значениям локального НТ  $f^\vee$ . Зафиксируем значения *неизменяемых параметров*: пусть число Маха  $M_\infty = 10 \in [10; 40]$ , высота полёта  $H = 10 \in [10; 30]$  км, радиус тела  $R = 0,1 \in [0,1; 1]$  м (такой выбор сделан для удобства сравнения с [5 – 7]). Диапазоны изменения *управляющих параметров* ограничим [2]:  $m(x) \in [0; 1]$ ,  $\tau(x) \in [0,15; 0,9]$ ,  $s(x) \in [0; 5 \cdot 10^4]$  Тл/Ом · м.

С помощью программы, реализующей *прямую задачу* [4–7], продолжая исследования [8, 9] о влиянии ТФ на ПС и на восстановление вдува, были получены последовательности значений  $q_{dir}$  и  $f_{dir}$  для законов вдувов  $m_{dir}$ , обобщающих рассмотренные в [7], при различных постоянных законах  $\tau_{dir} \in \{0,15; 0,20; \dots; 0,90\}$ . К  $q^\vee = q_{dir}$  и к  $f^\vee = f_{dir}$  была применена процедура решения ИПОЗ для вдува при различных постоянных законах ТФ  $\tau_{inv} \in \{0,15; 0,20; \dots; 0,90\}$  с ограничением  $m^\sim(x) \in I^m = [b; t]$ , где  $0 \leq b_{j,0} \leq t_{j,0} \leq 1$  для  $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ . Установлены предельные значения  $\tau_{inv}^*$ , при которых построение вдува возможно, а также зависимости  $\tau_{inv}^*(b, t; \tau_{dir})$ .

**4.1.** К  $q_{dir}$  и  $f_{dir}$ , полученным для **постоянного вдува**  $m_{dir} \equiv 0,3$  при  $\tau_{dir} \equiv 0,25$ , была применена процедура решения ИПОЗ для вдува при различных постоянных законах  $\tau_{inv} \in \{0,15; 0,20; \dots; 0,90\}$ . На рис. 1 представлены законы  $m^\sim$ , построенные по ТП, на рис. 2 – по НТ. Для ограничения  $b_{j,0} = 0$

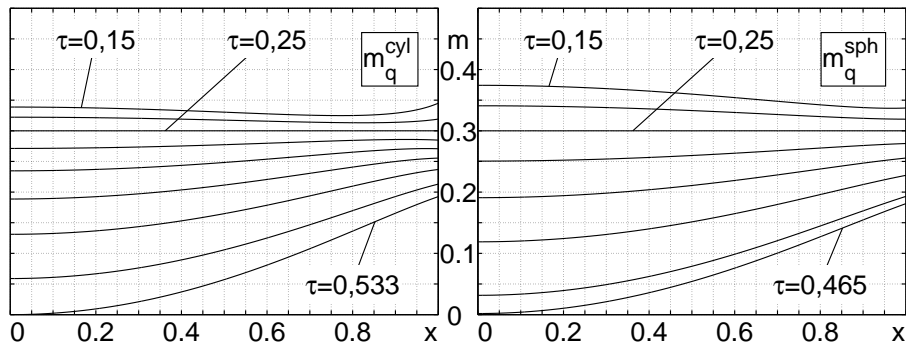


Рис. 1. Вдувы  $m^\sim$ , восстановленные по  $q^\vee$

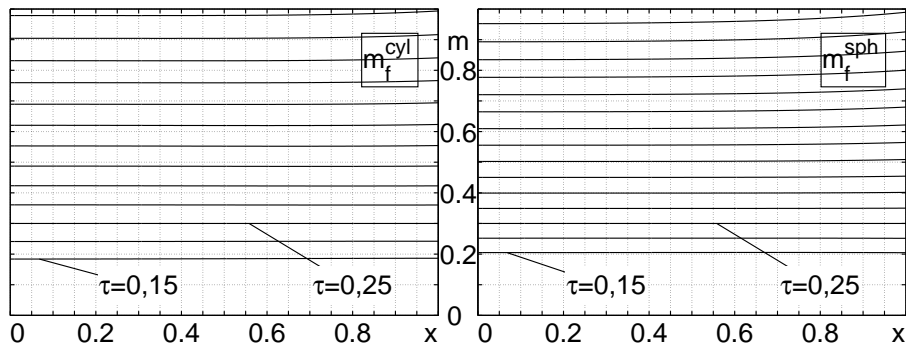


Рис. 2. Вдувы  $m^\sim$ , восстановленные по  $f^\vee$

при  $\tau_{inv} > \tau_{inv}^*$ , где  $\tau_{inv}^{*,cyl} = 0,465$  и  $\tau_{inv}^{*,sph} = 0,534$ , построение по ТП невозможно. Аналогично, для ограничения  $t_{j,0} = 1$  при  $\tau_{inv} > \tau_{inv}^*$ , где  $\tau_{inv}^{*,cyl} = 0,755$  и  $\tau_{inv}^{*,sph} = 0,858$ , невозможно построение по НТ.

**4.2.** К  $q_{dir}$  и  $f_{dir}$ , полученным для закона «вертикальная трапеция»

$$m_{dir}(x; m_0, m_1) = m_0 \cdot (1 - x) + m_1 \cdot x \quad \text{при } m_0 = 0, m_1^{cyl} = 0,3996, m_1^{sph} = 0,3664$$

(параметры из таблицы 6 для кривых 8 на рис. 4 и 5 из [7],  $\tau_{dir} \equiv 0,25$ ), была применена процедура решения ИПОЗ для вдува при  $\tau_{inv} \in \{0,15; 0,20; \dots; 0,90\}$ . На рис. 3 и 4 представлены  $m^{\sim}$ , построенные по ТП и по НТ. При ограничении

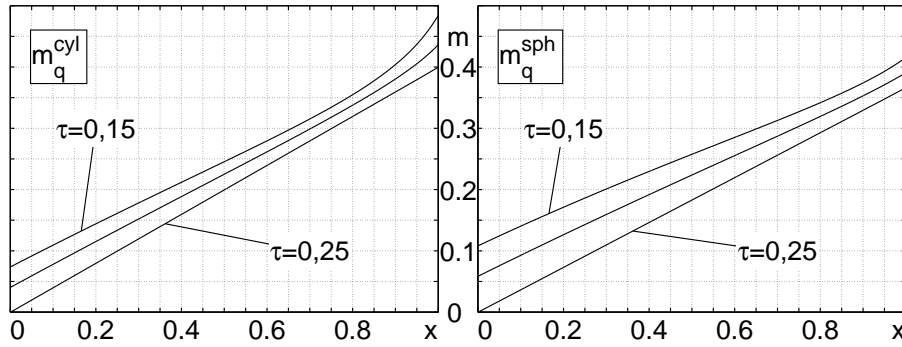


Рис. 3. Вдувы  $m^{\sim}$ , восстановленные по  $q^{\vee}$

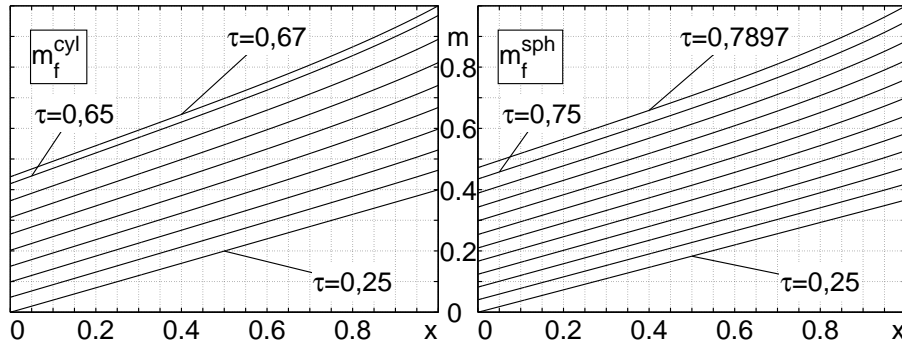


Рис. 4. Вдувы  $m^{\sim}$ , восстановленные по  $f^{\vee}$

$b_{j,0} = 0$  построение невозможно при  $\tau_{inv} > \tau_{inv}^* = 0,25$  для восстановления по ТП, а при  $\tau_{inv} < \tau_{inv}^* = 0,25$  – по НТ. Ограничение  $t_{j,0} = 1$  при построении по НТ достигается при  $\tau > \tau_{inv}^*$ , где  $\tau_{inv}^{*,cyl} = 0,67$  и  $\tau_{inv}^{*,sph} = 0,79$ .

В приведённых примерах рассмотрен случай обтекания боковой поверхности кругового цилиндра [8] и сферического носка [10] при  $s_{dir} \equiv 0$  и  $s_{inv} \equiv 0$ .

**5. Допустимые формы локальных тепловых потоков и напряжений трения.** Следует отметить различный характер чувствительности  $q$  и  $f$  к ступенчатому изменению управления  $m(x)$ . На рис. 5 и 6 приведены зависимости локальных ТП и НТ от координаты. Кривые соответствуют обобщающим

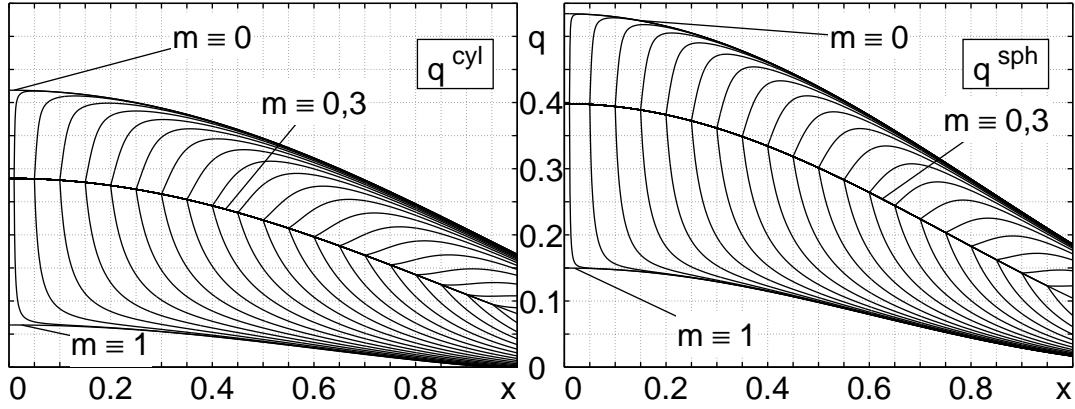


Рис. 5. Реакции локальных ТП  $q$  на ступенчатое изменение вдува

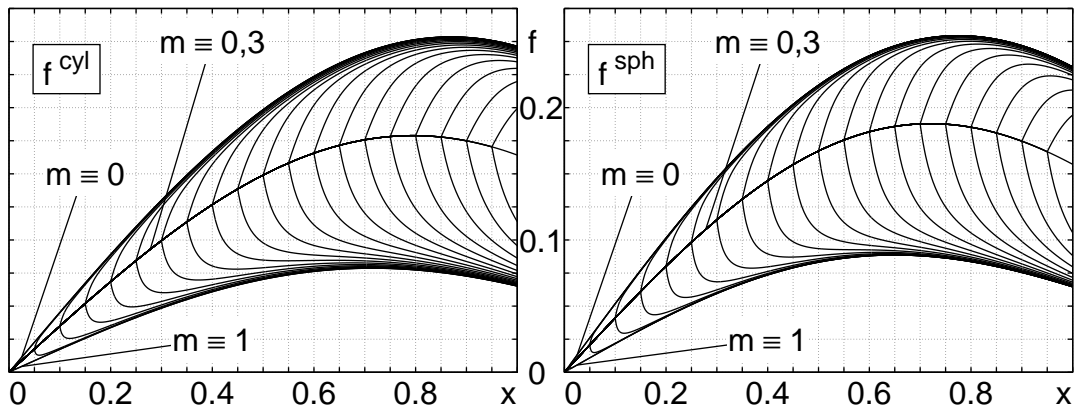


Рис. 6. Реакции локальных НТ  $f$  на ступенчатое изменение вдува

закон вдува «ступенька» (3) из [7] функциям

$$m(x; m_1, m_2, x_*) = \begin{cases} m_1 & \text{при } x \in [0; x_*); \\ m_2 & \text{при } x \in (x_*; 1], \end{cases}$$

где  $x_* \in \{0,01; 0,05; 0,10; \dots; 0,95\}$ ,  $m_1 \equiv 0,3$ ,  $m_2 \in \{0; 0,3; 1\}$ . Чувствительность  $q$  падает при приближении точки переключения  $x_*$  к 1, у  $f$  это менее заметно.

**6. Обратные по температурному фактору задачи теплообмена.** Аналогично п. 2 (сохраняем условия “1”–“3”) постановки) сформулируем ОЗ по управлению – ТФ  $\tau(x)$ . При непрерывном управлении  $m(x)$  и ограничениях  $I_{j,k}^\tau = [b_{j,k}^\tau; t_{j,k}^\tau]$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ ,  $k = 0, \dots, \nu_1^\tau$ ,  $\nu_1^\tau \geq 1$ , для «контрольных» значений локального ТП  $q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$  требуется **найти** непрерывно-дифференцируемое на  $X$  управление  $\tau^\sim$ , задаваемое [3] элементами  $\tau^\sim(x) = \tau_j^\sim(x)$  для  $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ , удовлетворяющими условиям

$$(\tau^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^\tau \quad \text{для } x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \quad k = 0, \dots, \nu_1^\tau, \quad (8)$$

такое, что вычисленные [4 – 6] на  $X_2$  значения  $q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}$ , где  $q_j^\sim = q(x_j^\vee; m, \tau^\sim, s)$ , должны быть *близкими* к  $q^\vee$ , т. е.

$$q^\vee \rightarrow \tau^\sim, \quad (m, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim), \quad (9)$$

где  $f^{\sim} = (f_j^{\sim})_{j=0,\dots,n_2}$ ,  $f_j^{\sim} = f(x_j^{\vee}; m, \tau^{\sim}, s)$ .

Для «контрольных»  $f^{\vee} = (f_j^{\vee})_{j=0,\dots,n_2}$  ОЗ по  $\tau$  имеет вид:

$$f^{\vee} \rightarrow \tau^{\sim}, \quad (m, \tau^{\sim}, s) \rightarrow (q^{\sim}, f^{\sim} \approx f^{\vee}). \quad (10)$$

Определения ИПОЗ и АПОЗ для (9) (или (10)), (8) аналогичны п.3.

**7. Двумерные обратные задачи тепломассообмена.** Аналогично п. 2 и п. 6 (сохраняем условия “1”–“3”) постановки) сформулируем ОЗ по паре управлений  $m$  и  $\tau$ . Для ограничений  $I_{j,k}^c = [b_{j,k}^c; t_{j,k}^c]$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ ,  $k = 0, \dots, \nu_1^c$ ,  $c \in \{m, \tau\}$ ,  $\nu_1^m \geq 0$ ,  $\nu_1^{\tau} \geq 1$ , для пар «контрольных» значений  $(q^{\vee}, f^{\vee}) = ((q_j^{\vee}, f_j^{\vee}))_{j=0,\dots,n_2}$  требуется **найти** пару управлений  $(m^{\sim}, \tau^{\sim})$ , удовлетворяющих условиям из п. 2 и п. 6, в частности, (1) и (8), таких, что вычисленные [4 – 6] на  $X_2$  пары  $(q^{\sim}, f^{\sim}) = ((q_j^{\sim}, f_j^{\sim}))_{j=0,\dots,n_2}$ , где  $q_j^{\sim} = q(x_j^{\vee}; m^{\sim}, \tau^{\sim}, s)$ ,  $f_j^{\sim} = f(x_j^{\vee}; m^{\sim}, \tau^{\sim}, s)$ , должны быть *близкими* к  $(q^{\vee}, f^{\vee})$ , т. е.

$$(q^{\vee}, f^{\vee}) \rightarrow (m^{\sim}, \tau^{\sim}), \quad (m^{\sim}, \tau^{\sim}, s) \rightarrow (q^{\sim} \approx q^{\vee}, f^{\sim} \approx f^{\vee}). \quad (11)$$

ИПОЗ и АПОЗ для (11), (1), (8) вводятся аналогично п. 3 с помощью

$$R_{\infty}((q^{\sim}, f^{\sim}); (q^{\vee}, f^{\vee})) = \max \{R_{\infty}(q^{\sim}; q^{\vee}), R_{\infty}(f^{\sim}; f^{\vee})\}, \quad (12)$$

$$R_p((q^{\sim}, f^{\sim}); (q^{\vee}, f^{\vee})) = (R_p^p(q^{\sim}; q^{\vee}) + R_p^p(f^{\sim}; f^{\vee}))^{1/p} \quad \text{при } p \in [1; +\infty). \quad (13)$$

В правых частях (12) и (13) используются (4) и (5).

Вопросы восстановления управлений в ГТ для двумерной ИПОЗ, аналогичные рассмотренным в [2], обсуждаются в продолжении [11] данной работы.

## Литература

- [1] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об одной обратной задаче тепломассообмена // “Герценовские чтения – 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” в электронном журнале “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. – 2016. – № 2. – Ч. 2. – С. 50–56.  
[http:// www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf]
- [2] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 5–12.
- [3] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016»: Материалы международной конференции (Воронеж, 25–31 января 2016 г.) – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2016. – С. 82–86.

- [4] Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 1. – С. 5–14.
- [5] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.
- [6] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.
- [7] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува. // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.
- [8] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. II. О некоторых вычислительных экспериментах // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 13–19.
- [9] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 3. – С. 5–11.
- [10] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. О некоторых вычислительных экспериментах в обратных задачах тепломассообмена // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы XI Междунар. конф. – Казань: Казанский ун-т, 2016. – С. 70–75.
- [11] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. О диффеоморфности пар управляющих воздействий и локальных параметров тепломассообмена в точке торможения гиперзвукового потока // «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017»: Материалы научной конференции, 10–14 апреля 2017 г. – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2017.



# О ДИФФЕОМОРФНОСТИ ПАР УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОМАССОБМЕНА В ТОЧКЕ ТОРМОЖЕНИЯ ГИПЕРЗВУКОВОГО ПОТОКА

Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет  
(КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева  
г. Казань  
e-mail: ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

**Bilchenko G. G., Bilchenko N. G. On the diffeomorphness of controls pairs and pairs of heat and mass transfer local parameters in the hypersonic flow stagnation point.** The conditions of heat and mass transfer local parameters and boundary layer parameters monotonous dependence on controls are given. The diffeomorphness conditions for controls pairs and pairs of heat and mass transfer local parameters are established. The computational experiments are presented: the domains of allowed values «heat-friction» are obtained.

**Keywords:** heat and mass transfer, hypersonic flows, laminar boundary layer, control, inverse problems, diffeomorphism, stagnation point, computational experiments.

Установлены условия монотонной зависимости параметров пограничного слоя и локальных параметров теплообмена от управляющих воздействий. Установлены условия диффеоморфности пар управляющих воздействий и пар локальных параметров теплообмена. Приведены результаты вычислительных экспериментов: построены области допустимых значений «тепло-трение».

**Ключевые слова:** теплообмен, гиперзвуковые течения, ламинарный пограничный слой, управление, обратные задачи, диффеоморфизм, точка торможения, вычислительные эксперименты.

В данной работе используются обозначения и сокращения из [1].

## 1. Об однозначной зависимости локальных параметров теплообмена от управляющих воздействий в точке торможения.

**1.1. Одномерный случай.** Уточним приведённые в работах [2, 3] утверждения о характере зависимости параметров ПС – функций  $\bar{\theta}_0(m_0, \tau_0, s_0)$ ,  $\bar{\theta}_1(\dots)$ ,  $\bar{\omega}_0(\dots)$ ,  $\bar{\omega}_1(\dots)$ , представляющих собой решения алгебраических систем (15) и (31) из [4], и параметров теплообмена (ТМО) – функции  $q_0 = \underline{q}(0; m_0, \tau_0, s_0)$ , определяющей значения локального ТП в ТТ, и функции  $\bar{f}_0 = \bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ , представляющей коэффициент [3] при значащей степени  $x$  локального НТ  $f(x; m, \tau, s)$ , от управляющих воздействий  $m_0, \tau_0, s_0$  в ТТ.

Пусть фиксированы значения *неизменяемых параметров*:

$$\text{число Маха} \quad M_\infty \in [10; 40], \quad (1)$$

$$\text{высота полёта} \quad H \in [10; 30] \text{ [км]}, \quad (2)$$

$$\text{радиус тела} \quad R \in [0,1; 1] \text{ [м]}, \quad (3)$$

а диапазоны изменения *управляющих параметров* в ГТ ограничены следующим образом:

$$m_0 = m(0) \in [0; 1], \quad (4)$$

$$\tau_0 = \tau(0) \in [0,15; 0,9], \quad (5)$$

$$s_0 = \sigma B_0^2(0) \in [0; 5 \cdot 10^4] [\text{Тл}/\text{Ом} \cdot \text{м}]. \quad (6)$$

Тогда для  $\bar{\theta}_0(m_0, \tau_0, s_0)$ ,  $\bar{\theta}_1(\dots)$ ,  $\bar{\omega}_0(\dots)$ ,  $\bar{\omega}_1(\dots)$ ,  $q_0(\dots)$ ,  $\bar{f}_0(\dots)$  установлены следующие свойства.

**Утверждение 1.** В условиях (1)–(6) для любого сочетания (фиксированных) значений  $\tau_0$ ,  $s_0$  функции  $\bar{\theta}_0$ ,  $\bar{\theta}_1$ ,  $\bar{\omega}_0$ ,  $\bar{\omega}_1$  строго монотонно возрастают, а функции  $q_0$ ,  $\bar{f}_0$  – строго монотонно убывают по  $m_0$ .

**Утверждение 2.** В условиях (1)–(6) для любого сочетания (фиксированных) значений  $m_0$ ,  $s_0$  функции  $\bar{\theta}_0$ ,  $\bar{\theta}_1$ ,  $\bar{\omega}_0$ ,  $\bar{\omega}_1$ ,  $q_0$  строго монотонно убывают, а функция  $\bar{f}_0$  – строго монотонно возрастает по  $\tau_0$ .

**Утверждение 3.** В условиях (1)–(6) для любого сочетания (фиксированных) значений  $m_0$ ,  $\tau_0$  функции  $\bar{\theta}_0$ ,  $\bar{\theta}_1$ ,  $\bar{\omega}_0$ ,  $\bar{\omega}_1$  строго монотонно возрастают, а функции  $q_0$ ,  $\bar{f}_0$  – строго монотонно убывают по  $s_0$ .

**1.2. Двумерный случай.** В указанных в п. 1.1 условиях установлено, что для пары  $(q_0, \bar{f}_0)$  верны следующее свойства.

**Утверждение 4.** В условиях (1)–(6) для любого (фиксированного) значения параметра  $s_0$  отображение  $(m_0, \tau_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  – диффеоморфизм.

**Утверждение 5.** В условиях (1)–(6) для любого (фиксированного) значения параметра  $\tau_0$  отображение  $(m_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  – диффеоморфизм.

**Утверждение 6.** В условиях (1)–(6) для любого (фиксированного) значения параметра  $m_0$  отображение  $(\tau_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  – диффеоморфизм.

## 2. Вычислительные эксперименты по построению областей допустимых значений «тепло – трение».

На рис. 1–6 в графическом виде в терминах пар «тепло – трение»  $(q_0, \bar{f}_0)$  представлены серии решений алгебраических систем (15) и (31) из [4]. Случаям обтекания боковой поверхности прямого кругового цилиндра соответствуют левые половинки рисунков, случаям обтекания поверхности сферического носка – правые. Расчёты проведены при  $M_\infty = 10$ ,  $H = 10$  км,  $R = 0,1$  м для удобства сравнения с результатами [2, 3, 5–7]. Размерность  $[\text{Тл}/\text{Ом} \cdot \text{м}]$  управляющего параметра  $s_0$  для краткости далее в тексте не приводится.

Обозначим  $M^c = [0; 1]$ ,  $T^c = [0; 0,999]$ ,  $S^c = [0; 5 \cdot 10^4]$ ,  $M_{05}^d = \{0; 0,05; \dots; 1\}$ ,  $M_{25}^d = \{0; 0,25; \dots; 1\}$ ,  $T_{05}^d = \{0; 0,05; \dots; 0,95\}$ ,  $T_{15}^d = \{0; 0,15; \dots; 0,9\}$ ,  $S_{25}^d = \{0; 25 \cdot 10^3; 50 \cdot 10^3\}$ .

На рис. 1 МП отсутствует, сетка образована семействами линий

$$\{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid m_0 \in M^c \} \mid \tau_0 \in T_{05}^d, s_0 = 0 \} ,$$

$$\{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid \tau_0 \in T^c \} \mid m_0 \in M_{05}^d, s_0 = 0 \} .$$

Отметим, что, изменяя шаг сетки и размер изображения, рис. 1 можно использовать в инженерной практике в качестве номограмм.

На рис. 2 представлены три семейства линий, соответствующих сочетаниям варьируемых параметров:

$$M = \{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid m_0 \in M^c \} \mid \tau_0 \in T_{15}^d, s_0 \in S_{25}^d \} ,$$

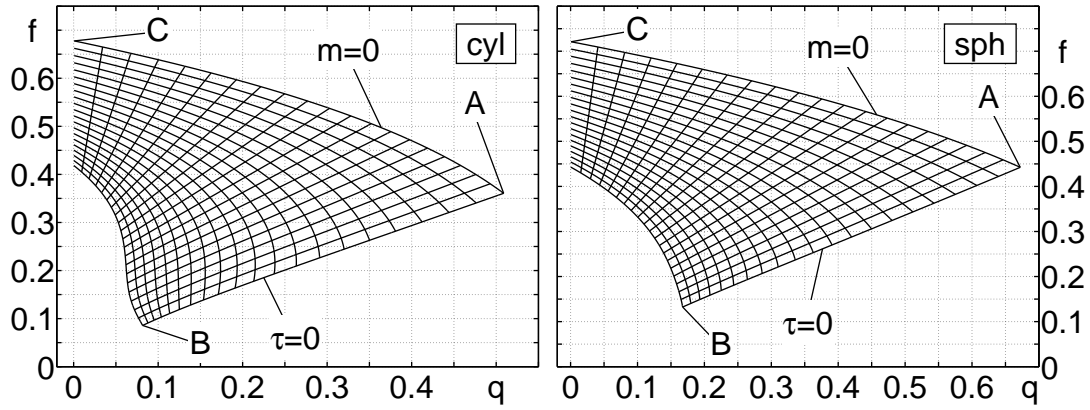


Рис. 1. Область допустимых значений  $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$  для  $s_0 = 0$

$$T = \{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid \tau_0 \in T^c \} \mid m_0 \in M_{25}^d, s_0 \in S_{25}^d \} ,$$

$$S = \{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid s_0 \in S^c \} \mid m_0 \in M_{25}^d, \tau_0 \in T_{15}^d \} ,$$

и отмечены точки  $A, B, C, D$  (сочетания значений параметров, характеризующие их, указаны в скобках):

$$A : (m_0 = 0, \tau_0 = 0, s_0 = 0) , \quad B : (m_0 = 1, \tau_0 = 0, s_0 = 0) ,$$

$$C : (m_0 = 0, \tau_0 = 0,999, s_0 = 0) , \quad D : (m_0 = 0, \tau_0 = 0, s_0 = 5 \cdot 10^4) .$$

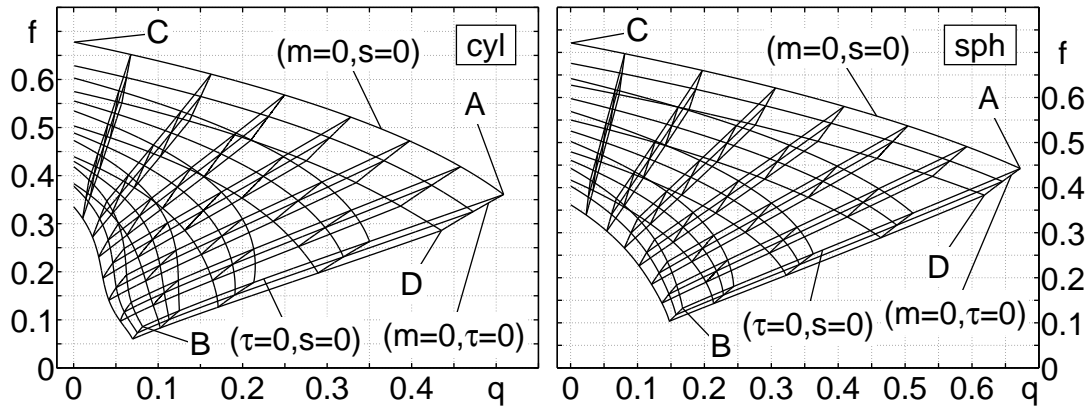


Рис. 2. Три семейства линий

Рис. 3 демонстрирует влияние МП  $s_0$ : приведены линии семейств  $M$  и  $T$ . Таким способом визуализировано содержание утверждения 3 об одновременном уменьшении параметров  $(q_0, \bar{f}_0)$  при увеличении МП. Также визуализируется утверждение 4 о диффеоморфизме  $(m_0, \tau_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  при фиксировании параметра  $s_0$ .

Рис. 4 демонстрирует влияние ТФ  $\tau_0$ : приведены линии семейств  $M$  и  $S$ . Таким способом визуализировано содержание утверждения 2 об уменьшении

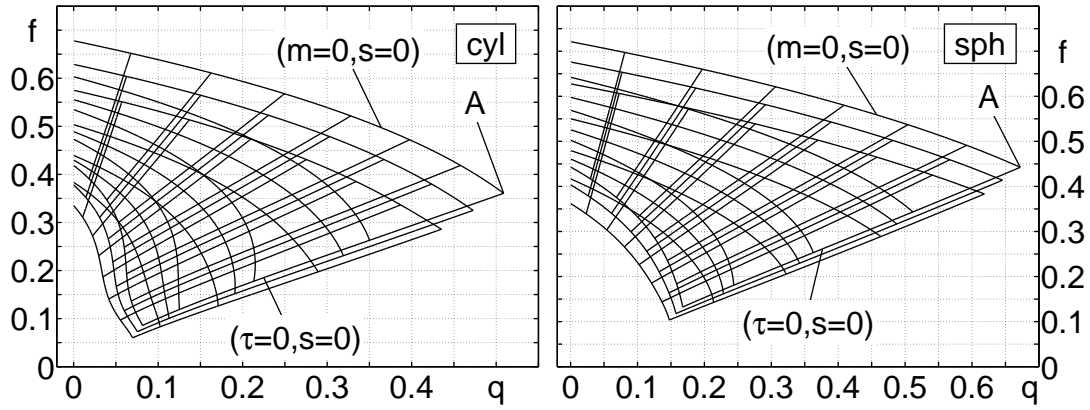


Рис. 3. Области допустимых значений  $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$  для  $s_0 \in S_{25}^d$

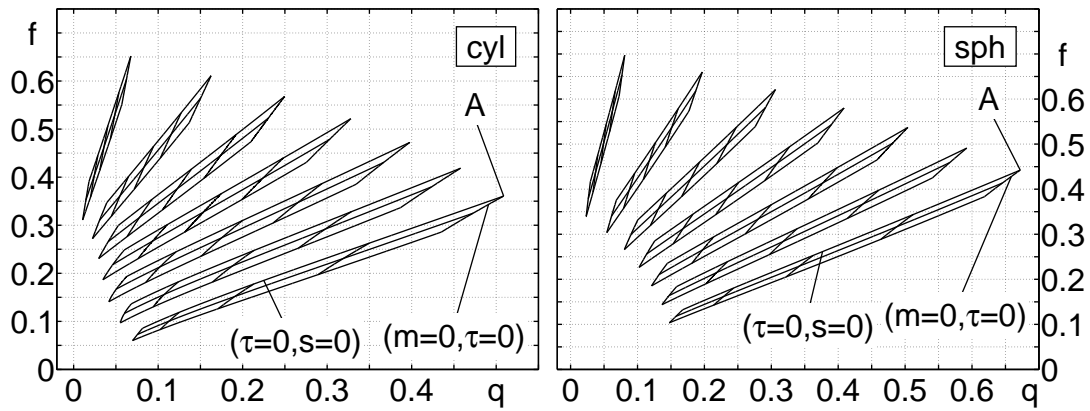


Рис. 4. Области допустимых значений  $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$  для  $\tau_0 \in T_{15}^d$

$q_0$  и увеличении  $\bar{f}_0$  при увеличении ТФ. Также визуализируется утверждение 5 о диффеоморфизме  $(m_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  при фиксировании параметра  $\tau_0$ .

Рис. 5 демонстрирует влияние вдува  $m_0$ : приведены линии семейств  $T$  и  $S$ . Таким способом визуализировано содержание утверждения 1 об одновременном уменьшении параметров  $(q_0, \bar{f}_0)$  при увеличении вдува. Также визуализируется утверждение 6 о диффеоморфизме  $(\tau_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  при фиксировании параметра  $m_0$ .

Рис. 6 иллюстрирует различие областей  $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$  при учёте и без учёта эффекта диссоциации. Приведены линии семейств  $M$  и  $T$  без МП ( $s_0 = 0$ ). Влияние эффекта диссоциации воздуха (начиная с  $M_\infty = 6$ , таблица 1 в [4]) проявляется в существенном увеличении значений параметров ТМО в ТТ по сравнению с рассчитанными по модели совершенного газа, что подтверждает выводы, сделанные ранее в [5, 6] в отношении локальных ТП.

**Выводы.** 1) Установлен вид области  $\Omega$  допустимых значений  $(q_0, \bar{f}_0)$ , позволяющий дать ответ на вопрос о реализуемости пары параметров ТМО в ТТ в зависимости от возможного диапазона управляющих воздействий.

2) Изменяя шаг сетки и размер изображения, рис. 1 можно использовать в инженерной практике как номограммы.

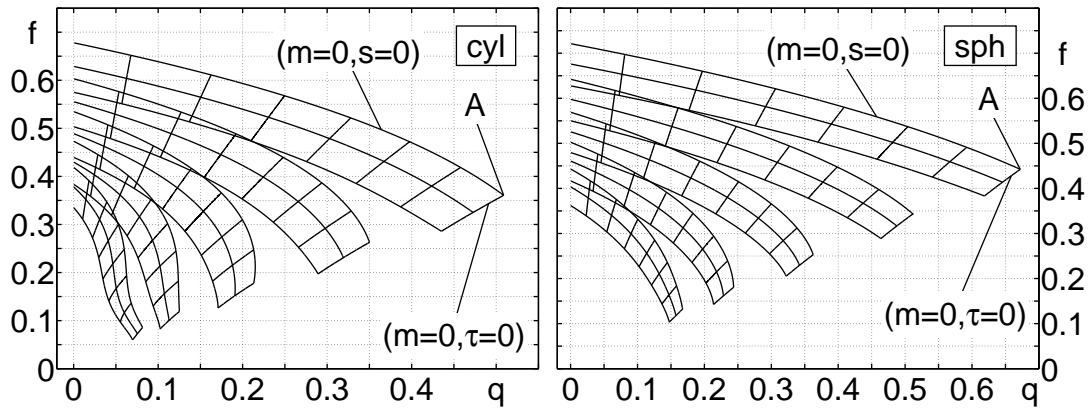


Рис. 5. Области допустимых значений  $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$  для  $m_0 \in M_{25}^d$

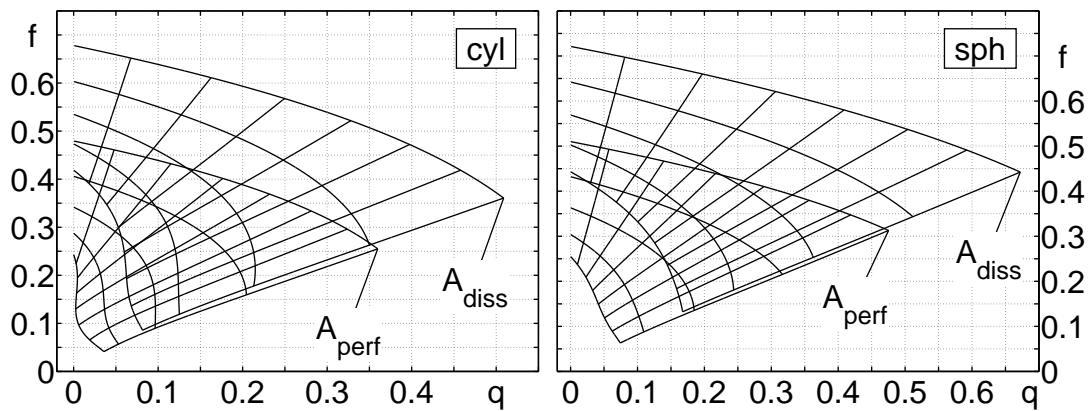


Рис. 6. Влияние эффекта диссоциации на область  $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$

3) Из биективного характера соответствия  $(m_0, \tau_0) \leftrightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  пар управлений и пар параметров ТМО следует, что попадание пары  $(q_0, \bar{f}_0)$  в допустимую область достаточно для построения начальной части решения двумерной ОЗ ТМО [1] в интерполяционной [1, 3, 8] постановке.

4) Подтверждён вывод о необходимости учёта эффекта диссоциации как при расчёте локальных ТП [5, 6], так и при расчёте локальных НТ.

Полученный в результате вычислительных экспериментов материал может быть использован для сравнения с данными натурных и стендовых испытаний.

## Литература

- [1] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Одномерные и двумерные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2017»: Материалы научной конференции, 10–14 апреля 2017 г. — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2017.

- [2] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа // Вестник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 3. — С. 5–11.
- [3] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления // Вестник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 4. — С. 5–12.
- [4] Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа // Вестник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.
- [5] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.
- [6] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.
- [7] Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.
- [8] Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об одной обратной задаче тепломассообмена // “Герценовские чтения 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” в эл. журнале “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. — 2016. — № 2. — Ч. 2. — С. 50–56. [<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf>]

## К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ KORTEWEG–de VRIES

Волосова Н. К., Вакуленко С. П., Волосова А. К., Волосов К. А.

Московский государственный университет путей сообщения

Москва

e-mail: konstantinvolosov@yandex.ru

**Volosova N. K., Vakulenko S. P., Volosova A. K., Volosov K. A. For the theory equation Korteweg–de Vries.** We used “relatively new” method of “floating a constructive change of variables” for dynamic systems for the nonlinear partial differential Korteweg–de Vries (PD KdV) equation. The necessary condition for the stability of the phase pathes and the condition of reducing the volume of the phase flow was formulate. Two necessary solvability conditions of the a system PD of first order has one common non-trivial factor was proved. Nonlinear PD KdV equation has as new feature was found that: “There are a change of variables in that equation for the function for first derivative  $Y(\xi, \delta)$  *separated* from all another equations”. The investigation

dynamic systems in surrounding of the fixed points, allows you to find the “right” of the equation, that coincide with the equations in a general case.

**Keywords:** “separated” equation for the function for first derivative of Korteweg–de Vries equation, method of “floating a constructive change of variables”.

Построены динамические системы для уравнения Кортевега – де Вриза (КдВ), используя «относительно новый» метод нефиксированной конструктивной замены переменных (НФКЗП). Сформулированы необходимым условием устойчивости фазовых траекторий и условие уменьшения объема фазового потока. Доказано, что два необходимых условия разрешимости системы дифференциальных уравнений с частными производными (ДУсЧП) первого порядка имеет один общий нетривиальный множитель. Обнаружено, что уравнение КдВ имеет новое свойство: «Существует замена переменных в которых уравнение для функции первой производной “отделяется” от всех других. Указан путь построения новых решений КдВ». Исследование динамических систем в окрестности неподвижных точек, позволяет найти “правильные” уравнения, которые совпадают с уравнениями полученными в общем случае. Построены асимптотические решения по малому параметру в окрестности вырожденных точных решений в комбинации с методом НФКЗП.

**Ключевые слова:** “отделяется” уравнение для первой производной теории Кортевега–де Вриза, метод “нефиксированной конструктивной замены переменных” (НФКЗП).

**1. Введение.** В работе [1] рассматриваются математические модели предложенные Рэлеем и Лявом, Бишопом, Миндлиным и Германом для стержней и пластин. Там же показано, что в определённых условиях, для описания продольных волн в стержнях применимо нелинейное уравнение с частными производными (НУсЧП) третьего порядка Кортевега–де Вриза (КдВ). В книге [1] также проведен обзор работ по нелинейным волнам в стержнях, пластинах и оболочках и проведен подробный анализ различных нелинейных осцилляторов. Свойства и некоторые методы (точные решения, метод преобразований Бэклунда, метод обратной задачи рассеяния и т. д.) построения решений различных вариантов нелинейных уравнений КдВ накоплены в статьях многих авторов. Они приведены, например, в [2, 9, 10, 11, 12]. Все эти материалы можно сравнить с результатами данной работы.

Идея метода “нефиксированной конструктивной замены переменных” (НФКЗП), впервые высказана в работе [3], а затем метод развит в работах [4–6] и защищён в диссертации [7]. Метод применялся к задачам, связанным с нестационарными квазилинейными параболическими уравнениями с одной пространственной переменной, но метод можно применять и для задач с несколькими пространственными переменными. Для демонстрации его возможностей в [7] приведено решение нестационарной задачи оптимального управления с двумя пространственными переменными связанной с уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана. Более упрощённые результаты этих исследований опубликованы в [8].

**Замечание 1.** Отметим, что идея о том, что в качестве независимой переменной можно, в определенных условиях, использовать искомую функцию, восходит к диссертации Чаплыгина С. А. 1902 г. и к более доступной его работе [16], где он ввёл определение “плоскости годографа”. Таким образом, строится решение в “параметрической форме”.

Интерес к задачам связанным с уравнением КдВ в школе академика отделения математики Академии Наук СССР и РАН В. П. Маслова появился

давно [9–10]. Здесь приведены ссылки только на несколько работ по этой тематике. Строились асимптотические решения по малому параметру и точные решения методом Хироты, Сатсумы. Так на стр. 181 в [9] (с. 51 в [10]) построен рациональный солитон классического КдВ и его двух солитонное решение.

**2. Постановка задачи.** В данной работе метод (НФКЗП) впервые применяется к нелинейным задачам для уравнений КдВ

$$\frac{\partial Z(x, t)}{\partial t} + Z^n \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

В литературе существует другая форма записи этого уравнения, но она, а также результаты, полученные для задач связанных с ним, могут быть получены нормировкой времени.

**Замечание 2.** Из цитируемых работ известно, что на группе преобразований сдвига  $Z(x, t) = y(\theta)$  с инвариантом  $\theta = x - Vt$ , следует ОДУ. Случай  $n = 1$  (слабая дисперсия) соответствует классическому КдВ, а  $n = 2$  (сильная дисперсия) соответствует модифицированному КдВ ([2], стр. 21). Первый интеграл, описывает колебания ангармонического нелинейного осциллятора.  $y''(\theta) = -y^{n+1}(\theta)/(\beta(n+1)) + Vy(\theta)/\beta - C_1/\beta$ ,  $C_1 = \text{const}$ . Порядок уравнения понижается, это означает, что уравнение колебаний “отделяется” от всех других переменных, т. е. зависит только от функции  $y(\theta)$ . В случае вырождения, наличия одной переменной, такой вывод является тривиальным. Умножим уравнение колебаний на производную  $y'(\theta)$ . Интегрируя уравнение колебаний, получим  $(y'(\theta))^2 = E - 2y(\theta)^{n+2}/(\beta(n+1)(n+2) + Vy^2(\theta)/\beta - C_1y(\theta)/\beta$ , где, как известно, константа интегрирования  $E$  имеет смысл начальной энергии, а остальные слагаемые в правой части имеют смысл потенциальной энергии со знаком минус.

Наличие группы преобразований позволяет в данном случае понизить порядок уравнения. Полученное ОДУ “отделяется”, т. е. связывает первую производную и искомую функцию. Но существует и другой вариант проявления свойств симметрии, в котором порядок уравнения ДУсЧП не понижается, а ДУсЧП на первую производную и искомую функцию “отделяется” от всех других. Исходное уравнение КдВ (1) в этом случае тоже имеет точное решение и это описано в данной работе.

**Замечание 3.** Возможность получить новую информацию о строении спектра колебаний в диспергирующих сплошных средах позволяет применение относительно нового метода “нефиксированной конструктивной замены переменных” (НФКЗП), который впервые применяется к нелинейным задачам, связанными уравнениями КдВ. Этот метод позволяет найти такие переменные, в которых нелинейное уравнение записывается как система линейных алгебраических функциональных уравнений (СЛАФУ), и это дает возможность, во-первых, построить новые точные или приближенные решения, во-вторых, построить две динамические системы, исследовать вопросы устойчивости и т. п.

**Основные цели данной работы:** – указать новые свойства уравнения Кортевега–де Вриза, новый путь построения решений, изучить возможные виды волн и колебаний в случае, когда главным фактором является дисперсия, и которые играют большую роль в расчетах по анализу сложных спектров колебаний, и указать новые подходы к изучению устойчивости решений;



– показать всем заинтересованным лицам пример применения и возможности исследования нелинейных задач методом НФКЗП.

**3. Новый путь анализа решений уравнения (1).** Предположим, что все функции трижды непрерывно дифференцируемые по всем переменным. Сделаем произвольную замену переменных

$$Z(x, t) \Big|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = U(\xi, \delta). \quad (2)$$

Обратная замена восстанавливает решение  $Z(x, t)$  уравнения (1) по функции  $U(\xi, \delta)$ , хотя бы локально:

$$Z(x, t) = U(\xi, \delta) \Big|_{\xi=\xi(x, t), \delta=\delta(x, t)}. \quad (3)$$

Предположим, что якобиан – определитель матрицы Якоби

$$J = \begin{pmatrix} x'_\xi & t'_\xi \\ x'_\delta & t'_\delta \end{pmatrix}.$$

не равен нулю и бесконечности. Тогда хотя бы локально, существует обратное преобразование  $\xi = \xi(x, t)$ ,  $\delta = \delta(x, t)$ . Обратная матрица Якоби имеет вид

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \xi'_x(x, t) & \delta'_x(x, t) \\ \xi'_t(x, t) & \delta'_t(x, t) \end{pmatrix}.$$

Должно быть выполнено равенство  $JJ^{-1} = E$ . При этом существуют формулы пересчёта производных старых переменных  $x, t$  по новым переменным  $\xi, \delta$ :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \det J \frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = -\det J \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial \delta} = -\det J \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = \det J \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4)$$

Введём обозначения (установим дифференциальные связи):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} \Big|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} &= Y(\xi, \delta), & \frac{\partial Z}{\partial t} \Big|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} &= T(\xi, \delta), \\ \frac{\partial Y(\xi(x, t), \delta(x, t))}{\partial x} \Big|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} &= M(\xi, \delta). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя (4), (5) получим:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial x}{\partial \xi} = -T(\xi, \delta)(x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta). \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} = Y(\xi, \delta)(x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta), \quad (7)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} = (x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta)M(\xi, \delta). \quad (8)$$

Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial M}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} = -(T + U^n Y(\xi, \delta))(x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta). \quad (9)$$

С необходимостью должно быть выполнено соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} Z'_x = \frac{\partial}{\partial x} Z'_t \quad (10)$$

в переменных  $\xi, \delta$ . Это соотношение, с учетом равенства (3),(4), можно записать в виде

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \delta} + \frac{\partial t}{\partial \delta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \delta} = 0. \quad (11)$$

Система (6),(7),(9),(11) имеет единственное нетривиальное решение относительно производных старых переменных по новым. Этот факт лежит в основе метода НФКЗП. Громоздкие правые части, вычисленные ниже, для краткости, обозначим через:

$$x'_\xi = z_1(\xi, \delta), \quad x'_\delta = z_2(\xi, \delta), \quad t'_\xi = z_3(\xi, \delta), \quad t'_\delta = z_4(\xi, \delta). \quad (12)$$

Введем обозначения, для краткости записи системы (6)-(11)

$$\begin{aligned} a_{12} = -U'_\xi = -a_{24}, \quad a_{11} = U'_\delta = -a_{23}, \quad a_{32} = -Y'_\xi = -a_{44}, \quad a_{43} = -Y'_\delta = -a_{31}, \\ a_{53} = -M'_\delta, \quad a_{54} = M'_\xi, \quad a_{33} = T'_\delta, \quad a_{34} = -T'_\xi, \quad T_1 = T + U^n Y. \end{aligned} \quad (13)$$

**Теорема 1.** Пусть имеем систему функциональных алгебраических уравнений (СФАУ) (6),(7), (9), (11). Тогда указанная система уравнений является **линейной** (СФЛАУ) и существует единственное нетривиальное решение системы четырёх уравнений (6),(7), (9), (11). Оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} = (a_{32}(a_{12}a_{53} - a_{11}a_{54})\beta T + a_{12}((a_{11}a_{34} - a_{12}a_{33})T_1 + \\ + (a_{54}a_{33} - a_{53}a_{34})\beta Y))/\Psi_0 = z_1(\xi, \delta), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 = T((a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})T_1 + (a_{31}a_{54} - a_{32}a_{53})\beta Y) + \\ Y((a_{12}a_{33} - a_{11}a_{34})T_1 + (a_{53}a_{34} - a_{54}a_{33})\beta Y), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \delta} = (a_{31}(a_{11}a_{54} - a_{12}a_{53})\beta T + a_{11}((a_{12}a_{34} - a_{11}a_{33})T_1 + \\ + (a_{53}a_{33} - a_{54}a_{34})\beta Y))/\Psi_0 = z_2(\xi, \delta), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = ((a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{12}T_1 - a_{54}\beta Y))/\Psi_0 = z_3(\xi, \delta), \quad (17)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = ((a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}T_1 - a_{53}\beta Y))/\Psi_0 = z_4(\xi, \delta), \quad (18)$$

Якобиан имеет вид

$$\det J = (\beta(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})(a_{12}a_{53} - a_{11}a_{54}))/\Psi_0 = g(\xi, \delta), \quad (19)$$

Функция  $M(\xi, \delta)$  вычислена из (8)

$$M(\xi, \delta) = (a_{44}z_4(\xi, \delta) + a_{43}z_3(\xi, \delta))/g(\xi, \delta). \quad (20)$$

*Доказательство.* Система (6), (7), (9), (11) выглядит **сложной, нелинейной**, однако, на самом деле, как доказано в данной теореме, она является системой **линейных** функциональных алгебраических уравнений (СФЛАУ). В работах [4–7] для аналогичной СЛАФУ для квазилинейных параболических уравнений доказано, что существует единственное нетривиальное решение, которое построено также в явной форме. Следуем основному, указанному в этих работах алгоритму. Решение системы (6), (7), (9), (11) строится сначала в соответствии с известным методом Гаусса решения СЛАУ. Из трёх уравнений (6), (7), (9), после исключения якобиана с помощью элементарных преобразований, следуют два линейных уравнения. Уравнение (11) является линейным. Выражаем любые три производные старых переменных по новым (12) через четвертую. Подставляем полученные соотношения в оставшееся уравнение и здесь нас ожидает сюрприз: итоговое уравнение оказывается **линейным!** Тогда получим (14)–(17). Далее вычисляем (18), (19) ■

Если рассматривать (14)–(17) как систему ДУсЧП первого порядка, то с необходимостью должно быть выполнено хорошо известное условие разрешимости, а именно, равенство вторых смешанных производных, которое рассмотрим подробно ниже, в разделе 6.

**Теорема 2.** Пусть дано уравнение КдВ (1) и формулы замены переменных (2)–(5). Тогда уравнение КдВ (1) эквивалентно СФЛАУ

$$a_{11} \frac{\partial x}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial x}{\partial \delta} = T(\xi, \delta)g(\xi, \delta), \quad (20)$$

$$a_{23} \frac{\partial t}{\partial \xi} + a_{24} \frac{\partial t}{\partial \delta} = Y(\xi, \delta)g(\xi, \delta), \quad (21)$$

$$a_{31} \frac{\partial x}{\partial \xi} + a_{32} \frac{\partial x}{\partial \delta} + a_{33} \frac{\partial t}{\partial \xi} + a_{34} \frac{\partial t}{\partial \delta} = 0, \quad (22)$$

$$a_{53} \frac{\partial t}{\partial \xi} + a_{54} \frac{\partial x}{\partial \delta} = -T_1(\xi, \delta)g(\xi, \delta), \quad (23)$$

и уравнению (19). Решение линейной системы СФЛАУ (20)–(23) имеет вид (14)–(17).

*Доказательство.* Подставим вычисленное выше значение якобиана (18) в правую часть (6), (7), (9), (11) и получим СФЛАУ (20)–(23) ■

**Теорема 3.** Пусть даны выражения (14)–(17). Тогда имеем первую нелинейную динамическую систему состоящую из (14), (16) и соответствующую ей матрицу Якоби с определителем  $\det J_1$  и вторую нелинейную динамическую систему состоящую из (15), (17) и вторую соответствующую ей матрицу Якоби с определителем  $\det J_2$ .

**Схема доказательства.** Переменные можно трактовать как новое “время, параметр” вдоль траекторий динамической системы. Используя теорию динамических систем можно провести исследование на устойчивость конкретное решение.

**4. Анализ свойств основного якобиана (18).** Заметим, скобки разности произведения производных функции одинаковых переменных, в выражениях якобиана (18),  $\Psi_0$  (14) симметричные и поэтому они обращаются в нуль, а следовательно и основной якобиан (18) равен нулю или бесконечности в следующих ситуациях:

**а.** На группах преобразования “сдвига” с инвариантом  $\zeta = v \xi + \delta$ , т. е. функции  $U(\zeta)$ ,  $Y(\zeta)$ ,  $T(\zeta)$ ,  $M(\zeta)$  зависят от одного аргумента. Этому вырождению (вместо двух переменных имеем одну переменную) соответствует широко известное решение уравнения (1). См., например, с. 142 в книге [2]. См. также работы [11, 12, 15].

**б.** На функциях  $Y(U(\xi, \delta))$ ,  $T(U(\xi, \delta))$ ,  $M(U(\xi, \delta))$  зависящих от одного аргумента, когда основной якобиан обращается в нуль или бесконечность, и методом НФКЗП точное решение построить нельзя. Можно построить асимптотическое решение по малому параметру в окрестности точных, вырожденных (зависящих от одной независимой переменной) решений уравнения КдВ, перечисленных в цитируемой литературе (см. раздел 10).

**Замечание 4.** В многих случаях описанных в работах [2, 11, 12] ОДУ сводятся к уравнениям Пенлеве, которые обладают “свойством Пенлеве”, а именно, общее решение уравнение не имеет критических подвижных особых точек. Если уравнение не имеет свойства Пенлеве и не существует замены, которая приводит исходное уравнение к уравнению, которое, в преобразованном виде уже, имеет свойство Пенлеве, то решение данного уравнения в аналитическом “точном” виде едва ли может быть найдено (см. работу [12] с. 87).

**5. Исследование устойчивости на основе теории динамических систем.**

**а.** Рассмотрим первую динамическую систему (14), (16). Теория динамических систем указывает, что важно исследовать уравнение в окрестности неподвижной точки. Рассмотрим, в качестве примера, одну из неподвижных точек. В числителе (16) имеет место два сомножителя. Первую скобку нельзя приравнять нулю. Если она равна нулю, то обращается в нуль и основной якобиан (18). Поэтому выберем вторую скобку в (16) и приравниваем её к нулю, тогда основной якобиан не равен нулю. Получим

$$M'_\xi(\xi, \delta) = -U'_\xi(\xi, \delta)T_1/(\beta Y). \quad (24)$$

После подстановки в (19) и упрощений получим

$$M(\xi, \delta) = Y'_\xi Y/U'_\xi(\xi, \delta). \quad (25)$$

Дифференцируем (25) и приравнивая к (24) с учётом (13) получим

$$T(\xi, \delta) = -U^n Y - \beta(Y'_\xi)^2 Y/(U'_\xi)^2 - \beta Y^2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (Y'_\xi/U'_\xi) \right) / U'_\xi. \quad (26)$$

Далее вычисляем элементы матрицы Якоби  $J_1$  и вычисляем определитель  $\det J_1$ , собственные числа и след этой матрицы, которые, как известно, являются критериями в теоремах устанавливающих устойчивость. То, что якобиан динамической системы (14), (16) и одно из собственных чисел обращаются в

нуль в неподвижной точке (24), говорит о имеющейся в этом случае сложной особой точки.

**б.** Рассмотрим вторую динамическую систему (15), (17). Проведем рассуждения аналогичные первому случаю **а**. Найдем неподвижную точку. Выберем вторую скобку в (17) и приравняем её нулю. Получим

$$M'_\delta(\xi, \delta) = -U'_\delta(\xi, \delta)T_1/(\beta Y). \quad (27)$$

После подстановки в (19) и упрощений получим

$$M(\xi, \delta) = Y'_\delta Y/U'_\delta(\xi, \delta). \quad (28)$$

Дифференцируем (28) и приравнявая к (27) с учётом (13) получим

$$T(\xi, \delta) = -U^n Y - \beta(Y'_\delta)^2 Y/(U'_\delta)^2 - \beta Y^2 \left( \frac{\partial}{\partial \delta} (Y'_\delta/U'_\delta) \right) / U'_\delta. \quad (29)$$

Вычисляем элементы матрицы Якоби  $J_2$  (25) и вычисляем определитель  $\det J_2$ . То, что якобиан динамической системы (15), (17) и одно из собственных чисел обращаются в нуль и это говорит также о том, что имеется и в этом случае сложная особая точка.

**Теорема 4.** Пусть даны две динамических систем (14), (16) и (15), (17). Тогда необходимым условием устойчивости фазовых траекторий и уменьшением объема фазового потока являются неравенства  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_3 < 0$ .

**Комментарий к доказательству.** Отметим, что выражения (24)–(26) и (27)–(29) симметричны относительно замены местами переменных  $\xi$ ,  $\delta$ . Заметим, что структура выражений (26), (29) в пунктах “**а**” и “**б**”, описанных в разделе 5, совпадают. Само доказательство фактически приведено выше, а теорема 4 является стандартной в теории динамических систем. Большое количество работ по этой тематике можно найти в списке литературы работы [11]. Под данным углом зрения КдВ никто ранее не рассматривал.

**6. Свойство условий разрешимости системы (14)–(17).** Рассмотрим систему (14)–(17). Хорошо известно, что необходимым условием разрешимости системы такого вида является вычисление с помощью (12) вторых смешанных производных функций  $x = x(\xi, \delta)$ ,  $t = t(\xi, \delta)$  по аргументам  $\xi$ ,  $\delta$  и равенством полученных выражений друг другу

$$\frac{\partial^2 x(\xi, \delta)}{\partial \xi \partial \delta} = \frac{\partial^2 x(\xi, \delta)}{\partial \delta \partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 t(\xi, \delta)}{\partial \xi \partial \delta} = \frac{\partial^2 t(\xi, \delta)}{\partial \delta \partial \xi}. \quad (30)$$

Таким образом, формально возникает два условия разрешимости системы (14)–(17). Приведем один из основных, важных результатов данной работы.

**Теорема 5.** Пусть дана система (14)–(17). Тогда:

**а.** В двух уравнениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1(\xi, \delta)}{\partial \delta} - \frac{\partial z_2(\xi, \delta)}{\partial \xi} &= TQ(\xi, \delta) = 0, \\ \frac{\partial z_3(\xi, \delta)}{\partial \delta} - \frac{\partial z_4(\xi, \delta)}{\partial \xi} &= Y(\Psi_0)^2 Q(\xi, \delta) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

существует нетривиальный общий множитель  $Q(\xi, \delta)$  для любой функции  $M(\xi, \delta)$ .

**б.** Два условия разрешимости (31) сводятся к одному соотношению общему множителю

$$Q(\xi, \delta) = 0, \quad (32)$$

для любой функции  $M(\xi, \delta)$ , где  $z_i(\xi, \delta)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  определены правыми частями формул (14)–(17).

**Следствие.** Если какой-то набор функций  $U, Y, T$  для любой функций  $M$  (не обращаясь, на данном шаге, к удовлетворению соотношению (19)), то СДУсЧП (14)–(17) разрешима. Теоремы 1–5 позволяют конструировать новые решения уравнения (1) в “параметрической форме” (см. замечания 1, 2).

**Комментарий к доказательству.**

**Замечание 5.** В цикле работ [4–7] доказано, что аналогичная теорема имеет место для нелинейных параболических уравнений. В теореме 5 описано общее свойство метода НФКЗП, которое лишь несколько изменяется при изменении нелинейности исходного уравнения (1). Доказательство проводится непосредственными вычислениями.

**7. Исследование решений уравнения КдВ в окрестности неподвижной точки (27).** В качестве примера рассмотрим неподвижную точку в разделе 5b (27).

**Теорема 6.** Пусть дана СФЛАУ (20)–(23) и её решение (14)–(17) и определены выражения якобиана (18) и функцией (19).

**а.** Тогда существуют следующие соотношения

$$t(\xi, \delta) = \xi, \quad M'_\delta(\xi, \delta) = -U'_\delta(\xi, \delta)T_1/(\beta Y), \quad M(\xi, \delta) = Y'_\delta(\xi, \delta)Y/U'_\delta(\xi, \delta), \quad (33)$$

$T_1 = T + U^n Y$  и выражение для функции  $T(\xi, \delta)$ :

$$\begin{aligned} T(\xi, \delta) &= -U^n Y - \beta(Y'_\delta)^2 Y / (U'_\delta)^2 - \beta Y^2 \frac{\partial}{\partial \delta} (Y'_\delta / U'_\delta) / U'_\delta = \\ &= -U^n Y - \beta Y \frac{\partial}{\partial \delta} (Y Y'_\delta / U'_\delta) / U'_\delta. \end{aligned} \quad (34)$$

Якобиан (18) имеет вид  $\det J = -U'_\delta / Y$ , решение СФЛАУ (20)–(23) записано в (14)–(17), а после упрощений примет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = (Y T'_\delta U'_\xi - T U'_\delta Y'_\xi) / (Y (Y T'_\delta - T Y'_\delta)) = z_1(\xi, \delta), \quad (35)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = U'_\delta / Y = z_2(\xi, \delta), \quad (36)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = (Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi) / (T Y'_\delta - T'_\delta Y) = z_3(\xi, \delta) = \mathbf{1}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = z_4(\xi, \delta) = \mathbf{0}, \quad (38)$$

Общий множитель в необходимых условиях разрешимости (32) принимает вид ЛДУсЧП

$$T'_\delta - T(\xi, \delta)Y'_\delta / Y + (Y'_\delta U'_\xi) / Y - (Y'_\xi U'_\delta) / Y = 0. \quad (39)$$

**б.** Тогда уравнение (39) обеспечивает выполнение равенства (37) и как следствие, *отделяется* ДУсЧП третьего порядка, связывающее только функции  $Y(\xi, \delta)$ ,  $U(\xi, \delta)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \int (Y'_\delta U'_\xi) / (Y^2) d\delta - \int (Y'_\xi U'_\delta) / (Y^2) d\delta + C_0(\xi) \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial \delta} \left( U^n(\xi, \delta) + \beta \frac{\partial}{\partial \delta} (Y Y'_\delta / (U'_\delta)) / (U'_\delta) \right), \quad (40) \end{aligned}$$

**Комментарий к доказательству.**

**Замечание 6.**

**а.** В окрестности неподвижной точки роль исходного времени играет переменная  $t(\xi, \delta) = \xi$ .

**б.** Важно, что уравнение (34)  $(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi) / (T Y'_\delta - T'_\delta Y) = 1$ , тождественно удовлетворяется равенством (39). Таким образом, из (37) следует (39). Этот факт не случайность, а отражает внутреннее, ранее неизвестное свойство симметрий уравнения КдВ (см. замечание 2).

Докажем, что приведенные в теореме соотношения непротиворечивы и находятся в соответствии с ранее полученными результатами другими авторами (см. замечание 4).

Рассмотрим неподвижную точку в (17), (27). Следовательно,  $t(\xi, \delta) = \xi$ . Таким образом, доказано равенство нулю (38). Из (29) следует (34) и в итоге упрощений получим (35)–(37).

Для доказательства пункта (**б**) делим (39) на функцию  $Y$  и два первых слагаемых в (39) запишем как частную производную  $\frac{\partial}{\partial \delta} (T(\xi, \delta) / Y(\xi, \delta))$ . Далее комбинируем с (34).

Получим ДУсЧП третьего порядка для функции  $Y(\xi, \delta)$  которое “**отделяется**” от других и зависит **только** от функции  $U(\xi, \delta)$  и её производных.

Сформулируем один из основных результатов данной работы. Обнаружено важное свойство симметрии уравнения КдВ:

**Теорема 7.** Пусть справедливы теоремы 1–6. Тогда ДУсЧП для функции  $Y(\xi, \delta)$  “**отделяется**” от других и зависит **только** от функции  $U(\xi, \delta)$  и её производных:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left( U^n(\xi, \delta) + \beta \frac{\partial}{\partial \delta} (Y Y'_\delta / U'_\delta) / U'_\delta \right) = (Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta) / Y^2, \quad (41)$$

Замена

$$Y(\xi, \delta) = Y_0(\eta, \tau), \quad \eta = U(\xi, \delta), \quad \tau = \xi, \quad (42)$$

приводит (41) к уравнению третьего порядка

$$\beta^{-1} \frac{\partial Y_0}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} (Y_0^3 Y''_{\eta\eta}) + 2n\eta^{n-1} Y_0^2(\eta, \tau) / \beta = 0. \quad (43)$$

Замена в (43)  $Y_0(\eta, \tau) = \sqrt{G(\eta, \tau)}$  приводит к НУсЧП третьего порядка

$$\beta^{-1} G(\eta, \tau)^{-3/2} \frac{\partial G(\eta, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 G(\eta, \tau)}{\partial \eta^3} + 2n\eta^{n-1} / \beta = 0. \quad (44)$$

Якобиан имеет вид  $\det J = -U'_\delta(\xi, \delta)/Y_0(\eta, \tau)$ .

*Доказательство.* Доказательство осуществляется прямой подстановкой.

**Замечание 7.** Техническая замена (42) приведена с целью отделить переменную  $\eta = \xi$ , от переменной  $\eta = U(\xi, \delta)$ . Обнаружено новое свойство уравнений КдВ, ниже докажем, что, уравнение для функции  $Y(\xi, \delta)$  “отделяется” не только в окрестности неподвижной точки, а и в общей ситуации.

**Замечание 8.** Уравнение (43) на группе растяжения переходит в ОДУ

$$Y(\xi, \delta) = \eta^{-(2+n)/3n} \Psi(\theta), \quad \theta = \tau^{2/3n} U(\xi, \delta) = \tau^{2/3n} \eta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi^3(\theta) \Psi''(\theta)) + n\theta^{n-1} \Psi^2(\theta)/\beta - (2+n)\Psi(\theta)/(3n\beta) + 2\theta \Psi'(\theta)/(3n\beta) = 0. \quad (45)$$

Из (43), (44) также следуют ОДУ на группе преобразований сдвига с инвариантом  $\theta = U(\xi, \delta) + v\xi = \eta + v\tau$ . Здесь  $v$  константа. В этом случае, в отличие от пункта 4а, якобиан не равен нулю. ОДУ в этом случае не приводим, в силу его тривиальности.

**8. Анализ следствий вырожденного случая.** Временно, чтобы исследовать вырожденный случай, подставим в (41)  $Y(\xi, \delta) = Y_0(U(\xi, \delta), \xi)$ , тогда правая часть (41) равна нулю. Интегрируем следствие (41) по переменной  $\delta$  и умножим на производную  $U'_\delta(\xi, \delta)$  и повторяем эту процедуру два раза. Тогда получим хорошо известную формулу. Это аналог первого интеграла, который получается в классической теории КдВ, (смотри замечание 2) при интегрировании ОДУ, и он описывает колебания нелинейного ангармонического осциллятора в переменных  $\xi, \delta$

$$Y^2(U(\xi, \delta)) = 2C_0/\beta - 2U^{2+n}/(\beta(n+1)(n+2)) - 2C_1U/\beta + C_2U^2/\beta. \quad (46)$$

Введем новые обозначения для константы  $E = 2C_0/\beta$ . Она имеет смысл начальной энергии  $E$ , тогда оставшаяся функция в правой части (46) с противоположным знаком имеет смысл потенциальной энергии ангармонического осциллятора с нелинейностью порядка  $2+n$ . В цитируемой литературе показано, что решения аналога (46) в исходных переменных выражаются через эллиптические функции. Решения ОДУ, описывающие колебания ангармонических осцилляторов (см. замечание 2) подробно рассмотрены, например, в работе [1], с. 63.

**Замечание 9.** Построить решение ДНУсЧП КдВ методом НФКЗП означает определить функции  $Y(\xi, \delta), T(\xi, \delta), M(\xi, \delta), x(\xi, \delta)$ . Если определить функцию  $Y(\xi, \delta)$  из (41), (43) или (44), то будут определены все остальные функции из приведенного списка. Затем можно вернуться, в каком-то смысле, не всегда в явном виде, в “параметрической форме”, к исходным переменным (2), (5). При анализе каждого конкретного нелинейного уравнения выявляются специфические свойства, характерные только для него. Нелинейное уравнение КдВ имеет новое свойство имеет в общем случае, а не только в “вырожденном случае” (см. замечание 2): “Существует замена переменных в которых уравнение для функции  $Y(\xi, \delta) = Y_0(U(\xi, \delta), t(\xi, \delta))$  «отделяется» от всех других”. Функции  $U(\xi, \delta), t(\xi, \delta)$  остаются произвольными, дважды непрерывно дифференцируемыми функциями.



### 9. Построение точного решения уравнения методом НФКЗП.

Рассмотрим кратко общий случай  $Y(\xi, \delta) = Y_0(U(\xi, \delta), t(\xi, \delta))$ . Докажем, что и в общем случае «отделяется» уравнение для функции  $Y(\xi, \delta)$ . Точное решение уравнения КдВ описано в теореме:

**Теорема 8.** Пусть дано СФЛАУ (20)–(23) и её решение (14)–(17), и функция  $Y(\xi, \delta)$  имеет вид

$$Y(\xi, \delta) = \sqrt{G(\eta, \tau)}, \quad \eta = U(\xi, \delta), \quad \tau = t(\xi, \delta). \quad (47)$$

Тогда точное решение определяется выражениями

$$\begin{aligned} M(\xi, \delta) &= G'_\eta(\eta, \tau)/2, \quad T(\xi, \delta) = -\sqrt{G(\eta, \tau)}(2\eta^n + \beta G''_{\eta\eta}(\eta, \tau))/2, \\ x(\xi, \delta) &= X(\eta, \tau), \quad \frac{\partial X(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \eta^n + \beta G''_{\eta\eta}/2, \quad \frac{\partial X(\eta, \tau)}{\partial \eta} = 1/\sqrt{G(\eta, \tau)}, \\ \det J &= (\eta G'_\tau(U'_\delta(\xi, \delta)t'_\xi(\xi, \delta) - t'_\delta(\xi, \delta)U'_\xi(\xi, \delta)))/z_1, \\ z_1 &= G^2(\eta, \tau) \left( 2n\eta^n + \beta\eta \frac{\partial^3 G(\eta, \tau)}{\partial \eta^3} \right), \end{aligned} \quad (48)$$

а функция  $G(\eta, \tau)$  определяется уравнением (44). Функции  $U(\xi, \delta)$ ,  $t(\xi, \delta)$  остаются произвольными дважды непрерывно дифференцируемыми функциями в решении в “параметрической форме”.

**Схема доказательства.** Подставим решение СЛАФУ (14)–(17) в уравнение (8) и получим уравнение, в которое линейно входит функция  $T(\xi, \delta)$  и не входят производные этой функции.

$$\begin{aligned} T(\xi, \delta) &= \left( \beta M(\xi, \delta) (U'_\delta M'_\xi - M'_\delta U'_\xi) - Y(\xi, \delta) \left( Y'_\delta (U^n U'_\xi + \beta M'_\xi) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Y'_\xi(\xi, \delta) (U^n U'_\delta + \beta M'_\delta) \right) \right) / (Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta). \end{aligned}$$

Вычисляем функцию  $T(\xi, \delta)$  и её производные и подставляем в (14)–(18). Из (16), (17) исключаем вторые производные  $M''_{\xi\xi}$  и после замены (47) получим выражение  $M(\xi, \delta) = G'_\eta(\eta, \tau)/2$ , которое приведено в (48). Вычисляем производные функции подставляем в (14), (15) и получим

$$\begin{aligned} x'_\xi(\xi, \delta) &= U'_\xi/\sqrt{G(\eta, \tau)} + t'_\xi(\xi, \delta) (\eta^n + \beta G''_{\eta\eta}/2), \\ x'_\delta(\xi, \delta) &= U'_\delta/\sqrt{G(\eta, \tau)} + t'_\delta(\xi, \delta) (\eta^n + \beta G''_{\eta\eta}/2). \end{aligned} \quad (49)$$

Предположим, что  $x(\xi, \delta) = X(U(\xi, \delta), t(\xi, \delta))$ , тогда получим все остальные соотношения выражения, приведенные в теореме 8. Необходимых условиях разрешимости (30) в переменных (47) выполнены  $\frac{\partial^2 X(\eta, \tau)}{\partial \eta \partial \tau} = \frac{\partial^2 X(\eta, \tau)}{\partial \tau \partial \eta}$  и отсюда следует уравнение (44) ■

Таким образом, даже исследование динамических систем в окрестности неподвижных точек, позволяет найти “правильные” уравнения (41), (43), (44), которые совпадают с уравнениями полученными в общем случае.

**10. Один из вариантов построения асимптотического решения уравнения КдВ. “Точные”** решения, которые нельзя выразить через какие-либо известные элементарные или специальные функции, вычисляются численными методами, однако последние не дают достаточной информации для обобщений. В данной работе предлагается строить приближенные по малому параметру, асимптотические решения нелинейного (НусЧП) (44). Построение таких решений это отдельная большая область исследований, которой в данной работе авторы только немного касаются. В работах [9, 10, 13, 14] есть большой список ссылок на статьи по этой теме.

Для построения асимптотического решения, в окрестности точных вырожденных решений, построенных на “бегущих волнах” (замечание 2) в цитируемой выше литературе, применяем метод, аналогичный методу Пуанкаре–Лайтхилла–Го, описанный в [13, 14]. Этот метод широко применялся ранее одним из авторов данной работы в книгах [9, 10].

**Замечание 10.** Построение асимптотического решения, в комбинации с методом НФКЗП, разделено на несколько случаев, а именно при больших и малых значениях  $U$ . Сначала рассматривается построение асимптотического решения при больших значениях в теореме 9, которое имеет значение для практики. Огибающая спектра колебаний и форма колебаний существенна для приложений именно для больших значений функции. В данной работе только демонстрируется возможность существования варианта асимптотического решения, поправка к главному члену растет медленнее главного слагаемого по переменной  $\eta$ , не имеет особенностей и ограничена по переменной  $\tau$ . Аналогично, при подготовке данной работы, были исследованы случаи построения асимптотического решения при малых значениях  $U$ . Анализ показывает, что такие варианты существуют, но анализ сложный и выходит за рамки данной работы. Это исследование важно с точки зрения теории математики, но не важно для приложений, так как при малых значениях  $U$  колебания вызванные различными причинами неразличимы из-за нелинейной суперпозиции.

Отметим, что существование асимптотического решения не означает его устойчивости, что для практики не важно.

**Теорема 9.** Пусть выполнены теоремы 7, 8. Асимптотическое решение методом Пуанкаре–Лайтхилла–Го уравнения (44) по малому параметру  $0 < \varepsilon < 1$  задачи Коши со специальными начальными условиями при больших значениях  $\eta$  существует. Функция  $G(\eta, \tau, \varepsilon)$  приближенно удовлетворяет нелинейному уравнению (44) и его решение, при больших значениях  $\eta$  растет не быстрее главного члена асимптотического ряда по малому параметру  $\varepsilon$ , а заготовка асимптотического решения имеет вид

$$G(\eta, \tau, \varepsilon) = -2\eta^{n+2}/(\beta(n+1)(n+2))(1 + s\varepsilon\eta^{\sigma-n-2}\mu(\eta, \tau) + O(\varepsilon^2)) + \\ + C_1(1 + \varepsilon\eta^\sigma\mu(\eta, \tau) + O(\varepsilon^2)) + C_2\eta(1 + \varepsilon\eta^{-1+\sigma}\mu(\eta, \tau) + O(\varepsilon^2)) + \\ + C_3\eta^2(1 + \varepsilon\eta^{-2+\sigma}\mu(\eta, \tau) + O(\varepsilon^2)). \quad (50)$$

Существует функция  $\mu(\eta, \tau)$ , которая описывает ограниченную поправку порядка  $\varepsilon$  и удовлетворяет линейному (ЛДУсЧП) с переменными коэффициентами.  $s$  заданная константа.

**Краткая схема доказательства.** Здесь возникает много вариантов

выбора заготовки решения (50) и анализа уравнения для поправки ЛДУсЧП. Заготовку решения может содержать поправочный множитель  $(1+\varepsilon f(\eta))\mu(\eta, \tau)+O(\varepsilon^2)$  только у некоторых слагаемых в (46). Здесь можно по разному выбирать вид функции  $f(\eta)$ .

При подстановке (50) в уравнение (44) все слагаемые не содержащие малый параметр сокращаются. Слагаемые порядка  $\varepsilon$  приравняем к нулю и получим ЛДУсЧП с переменными коэффициентами. В данной работе исследовались случаи  $s = 0$  и  $\mu(\eta, \tau) = \int_{\rho}^{\varphi/\sqrt{\varepsilon}} W(z) dz$ ,  $\rho = \varepsilon^k$ ,  $\varphi = \eta^k$ ,  $k = \text{const}$ ,

такие значения  $\sigma$ , которые позволяют сделать замены переменных и привести ЛДУсЧП для функции поправки  $\mu(\eta, \tau)$  к ОДУ Бесселя или Эйлера, решения которых приведены, например, в работе [15]. Можно сделать вывод, что существуют значения параметров  $s$ ,  $\sigma$ ,  $k$ , при которых верна теорема 9 ■

## Литература

- [1] Ерофеев В. И., Кажяев В. В., Семерикова Н. П. Волны на стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит. 2002. – 208 с.
- [2] Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. – М.: Наука, Физматлит. – 2000. – 295 с.
- [3] Волосов К. А. Преобразование приближенных решений линейных параболических решений в асимптотические решения квазилинейного параболического уравнения // *Мат. зам.* – 1994. – Т. 56. – № 6. – С. 122–126.
- [4] Волосов К. А. Новый способ построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде // *Дифф. уравн.* – 2007. – Т. 43. – № 4. – С. 492–497.
- [5] Volosova A. K., Volosov K. A. Construction Solutions of PDE in Parametric Form. – Hindawi Publishing Corporation. *Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.* – V. 2009, 17 p.
- [6] Волосов К. А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными // *Сибирский журнал индустриальной математики.* – Т. XI, №2 (34), с. 29–39, 2008.
- [7] Волосов К. А. Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами. Диссертации на соискание учёной степени д.ф.-м.н. – М: МИЭМ, 2007. – 263 с.
- [8] Братусь А. С., Волосов К. А. Точные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограничением на суммарный ресурс управления // *Докл. РАН.* – 2002. – Т. 385. – № 3 – С. 319–322.
- [9] Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов теплопереноса (эволюция диссипативных структур), с добавлением Н. А. Колобова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
- [10] Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes.* – Kluwer Academic publishers. Dordrecht. Boston. London, 1995. – 316 p.

- [11] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. – М.: Физматлит, 2002.
- [12] Кудряшов Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва–Ижевск, 2004. – 360 с.
- [13] Куо Y. H. // J. Aeronaut. Sci. 23:2, 1956, p. 125–136.
- [14] Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 399 с.
- [15] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. – М.: Международная программа образования, 1996. – 496 с.
- [16] Чаплыгин С. А. О газовых струях // Учёные записки Московского университета. Отд. физ.-матем. наук, вып. 21, 1904 г.

УДК 517.925

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ШЕСТЬЮ СИММЕТРИЯМИ

Гайнетдинова А. А.

Уфимский государственный авиационный технический университет

Научно-исследовательская лаборатория

“Групповой анализ математических моделей  
естествознания, техники и технологий”

Уфа

e-mail: aliya-oct@yandex.ru

**Gainetdinova A. A. Investigation of systems of ordinary differential equations with six symmetries.** We consider the possibility of application of the algorithm of integration for systems of two second-order ordinary differential equations for integrating systems of two third-order equations admitting six-dimensional Lie algebras of operators.

Рассматривается возможность применения алгоритма интегрирования систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для интегрирования систем двух уравнений третьего порядка, допускающих шестимерные алгебры Ли операторов.

Системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка наиболее часто встречаются в прикладной математике. В последнее время многие работы посвящены исследованию таких систем методами группового анализа (см., например, [1]–[5]).

Интересным представляется вопрос исследования интегрируемости систем ОДУ более высоких порядков и систем большего количества ОДУ.

В данной работе построены примеры использования алгоритма, предложенного в [5], для интегрирования систем двух уравнений третьего порядка.

В алгоритме, предложенном в [5], используется инвариантное представление систем, допускающих четырёхмерные алгебры Ли операторов. Исследование матриц, составленных из координат базисных инфинитезимальных операторов и их продолжений на первые и вторые производные, показало, что все системы двух ОДУ второго порядка с четырьмя точечными симметриями можно разбить на 3 класса. Первый класс состоит из систем, в инвариантном представлении которых используются два дифференциальных инварианта второго порядка и один дифференциальный инвариант первого порядка. В этом случае при помощи оператора инвариантного дифференцирования (см. [6]) можно построить первый интеграл системы и проинтегрировать систему в квадратурах. Второй класс состоит из систем, в инвариантном представлении которых используются два дифференциальных инварианта второго порядка и один алгебраический инвариант (инвариант нулевого порядка). В этом случае для построения первого интеграла системы ищется дифференциальный инвариант первого порядка трехмерной подалгебры. Третий класс состоит из систем, не имеющих инвариантного представления. Это системы, одно из уравнений которых является особым многообразием, на котором меняется ранг матрицы, составленной из координат вторых продолжений инфинитезимальных операторов допускаемой алгебры. Показано, что для таких систем найдется такая невырожденная замена переменных, в которых уравнения системы разделяются и интегрируются в квадратурах.

Рассмотрим систему двух ОДУ третьего порядка вида

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}), \\ \ddot{y} = g(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}), \end{cases} \quad (1)$$

которая допускает шестимерную алгебру Ли, образованную операторами

$$X_i = \tau_i(t, x, y) \frac{\partial}{\partial t} + \xi_i(t, x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(t, x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2)$$

Инвариантное представление системы (1) можно получить, найдя инварианты алгебры (2). Для этого нужно решить систему

$$X_{i,k}(I_k) = 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (3)$$

где  $X_{i,k}$  — продолжение оператора  $X_i$  на производные  $k$ -го порядка,  $I_k$  — функция от независимой переменной  $t$ , зависимых переменных  $x, y$  и их производных до  $k$ -го порядка. Также введём в рассмотрение матрицы  $\Lambda_k$ , состоящие из координат инфинитезимальных операторов и их продолжений на  $k$ -ые производные,  $k = 0, 1, 2, 3$ .

Для каждой реализации алгебр Ли, в зависимости от рангов матриц  $\Lambda_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , можно получить либо систему одного из видов, указанных в табл. 1, либо систему уравнений порядка меньше, чем 3.

Таблица 1. Виды инвариантных систем двух ОДУ 3-го порядка

№	Ранги матриц				Количество инвариантов				Инвариантное представление системы
	$\Lambda_0$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$I_0$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	
1	3	5	6	6	0	0	1	2	$I_{3,1} = F(I_2), I_{3,2} = G(I_2)$
2	3	5	5	6	0	0	2	1	особый вид системы
3	3	4	6	6	0	1	0	2	$I_{3,1} = F(I_1), I_{3,2} = G(I_1)$
4	3	4	5	6	0	1	1	1	особый вид системы
5	3	3	5	6	0	2	0	1	особый вид системы
6	2	4	6	6	1	0	0	2	$I_{3,1} = F(I_0), I_{3,2} = G(I_0)$
7	2	4	5	6	1	0	1	1	особый вид системы
8	2	3	6	6	1	1	0	1	особый вид системы
9	1	3	6	6	2	0	0	1	особый вид системы

**Примечание.**  $I_0$  – алгебраический инвариант;  $I_1$  – дифференциальный инвариант первого порядка;  $I_2$  – дифференциальный инвариант второго порядка;  $I_3$  – дифференциальный инвариант третьего порядка.

Системы вида 1, 3 и 6 из табл. 1 полностью представляются через инварианты. Остальные случаи возникают тогда, когда ранг матрицы  $\Lambda_3$  меняется на каком-либо многообразии. Тогда одно из уравнений представимо через инварианты, а другим уравнением системы является многообразие, на котором меняется ранг матрицы  $\Lambda_3$ .

Важным понятием в интегрировании систем является понятие оператора инвариантного дифференцирования (см. [6]). Это оператор, который из инварианта  $k$ -го порядка порождает инвариант  $(k+1)$ -го порядка. Если рассматривается случай одной независимой и двух зависимых переменных, то этот оператор имеет вид

$$\lambda(t, x, y, x', y', \dots)D_t,$$

где  $D_t$  – оператор полного дифференцирования. В [6] показано, что любой оператор  $\lambda D_t$ , который коммутирует с каждым оператором  $X_{i,k}$   $k = 1, 2, 3, \dots$  алгебры Ли группы  $G$ , т. е.

$$[X_{i,k}, \lambda D_t] = 0,$$

является оператором инвариантного дифференцирования. Следовательно, функцию  $\lambda$  оператора инвариантного дифференцирования можно найти по формуле

$$X_{i,k}(\lambda) - \lambda D_t(\xi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (4)$$

где  $k$  – требуемый порядок производных, т. е. в качестве  $\lambda$  можно взять любое частное решение уравнения (4).

Рассмотрим примеры применения алгоритма к системам из табл. 1.

**Пример 1.** Пусть система (1) допускает алгебру Ли с базисом, состоящим из операторов

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad t \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \quad x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда её инвариантное представление имеет вид

$$I_{3,1} = F(I_2), \quad I_{3,2} = G(I_2), \quad (5)$$

где

$$I_2 = \frac{\dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}\ddot{x}}, \quad I_{3,1} = \frac{\dot{x}\ddot{x}}{\ddot{x}^2}, \quad I_{3,2} = \frac{\dot{x}^2\ddot{y}}{\dot{y}\ddot{x}^2}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования, вычисленный по формуле (4), имеет вид

$$\frac{\dot{x}}{\ddot{x}} D_t.$$

Применение оператора инвариантного дифференцирования к дифференциальному инварианту второго порядка дает равенство:

$$\lambda D_t(I_2) = \Phi(I_2, I_{3,1}, I_{3,2}).$$

Учитывая (5), получим

$$\lambda D_t(I_2)|_{(5)} = \Psi(I_2),$$

или

$$\frac{dI_2}{\Psi(I_2)} = \frac{dt}{\lambda}.$$

Отсюда получим, что

$$I_2 = \psi(C_1 + \ln \dot{x}).$$

С другой стороны, можно построить функцию  $u = u(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ , такую что

$$\lambda D_t(u) = I_2.$$

В качестве такой функции возьмем дифференциальный инвариант первого порядка подалгебры, натянутой на операторы

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \quad x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда функция  $u$  имеет вид  $u = \dot{y}$ . С другой стороны,  $u$  должна удовлетворять уравнению

$$\lambda D_t(u) = \psi \left( \int \frac{dt}{\lambda} \right).$$

Тогда получим, что  $u = \alpha(C_1 + \ln \dot{x}) + C_2$  и исходная система примет вид

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha(C_1 + \ln \dot{x}) + C_2, \\ \frac{\dot{x}^2\ddot{y}}{\dot{y}\ddot{x}^2} = G(\psi(C_1 + \ln \dot{x})). \end{cases}$$

Очевидно, эта система интегрируема ■

**Пример 2.** Пусть система (1) допускает алгебру Ли с базисными операторами

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \quad t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ее инвариантное представление имеет вид

$$I_{3,1} = F(I_1), \quad I_{3,2} = G(I_1), \quad (6)$$

где

$$I_1 = \dot{x}, \quad I_{3,1} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2}, \quad I_{3,2} = \frac{2\dot{y}\ddot{y} - 3\dot{y}^2}{2\dot{y}^2\dot{x}^2}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования имеет вид

$$\frac{1}{\dot{x}}D_t.$$

Дважды применив оператор инвариантного дифференцирования к дифференциальному инварианту первого порядка и учитывая (6), получим

$$\frac{1}{\dot{x}}D_t \left( \frac{1}{\dot{x}}D_t(\dot{x}) \right) \Big|_{(6)} = -F(\dot{x}).$$

Из этого уравнения получим выражение для  $\dot{x}$  и исходная система сведётся к следующему виду

$$\begin{cases} \dot{x} = \psi(t, C_1, C_2), \\ \frac{2\dot{y}\ddot{y} - 3\dot{y}^2}{2\dot{y}^2\dot{x}^2} = H(t, C_1, C_2). \end{cases}$$

Очевидно, эта система интегрируема в квадратурах ■

**Пример 3.** Пусть система (1) допускает алгебру Ли с базисными операторами

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad t \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ее инвариантное представление имеет вид

$$I_{3,1} = F(I_0), \quad I_{3,2} = G(I_0), \quad (7)$$

где

$$I_0 = x, \quad I_{3,1} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} - 3\dot{x}^2}{2\dot{x}^4}, \quad I_{3,2} = \frac{2\dot{y}\ddot{y} - 3\dot{y}^2}{2\dot{x}^2\dot{y}^2}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования имеет вид

$$\frac{1}{\dot{x}}D_t.$$

Можно найти функцию  $u = u(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})$ , что будет выполняться условие

$$\lambda D_t(u) = \Phi(I_0, I_{3,1}, I_{3,2}).$$

Учитывая (7), получим уравнение

$$\lambda D_t(u) \Big|_{(7)} = \Psi(I_0). \quad (8)$$

В качестве такой вспомогательной функции возьмем дифференциальный инвариант второго порядка подалгебры, натянутой на операторы

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad t \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t},$$



т. е.  $u = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$ . С другой стороны, можно найти функцию  $v = v(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ , такую что

$$\lambda D_t(v) = u, \quad (9)$$

т. е.

$$\frac{1}{\dot{x}} D_t(v) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3},$$

откуда  $v = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ . Формулы (8) и (9) дают уравнение второго порядка на  $v$ :

$$\frac{1}{\dot{x}} D_t \left( \frac{1}{\dot{x}} D_t(v) \right) = G(x) - vF(x).$$

Таким образом, исходная система свелась к виду

$$\begin{cases} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \int \dot{x} \int [\dot{x}G(x) - \dot{y}F(x)] ds dt, \\ \frac{2\dot{x}\ddot{x} - 3\dot{x}^2}{2\dot{x}^4} = F(x). \end{cases}$$

Очевидно, эта система интегрируема в квадратурах ■

**Пример 4.** Пусть система (1) допускает алгебру Ли с базисными операторами

$$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, t \frac{\partial}{\partial y}, x \frac{\partial}{\partial y}, y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Инвариантного представления в этом случае нет. Ранг матрицы  $\Lambda_3$  в общем случае равен 6, но на многообразии  $\ddot{y} - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\ddot{x} = 0$  становится равным 5. Тогда система, допускающая заданные операторы, имеет вид

$$\ddot{x} = F(\dot{x}, \ddot{x}), \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} F(\dot{x}, \ddot{x}).$$

Эта система является системой с частично разделяющимися уравнениями. Для этой системы можно понизить порядок уравнения, а при некоторых видах функции  $F$  система интегрируется в квадратурах ■

## Литература

- [1] Wafu Soh C., Mahomed F. M. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2001. – №34. – P. 2883–2911.
- [2] Гапонова О. В., Нестеренко М. О. Системи ЗДР другого порядку, інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі // Збірник праць Інституту математики НАН України, Київ. – 2006. – Т. 3. – №2. – С. 71–91.
- [3] Ayub M., Khan M., Mahomed F. M. Second-order systems of ODEs admitting three-dimensional Lie algebras and integrability // Journal of Applied Mathematics. 2013. – №2013. – 147921.
- [4] Wafu Soh C., Mahomed F. M. Reduction of order for systems of ordinary differential equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2004. – №11:1. – P. 13–20.

- [5] Gainetdinova A. A., Gazizov R. K. Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras // Proc. R. Soc. A., 2017. – Т. 473. – №2197. – 20160461.
- [6] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

УДК 517.9

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ «ПАЗЛЫ» НА РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зайцев В. Ф.

Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена  
Санкт-Петербург  
e-mail: valentin\_zaitsev@mail.ru

**Zaitsev V. F. Differential «puzzles» on solutions of nonlinear equations.** We consider the finite systems of functions. These functions are closed upon solutions of the subclasses of generalized homogeneous model differential equations.

Рассматриваются конечные системы функций, замкнутые на решениях некоторых подклассов обобщённо-однородных модельных дифференциальных уравнений.

В последние десятилетия прошлого века возникли предпосылки качественного скачка в решении проблемы интегрирования ряда классов модельных обыкновенных дифференциальных уравнений (МОДУ) в замкнутом аналитическом виде (через квадратуры, специальные функции и “стандартные” решения нелинейных уравнений, не имеющих подвижных критических особых точек). Как следствие, появились справочники нового поколения, например, [1]. Одним из наиболее эффективных методов поиска новых разрешимых случаев выбранного класса уравнений является дискретно-групповой анализ [2–5].

Алгоритм поиска решений интегрируемых уравнений включает поиск дискретной группы преобразований (ДГП), допускаемой выбранным классом, определение исходных интегрируемых классическими методами элементов этого класса и “размножение” исходных элементов по найденной ДГП. Следует учесть два обстоятельства.

1. Доказательство максимальности ДГП на заданном классе представляет собой весьма сложную и неалгоритмичную задачу – даже для обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера максимальность доказана лишь для некоторых конкретных классов преобразований.
2. Ниоткуда не следует, что для заданного класса найдены все исходные интегрируемые элементы, тем более что понятие “интегрируемое классическими методами уравнение” весьма размыто и не имеет чёткого определения.

ДГП, допускаемая некоторым выбранным классом, разбивает его на подклассы эквивалентности, состоящие из уравнений, связанных между собой известными преобразованиями. В процессе вычисления решений было замечено, что решения уравнений одного и того же подкласса выражаются через конечный набор элементов некоторого «пазла», при этом сами элементы связаны дополнительными соотношениями [6].

Рассмотрим обобщённое уравнение Эмдена–Фаулера

$$y'' = Ax^n y^m (y')^l. \quad (1)$$

Элементы класса (1) обозначаются обычно тройкой параметров  $(n, m, l)$ . Уравнение (1) – обобщённо–однородное, поэтому его общее решение в параметрической форме можно записать в виде

$$\begin{cases} x(\tau) = aC_1^\alpha f(\tau, C_2), \\ y(\tau) = bC_1^\beta g(\tau, C_2). \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно, что если найдутся функции  $f, g$  такие, что для некоторой тройки параметров  $(n, m, l)$  справедлива пропорциональность

$$y'' \sim x^n y^m (y')^l, \quad (3)$$

т. е.

$$\dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g} \sim f^n g^m (\dot{f})^{3-l} (\dot{g})^l,$$

где  $(\dot{\phantom{x}})$  – дифференцирование по  $\tau$ , то тем самым мы найдём общее решение уравнения (1) с параметрами  $(n, m, l)$ .

Для некоторого (достаточно широкого) дискретного подкласса уравнений (1) функции  $f$  и  $g$  представимы степенями стандартных полиномов или произведением степеней стандартных полиномов (см. [1]). К настоящему времени известны следующие элементы «пазла» полиномов:

$$\begin{aligned} P_1 &= \tau, \\ P_2 &= \tau^2 - 1, \\ P_3 &= \tau^3 - 3\tau + C_2, \\ P_4 &= \tau^4 - 6\tau^2 + 4C_2\tau - 3, \\ P_6 &= \tau^6 - 15\tau^4 + 20C_2\tau^3 - 45\tau^2 + 12C_2\tau - 8C_2^2 + 27, \\ P_9 &= \tau^9 - \frac{108}{7}\tau^7 + 12C_2\tau^6 + 54\tau^5 - 108C_2\tau^4 + \\ &\quad + 12(4C_2^2 + 9)\tau^3 - 108C_2\tau^2 + 81\tau + \frac{4}{7}(4C_2^2 - 27)C_2 \end{aligned}$$

(полином  $P_9$  был найден в 2016 г. в решениях шести новых уравнений этого типа [7]). Знаки  $\pm$ , которые могут быть поставлены при полиномах чётной степени для обеспечения вещественности параметра  $A$ , мы без ограничения общности опускаем.

Все полиномы удовлетворяют закономерности

$$P'_n = nP_{n-1}, \quad (4)$$

(интересно, что полином  $P_8$  является приводимым, так как  $P'_9 = 9P_4^2$ ); ей можно воспользоваться, чтобы однозначно достроить, например, полином  $P_5$ , который в решениях не встречается (он появляется только в промежуточных вычислениях).

Справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} 2P_2P_3 - P_2P'_3 &= P_4, & 4P_1P_3 - 3P_2^2 &= P_4, \\ 3P'_3P_4 - 2P_3P'_4 &= P_6, & 9P_2P_4 - 8P_3^2 &= P_6, \\ 5P'_4P_5 - 3P_4P'_5 &= 5P_2P_6, & \text{т. е.} & \quad 4P_3P_5 - 3P_4^2 = P_2P_6, \\ 3P_4P'_6 - P'_4P_6 &= 2P_9, & & \quad 9P_4P_5 - 2P_3P_6 = P_9, \\ 7P'_4P_9 - 3P_4P'_9 &= 7P_6^2, & & \quad 4P_3P_9 - 27P_4^3 = P_6^2 \end{aligned} \quad (5)$$

(здесь снова возникает полином восьмого порядка  $P_2P_6$ , отличный от  $P_4^2 \sim P'_9$ , и он тоже оказывается приводимым). Эти формулы отражают замкнутость производных некоторых произведений степеней стандартных полиномов на множестве этих полиномов. Приведём некоторые решения уравнений из этого подкласса.

Уравнение	$f(\tau)$	$g(\tau)$	$\dot{g}(\tau)/\dot{f}(\tau)$
(1, 0, 0)	$\tau$	$P_3$	$P_2$
(-5/2, -1/2, 0)	$P_3^{-1}$	$P_2^2P_3^{-1}$	$P_4$
(1, -5/3, 0)	$P_4$	$P_3^{3/2}$	$P_2P_3^{-1/2}$
(1, -1/2, 7/5)	$P_2P_3^{-1/2}$	$P_4^2$	$P_3^{5/2}$
(-7/3, -5/3, 0)	$P_4^{-1}$	$P_3^{3/2}P_4^{-1}$	$P_3^{-1/2}P_6$
(1, -7/4, 7/5)	$P_3^{-1/2}P_6$	$P_4^{4/3}$	$P_3^{5/2}P_4^{-5/3}$
(-5/2, -1/2, 10/7)	$P_3^{-1}P_4^{2/3}$	$P_3^{-1}P_6^2$	$P_4^{7/3}$
(-11/7, -10/7, 1/2)	$P_9^{-1}$	$P_4^{7/3}P_9^{-1}$	$P_4^{-2/3}P_6^2$
(2, -11/4, 13/10)	$P_4^{-1/3}P_6$	$P_9^{4/7}$	$P_4^{10/3}P_9^{-10/7}$
(-10/3, -2/3, 18/11)	$P_4^{-1}P_9^{3/7}$	$P_4^{-1}P_6^3$	$P_9^{11/7}$

Всего полученная «орбита полиномов» объединяет 32 обобщённых уравнения Эмдена–Фаулера, включая исходную тривиально разрешимую точку (1, 0, 0), т. е.  $y'' = x$ ; решение этого уравнения сразу же порождает полиномы  $P_3$  и  $P_2$  (см. первую строчку таблицы). Естественно, все уравнения, приводящиеся к уравнению Эмдена–Фаулера, имеют решения, составленные из элементов тех же «пазлов», в случае уравнений более высокого порядка «пазл» становится интегро-дифференциальным, но остаётся простым по структуре. Например,

уравнение

$$y''' = Ay^{-1/2}(y')^{-4}(y'')^{11/7}$$

имеет решение

$$x(\tau) = aC_1^{55} \int P_3^{-3/2} P_4^{5/3} P_6 d\tau + C_3, \quad y(\tau) = bC_1^{54} P_3^{-1} P_6^2.$$

Точно так же другие решения исходных разрешимых точек порождают «пазлы», состоящие из других функций, но обладающие схожими свойствами: «орбита Эйлера», «орбита тангенсов», «орбита Вейерштрасса» и «орбита Бесселя» [2] объединяют большую часть известного к настоящему времени множества разрешимых случаев обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера.

Как известно, множество всевозможных полиномов образует дифференциальную алгебру [8], так что множество элементов «пазла» является **сужением дифференциальной алгебры полиномов на решениях обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера**. Строение этого сужения весьма специфично – достаточно указать, что априорно определённая операция сложения почти не используется (сумма полиномов  $P_1$  и  $P_2$  появляется лишь в небольшом «отростке» «орбиты полиномов»), а дополнительные соотношения (3)–(5) в совокупности задают жёсткие ограничения на структуру. Аналогичные сужения возникают и на основе других «пазлов».

Специфичность и недостаточная изученность «пазлов» вряд ли позволит разработать в обозримом будущем сколько-нибудь универсальный метод решения МОДУ в заданном классе функций на основе полученных закономерностей. Однако некоторые перспективы применения подобного подхода можно отметить уже сейчас.

1. Общее решение уравнения находится без каких-либо преобразований самого уравнения и без операций интегрирования.

2. Это обстоятельство, в свою очередь, существенно облегчает построение алгоритмов для современных систем аналитических вычислений на ЭВМ (например, MAPLE), позволяя радикально уменьшить количество вариантов, которые придётся проверять.

3. Найденные новые расширения известных орбит позволят найти новые образующие ДГП класса (1) с возможным распространением их на другие орбиты, в первую очередь – «орбиту тангенсов» и «орбиту Вейерштрасса», так как для этих орбит найдено аналогичное «орбите полиномов» расширение [7].

Не следует также исключать возможность обнаружения **другой системы полиномов**, обладающей подобными свойствами, а также применение данного подхода к другим классам обобщённо-однородных МОДУ с большим числом слагаемых в правой части, например,

$$y'' = Ax^n y^m (y')^l + Bx^{n-l+k} y^{m+l-k} (y')^k,$$

или

$$y'' = \sum_{i=1}^N A_i x^{n+l_i} y^{m-l_i} (y')^{l_i}.$$

Решения этих классов уравнений, очевидно, тоже представимы в виде (2).

В заключение отметим, что конструирование решений дифференциальных уравнений в виде «пазла» вполне укладывается в концепцию симметричной теории ОДУ: если в классической теории Ли и её обобщениях на нелокальные симметрии (теоремы о факторизации) **уравнения** строятся из инвариантов допускаемой группы или допускаемого оператора (это справедливо и для дискретно-инвариантных уравнений), то здесь **решения уравнений** строятся из элементов «пазла», и эти элементы оказываются инвариантными относительно (дискретных) групп эквивалентности на этом классе уравнений.

Элементы «пазла» могут быть построены, исходя из структуры исследуемого класса уравнений, и удовлетворяют вспомогательной системе дифференциальных уравнений. Она очевидно проще, чем исходный класс уравнений, особенно если задать конкретный аналитический вид одного из элементов – некоторый “порождающий элемент «пазла»” (об этом см. следующую статью в настоящем сборнике).

## Литература

- [1] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- [2] Зайцев В. Ф. О дискретно-групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР, **299**, №3, 1988. – С. 542–545.
- [3] Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.: ЛИИАН, 1991. – 240 с.
- [4] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464 с.
- [5] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть IV. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 120 с.
- [6] Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Конечные системы полиномиальных функций, замкнутые на некотором классе преобразований обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера // Методы и средства информационных технологий в науке и производстве. – Л.: Наука, 1992. – С. 67–73.
- [7] Зайцев В. Ф., Зайцев О. В. Об одном применении метода вложения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXVIII международной конференции «Герценовские чтения – 2015» (Санкт-Петербург, 13–17 апреля 2015 г.). – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 30–33.
- [8] Каплански И. Введение в дифференциальную алгебру. – М.: ИЛ, 1959.

## НОВЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПРЕДСТАВИМЫЕ В КЛАССЕ ПОЛИНОМОВ

Зайцев В. Ф.<sup>1,2</sup>, Иофе М. Д.<sup>2</sup>

Санкт-Петербургский государственный университет<sup>1,2</sup>

Российский государственный педагогический

университет им. А. И. Герцена<sup>2</sup>

Санкт-Петербург

e-mail: valentin\_zaitsev@mail.ru

e-mail: iofe@list.ru

**Zaitsev V. F., Iofe M. D. The new solutions of nonlinear equations that are represent in the class of polynomials.** We found the new solutions of some subclass of generalized Emden–Fowler equations. These solutions are built from some finite set of polynomials defined by the proposed algorithm.

Получены новые решения для некоторых обобщённых уравнений Эмдена–Фаулера. Эти решения строятся из некоторого конечного набора полиномов, определяемого предложенным алгоритмом.

Рассматривается класс обобщённых уравнений Эмдена–Фаулера

$$y'' = Ax^n y^m (y')^l, \quad (1)$$

обозначаемое обычно тройкой параметров  $(n, m, l)$ . Известно [1], что существует несколько десятков уравнений класса (1), точные решения которых представимы с помощью конечного набора полиномов и могут быть сконструированы из него как «пазл»<sup>1</sup>.

Как уже указывалось, в силу обобщённой однородности общее решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(\tau) = a_* C_{1*}^{\alpha_*} f(\tau, C_{2*}), \\ y(\tau) = b_* C_{1*}^{\beta_*} g(\tau, C_{2*}) \end{cases} \quad (2)$$

(здесь и далее звёздочки в показателях и индексах вводятся во избежание путаницы с константами, вводимыми в процессе изложения материала настоящей статьи), а для нахождения общего решения достаточно доказать пропорциональность

$$f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g} \sim f^n g^m (\dot{f})^{3-l} (\dot{g})^l, \quad (3)$$

где  $(\dot{\phantom{x}})$  – дифференцирование по  $\tau$ .

Подставляя в (3)  $h = \dot{g}/\dot{f}$ , получаем

$$\dot{h} \sim f^n g^m (\dot{f})^{1-l} (\dot{g})^l. \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> См. предыдущую статью в настоящем сборнике.

Пусть  $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$  – полиномы по переменной  $\tau$  степени  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  соответственно (хотя в общем случае они могут быть любыми функциями). Очевидно, если

$$\begin{aligned} f &\sim P_\alpha^{a_1} P_\beta^{b_1} P_\gamma^{c_1}, & g &\sim P_\alpha^{a_2} P_\beta^{b_2} P_\gamma^{c_2}, & h &\sim P_\alpha^{a_3} P_\beta^{b_3} P_\gamma^{c_3}, \\ \dot{f} &\sim P_\alpha^{a_4} P_\beta^{b_4} P_\gamma^{c_4}, & \dot{g} &\sim P_\alpha^{a_5} P_\beta^{b_5} P_\gamma^{c_5}, & \dot{h} &\sim P_\alpha^{a_6} P_\beta^{b_6} P_\gamma^{c_6}, \end{aligned} \quad (5)$$

то можно подобрать такие  $n, m, l$ , чтобы соотношение (4) выполнялось.

Исходя из принятого предположения (5) для  $f$  легко вычислить

$$\dot{f} \sim P_\alpha^{a_1-1} P_\beta^{b_1-1} P_\gamma^{c_1-1} (a_1 \dot{P}_\alpha P_\beta P_\gamma + b_1 P_\alpha \dot{P}_\beta P_\gamma + c_1 P_\alpha P_\beta \dot{P}_\gamma).$$

С другой стороны из того же предположения  $\dot{f} \sim P_\alpha^{a_4} P_\beta^{b_4} P_\gamma^{c_4}$ , а значит

$$a_1 \dot{P}_\alpha P_\beta P_\gamma + b_1 P_\alpha \dot{P}_\beta P_\gamma + c_1 P_\alpha P_\beta \dot{P}_\gamma = P_\alpha^q P_\beta^r P_\gamma^s. \quad (6)$$

В левой части равенства (6) стоит полином степени  $\alpha + \beta + \gamma - 1$ , а значит и в правой должен стоять полином той же степени. Поэтому  $\alpha + \beta + \gamma - 1 = q\alpha + r\beta + s\gamma$ . Назовём это соотношение **разложением**  $\alpha + \beta + \gamma - 1$  по  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  с коэффициентами  $q, r, s$ . Прделав все то же самое для  $g$  и  $h$ , получим ещё 2 разложения  $\alpha + \beta + \gamma - 1$  по  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  с другими коэффициентами. Рассмотрим случай, когда все эти коэффициенты натуральные. Для этой цели была написана программа, с помощью которой для первой сотни были высчитаны все числа, у которых существует хотя бы 3 разложения. Их можно поделить на 3 группы. Первая состоит из чисел, у которых во всех соотношениях хотя бы один коэффициент (например, перед  $\alpha$ ) равен 0, вторая – содержащая хотя бы один полином 2-ой степени, третья – все оставшиеся. Рассмотрим вторую группу, в общем виде соотношения этой группы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 * k + 0 * (k - 1) + k * 2 &= 2k, \\ 0 * k + 2 * (k - 1) + 1 * 2 &= 2k, \\ 2 * k + 0 * (k - 1) + 0 * 2 &= 2k, \\ 1 * k + 0 * (k - 1) + \frac{k}{2} * 2 &= 2k, \quad \text{если } k - \text{чётное}, \\ 0 * k + 1 * (k - 1) + \frac{k + 1}{2} * 2 &= 2k, \quad \text{если } k - \text{нечётное}, \end{aligned}$$

где  $k$  – натуральное число, бóльшее чем 3. Тогда, возвращаясь к полиномам, получаем:

$$\begin{aligned} a_1 \dot{P}_k P_{k-1} P_2 + b_1 P_k \dot{P}_{k-1} P_2 + c_1 P_k P_{k-1} \dot{P}_2 &= P_2^k, \\ a_2 \dot{P}_k P_{k-1} P_2 + b_2 P_k \dot{P}_{k-1} P_2 + c_2 P_k P_{k-1} \dot{P}_2 &= P_2 P_{k-1}^2, \\ a_3 \dot{P}_k P_{k-1} P_2 + b_3 P_k \dot{P}_{k-1} P_2 + c_3 P_k P_{k-1} \dot{P}_2 &= P_k^2, \\ a_4 \dot{P}_k P_{k-1} P_2 + b_4 P_k \dot{P}_{k-1} P_2 + c_4 P_k P_{k-1} \dot{P}_2 &= P_k P_2^{\frac{k}{2}}, \quad \text{если } k - \text{чётное}, \\ a_4 \dot{P}_k P_{k-1} P_2 + b_4 P_k \dot{P}_{k-1} P_2 + c_4 P_k P_{k-1} \dot{P}_2 &= P_{k-1} P_2^{\frac{k+1}{2}}, \quad \text{если } k - \text{нечётное}. \end{aligned}$$



Для упрощения соотношений примем коэффициенты перед производными полиномов, которые есть в правой части, равными нулю (в известных ранее решениях в дифференциальных соотношениях [1] это было выполнено).

$$a_1 \dot{P}_k P_{k-1} + b_1 P_k \dot{P}_{k-1} = P_2^{k-1}, \quad (7)$$

$$a_2 \dot{P}_k = P_{k-1}, \quad (8)$$

$$b_3 \dot{P}_{k-1} P_2 + c_3 P_{k-1} \dot{P}_2 = P_k, \quad (9)$$

$$b_4 \dot{P}_{k-1} = P_2^{\frac{k-2}{2}}, \quad \text{если } k - \text{чётное}, \quad (10)$$

$$a_4 \dot{P}_k = P_2^{\frac{k-1}{2}}, \quad \text{если } k - \text{нечётное}. \quad (11)$$

Таким образом, если нам удастся найти такие полиномы, для которых выполнены любые 3 соотношения из (7)–(11), то мы сможем построить решение. Для нахождения полиномов использовался следующий алгоритм. Полиномы в общем виде со старшими коэффициентами, равными единице, подставлялись в выбранные 3 дифференциальных соотношения. Получающаяся система уравнений на коэффициенты полиномов и коэффициенты дифференциальных соотношений решалась с помощью программы Maple, и решения проверялись на корректность. Естественно, отбрасывались те решения, в которых получившиеся полиномы оказывались функционально зависимы ( $P_\alpha \sim P_\beta^b P_\gamma^c$ ). Приведём пример работы алгоритма для  $k = 4$ . В этом случае дифференциальные соотношения выглядят следующим образом:

$$a_1 \dot{P}_4 P_3 + b_1 P_4 \dot{P}_3 = P_2^3, \quad (12)$$

$$a_2 \dot{P}_4 = P_3, \quad (13)$$

$$b_3 \dot{P}_3 P_2 + c_3 P_3 \dot{P}_2 = P_4, \quad (14)$$

$$b_4 \dot{P}_3 = P_2. \quad (15)$$

Запишем полиномы  $P_4$ ,  $P_3$  и  $P_2$  в общем виде со старшими коэффициентами, равными единице.

$$P_4 = \tau^4 + q_1 \tau^3 + q_2 \tau^2 + q_3 \tau + q_4,$$

$$P_3 = \tau^3 + r_1 \tau^2 + r_2 \tau + r_3,$$

$$P_2 = \tau^2 + s_1 \tau + s_2.$$

Выберем 3 дифференциальных соотношения, например, (12)–(14) и подставим в них  $P_4$ ,  $P_3$  и  $P_2$ , тогда, приводя подобные слагаемые, имеем:

$$\begin{aligned} & (3b_1 + 4a_1 - 1)\tau^6 + (3a_1q_1 + 3b_1q_1 - 3s_1 + 4a_1r_1 + 2b_1r_1)\tau^5 + (b_1r_2 + 3a_1q_1r_1 + \\ & + 2b_1q_1r_1 - 3s_1^2 + 3b_1q_2 - 3s_2 + 4a_1r_2 + 2a_1q_2)\tau^4 + 2b_1q_2r_1 + 3a_1q_1r_2 + 4a_1r_3 - \\ & - 6s_1s_2 + b_1q_1r_2 + 3b_1q_3 + 2a_1q_2r_1 - s_1^3 + a_1q_3)\tau^3 + (2a_1q_2r_2 + 3a_1r_3q_1 + \\ & + a_1q_3r_1 + 3b_1q_4 + 2b_1q_3r_1 - 3s_1^2s_2 - 3s_2^2 + b_1q_2r_2)\tau^2 + (2a_1r_3q_2 + a_1q_3r_2 - \\ & - 3s_1s_2^2 + b_1q_3r_2 + 2b_1q_4r_1)\tau - s_2^3 + a_1r_3q_3 + b_1q_4r_2 = 0, \end{aligned}$$

$$(4a_2 - 1)\tau^3 + (3a_2q_1 - r_1)\tau^2 + (2a_2q_2 - r_2)\tau + a_2q_3 - r_3 = 0,$$

$$(2c_3 + 3b - 1)\tau^4 + (c_3s_1 + 2br_1 - q_1 + 2c_3r_1 + 3bs_1)\tau^3 + (3bs_2 + 2c_3r_2 + br_2 + 2bs_1r_1 - q_2 + c_3s_1r_1)\tau^2 + (2c_3r_3 - q_3 + c_3s_1r_2 + 2bs_2r_1 + bs_1r_2)\tau + bs_2r_2 - q_4 + c_3r_3s_1 = 0.$$

Приравнивая коэффициенты перед всеми степенями  $\tau$  к нулю, получаем систему уравнений, из которой находятся коэффициенты полиномов  $P_4$ ,  $P_3$  и  $P_2$ , а также коэффициенты дифференциальных соотношений  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_3$  и  $c_3$ . В данном случае эта система имеет несколько решений, из которых корректным является одно.

$$P_4 = \tau^4 + 4C_1\tau^3 + 10C_2\tau^2 + (20C_1C_2 - 8C_1^3)\tau + 4C_1^2C_2 + 5C_2^2 - \frac{16C_1^4}{5}, \quad (16)$$

$$P_3 = \tau^3 + 3C_1\tau^2 + 5C_2\tau + 5C_1C_2 - 2C_1^3, \quad (17)$$

$$P_2 = \tau^2 + 2C_1\tau - 5C_2 + 4C_1^2, \quad (18)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  – произвольные константы. Для этих полиномов выполнены следующие дифференциальные соотношения:

$$4\dot{P}_4P_3 - 5P_4\dot{P}_3 = P_2^3,$$

$$\dot{P}_4 = 4P_3,$$

$$4P_3\dot{P}_2 - \dot{P}_3P_2 = 5P_4,$$

а значит

$$\frac{dP_4^{4a}P_3^{-5a}}{d\tau} = aP_2^3P_4^{4a-1}P_3^{-5a-1}, \quad (19)$$

$$\frac{dP_4^c}{d\tau} = 4cP_3P_4^{c-1}, \quad (20)$$

$$\frac{dP_3^{-b}P_2^{4b}}{d\tau} = 5bP_4P_3^{-b-1}P_2^{4b-1}. \quad (21)$$

Выбрать  $f$ ,  $g$  и  $h$  из выражений под производной в левой части (19)–(21) можно шестью способами, соответственно получим 6 различных решений. Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  находятся из условия  $h = \dot{g}/f$ , а подставляя  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $\dot{f}$ ,  $\dot{g}$  и  $\dot{h}$  в (4) находим  $n$ ,  $m$  и  $l$ . Нетрудно проверить, что, например, для  $f = P_3^{-b}P_2^{4b}$ ,  $g = P_4^{4a}P_3^{-5a}$ ,  $h = P_4^c$  получается, что  $a = 1/5$ ,  $b = 1$ ,  $c = -6/5$ , а  $n = -3/4$ ,  $m = -9/4$ ,  $l = 7/6$ . В конечном итоге для уравнения

$$y'' = Ax^{-3/4}y^{-9/4}(y')^{7/6}$$

находим общее решение

$$x(\tau) = a_*C_{1*}^{25}P_{2*}^4P_{3*}^{-1}, \quad y(\tau) = b_*C_{1*}P_{3*}^{-1}P_{4*}^{4/5}, \quad A = -\frac{24 \cdot 5^{1/3}}{25}a_*^{-1/12}b_*^{25/12};$$

здесь

$$\begin{aligned} P_{2*} &= \tau^2 + 2C_{2*}\tau + 4C_{2*}^2, \\ P_{3*} &= \tau^3 + 3C_{2*}\tau^2 - 2C_{2*}^3, \\ P_{4*} &= \tau^4 + 4C_{2*}\tau^3 - 8C_{2*}^3\tau - \frac{16C_{2*}^4}{5}. \end{aligned} \quad (22)$$

Заметим, что полином  $P_{3*}$  является приводимым:

$$P_{3*} = (\tau + C_{2*})(\tau^2 + 2C_{2*}\tau - 2C_{2*}^2) = (\tau + C_{2*})(P_{2*} - 6C_{2*}^2).$$

Аналогичным образом можно взять любую другую тройку из соотношений (12)–(15), но решение удастся построить только для соотношений (13)–(15). Это будет одно из уже известных решений, хотя полиномы, получаемые таким способом, – более общего вида.

Рассмотрим другие значения  $k$ . Оказывается, что из соотношений (7)–(9) аналогичным образом всегда удаётся построить решение. Если принять  $C_2 = 0$ , то во всех этих случаях полином  $P_2$  имеет вид (22), а параметры (показатели) полученного элемента исходного класса уравнений для одного из решений имеют вид  $n = -\frac{k-1}{k}$ ,  $m = -\frac{2k+1}{k}$ ,  $l = \frac{k+3}{k+2}$ ; остальные элементы можно легко построить из соображений симметрии. Впрочем, все они располагаются на кривой

$$\left( n, -n - 3, \frac{3n+4}{2n+3} \right). \quad (23)$$

Согласно [1], все уравнения, векторы параметров которых принадлежат этой кривой, интегрируются в замкнутом виде через присоединённые функции Лежандра, однако решения в справочнике не приводятся из-за их громоздкости и неудобства (вместо решений дана ссылка [2]). Поэтому решения, полученные для счётного множества элементов кривой (23), являются новыми, они соответствуют тем случаям, когда решение уравнения Лежандра представляет собой полином.

Полиномы, доставляющие решения счётного множества точек кривой (23), имеют вид:

$$P_k(\tau) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{[\sqrt{3}C_1 + i(\tau + C_1)]^{k+1}}{\sqrt{3}(k+1)C_1} \right\}, & k = 2s, \\ \operatorname{Im} \left\{ -\frac{[\sqrt{3}C_1 + i(\tau + C_1)]^{k+1}}{\sqrt{3}(k+1)C_1} \right\}, & k = 2s + 1, \end{cases}$$

$s$  – натуральное.

Рассмотрим третью группу соотношений. В ней есть 4 соотношения для полиномов  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_6$  и по 3 соотношения для полиномов  $P_4$ ,  $P_6$ ,  $P_9$  и  $P_6$ ,  $P_{10}$ ,

$P_{15}$ . В общем виде эти соотношения для полиномов имеют вид

$$\begin{cases} a_1 \dot{P}_3 P_4 P_6 + b_1 P_3 \dot{P}_4 P_6 + c_1 P_3 P_4 \dot{P}_6 = P_4^3, \\ a_2 \dot{P}_3 P_4 P_6 + b_2 P_3 \dot{P}_4 P_6 + c_2 P_3 P_4 \dot{P}_6 = P_3^4, \\ a_3 \dot{P}_3 P_4 P_6 + b_3 P_3 \dot{P}_4 P_6 + c_3 P_3 P_4 \dot{P}_6 = P_6^2, \\ a_4 \dot{P}_3 P_4 P_6 + b_4 P_3 \dot{P}_4 P_6 + c_4 P_3 P_4 \dot{P}_6 = P_3^2 P_6, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} a_1 \dot{P}_4 P_6 P_9 + b_1 P_4 \dot{P}_6 P_9 + c_1 P_4 P_6 \dot{P}_9 = P_6^3, \\ a_2 \dot{P}_4 P_6 P_9 + b_2 P_4 \dot{P}_6 P_9 + c_2 P_4 P_6 \dot{P}_9 = P_4^3 P_6, \\ a_3 \dot{P}_4 P_6 P_9 + b_3 P_4 \dot{P}_6 P_9 + c_3 P_4 P_6 \dot{P}_9 = P_9^2, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} a_1 \dot{P}_6 P_{10} P_{15} + b_1 P_6 \dot{P}_{10} P_{15} + c_1 P_6 P_{10} \dot{P}_{15} = P_{10}^3, \\ a_2 \dot{P}_6 P_{10} P_{15} + b_2 P_6 \dot{P}_{10} P_{15} + c_2 P_6 P_{10} \dot{P}_{15} = P_6^5, \\ a_3 \dot{P}_6 P_{10} P_{15} + b_3 P_6 \dot{P}_{10} P_{15} + c_3 P_6 P_{10} \dot{P}_{15} = P_{15}^2. \end{cases} \quad (26)$$

Известны решения из первого, третьего и четвёртого соотношений (24), а также из соотношений (25) [1, 3, 4]. Соотношения (26), по-видимому, позволяют найти новую дискретную образующую на классе обобщённых уравнений Эмдена–Фаулера, заданную касательным преобразованием. Однако способ, использованный для группы с полиномом  $P_2$ , для этих соотношений оказывается неэффективным, так как трудоёмкость решения получившейся системы уравнений превосходит возможности программы Maple.

## Литература

- [1] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- [2] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993.
- [3] Зайцев В. Ф., Зайцев О. В. Об одном применении метода вложения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXVIII международной конференции «Герценовские чтения – 2015» (Санкт-Петербург, 13–17 апреля 2015 г.). – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 30–33.
- [4] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть IV. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 120 с.

## ГРУППЫ ЛИ, ДОПУСКАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОГО САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА

Клебанов И. И.<sup>1,2</sup>, Иванов С. А.<sup>2</sup>, Маслова О. В.<sup>1</sup>

Южно-уральский государственный гуманитарно-педагогический университет<sup>1</sup>

Южно-уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)<sup>2</sup>

Челябинск

e-mail: klebanov.igor2010@yandex.ru

**Klebanov I. I., Ivanov S. A., Maslova O. V., Lie groups admitted by the dynamics equations of self-gravitating polytropic gas.** It is established that the system of dynamics equations of non-relativistic polytropic perfect self-gravitating gas admits of infinite-dimensional Lie algebra with four arbitrary functions of time. In contrast to the case of arbitrary state equation the group of symmetries is expanded, allowing also dilations.

Установлено, что система уравнений динамики идеального нерелятивистского самогравитирующего политропного газа допускает бесконечномерную алгебру Ли с четырьмя произвольными функциями времени. В отличие от случая произвольного уравнения состояния группа симметрий расширяется, допуская также неоднородные растяжения.

Рассматривается система уравнений динамики идеального нерелятивистского самогравитирующего политропного газа, являющаяся базисной при моделировании в теории образования звёзд [1]. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \nabla \Phi + \nabla p / \rho = 0, \\ \Delta \Phi = 4\pi G \rho, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \nabla p + \gamma p \nabla \vec{v} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $p$  – давление,  $\Phi$  – гравитационный потенциал,  $\vec{v}$  – скорость,  $G$  – гравитационная постоянная,  $\gamma$  – показатель политропы,  $\nabla$  – оператор Гамильтона,  $\Delta$  – оператор Лапласа [2].

Наша цель – вычисление алгебры Ли, допускаемой системой (1) (случай  $p = 0$  и произвольного уравнения состояния рассмотрены в работах [3, 4, 5, 6]). Перепишем систему уравнений (1) (в безразмерных переменных) в декартовых

координатах

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \rho(u_x + v_y + \omega_z) + u\rho_x + v\rho_y + \omega\rho_z = 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + \omega u_z + \Phi_x + p_x/\rho = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \omega v_z + \Phi_y + p_y/\rho = 0, \\ \omega_t + u\omega_x + v\omega_y + \omega\omega_z + \Phi_z + p_z/\rho = 0, \\ \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} - \rho = 0, \\ p_t + up_x + vp_y + \omega p_z + \gamma p(u_x + v_y + \omega_z) = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $x, y, z$  – декартовы координаты,  $t$  – время,  $u, v, \omega$  – компоненты вектора скорости. Генератор группы будем искать в виде

$$X = \xi^{(x)}\partial_x + \xi^{(y)}\partial_y + \xi^{(z)}\partial_z + \xi^{(t)}\partial_t + \eta^{(\Phi)}\partial_\Phi + \eta^{(\rho)}\partial_\rho + \eta^{(p)}\partial_p + \eta^{(u)}\partial_u + \eta^{(v)}\partial_v + \eta^{(\omega)}\partial_\omega, \quad (3)$$

где компоненты касательного векторного поля  $\xi$  и  $\eta$  являются функциями всех независимых и зависимых переменных [7].

Расчет по стандартному алгоритму Ли–Овсянникова [7] с применением пакета GeM [8] приводит к определяющим уравнениям (ввиду громоздкости системы определяющих уравнений мы не приводим её в явном виде), решение которых дает бесконечномерную алгебру Ли с генераторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x \\ X_2 &= \partial_y \\ X_3 &= \partial_z \\ X_4 &= \partial_t \\ X_5 &= y\partial_z - z\partial_y + v\partial_\omega - \omega\partial_v \\ X_6 &= z\partial_x - x\partial_z + \omega\partial_u - u\partial_\omega \\ X_7 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u \\ X_8 &= 2\Phi\partial_\Phi - 2\rho\partial_\rho + u\partial_u + v\partial_v + u\partial_\omega + t\partial_t + 2x\partial_x + 2y\partial_y + 2z\partial_z \\ X_9 &= 2\rho\partial_\rho + 2p\partial_p - t\partial_t - x\partial_x - y\partial_y - z\partial_z \\ X_\infty^{(1)} &= -F_{1,tt}x\partial_\Phi + F_{1,t}\partial_u + F_1(t)\partial_x \\ X_\infty^{(2)} &= -F_{2,tt}y\partial_\Phi + F_{2,t}\partial_v + F_2(t)\partial_y \\ X_\infty^{(3)} &= -F_{3,tt}z\partial_\Phi + F_{3,t}\partial_\omega + F_3(t)\partial_z \\ X_\infty^{(4)} &= F_4(t)\partial_\Phi \end{aligned} \quad (4)$$

где  $F_i(t)$  – произвольные функции. Генераторы  $X_1, X_2, X_3, X_4$  соответствуют трансляциям,  $X_5, X_6, X_7$  – вращениям,  $X_8, X_9$  – неоднородным растяжениям,  $X_\infty^{(1)}, X_\infty^{(2)}, X_\infty^{(3)}$  являются обобщёнными преобразованиями Галилея,  $X_\infty^{(4)}$  означает калибровочную инвариантность. В случае  $F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = t, F_4(t) = 0$  мы видим, что алгебра Ли (4) содержит подалгебру, соответствующую группе Галилея, что является необходимым условием механической обоснованности модели. Таким образом, в случае политропного газа алгебра Ли расширяется

по сравнению с произвольным уравнением состояния [6], допуская неоднородные растяжения.

Работа выполнена по госзаданию Министерства образования и науки РФ (проект 1.8630.2017/БЧ «Групповой анализ уравнений динамики политропного самогравитирующего газа»). Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.А03.21.0011.

## Литература

- [1] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной. – М.: Наука, 1975. – 732 с.
- [2] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
- [3] Klebanov I., Startsun O., Ivanov S. Model of the Newtonian cosmology: Symmetries, invariant and partially invariant solutions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. – V. 39. – P. 248–251.
- [4] Klebanov I., Ivanov S. Group theoretical justification of a “simple” cosmological model // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015. V. 105, No. 3. – P. 377–381.
- [5] Клебанов И. И., Старцун О. В., Иванов С. А. Групповой анализ модели “Ньютоновская космология” // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2015. – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 33–36.
- [6] Клебанов И. И., Старцун О. В., Иванов С. А. Групповой анализ модели “Ньютоновская космология” // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2016. – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. – С. 89–92.
- [7] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
- [8] Shevyakov A. F. Symbolic Computation of Local Symmetries of Nonlinear and Linear Partial and Ordinary Differential Equations // Math. Comput. Sci., 2010; 4. – P. 203–222.

## СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Кожевникова Л. М., Камалетдинов А. Ш.  
Стерлитамакский филиал  
Башкирского государственного университета  
Стерлитамак  
e-mail: kosul@mail.ru

**Kozhevnikova L. M., Kamaletdinov A. Sh. Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains.** We consider a class of anisotropic elliptic differential equations of second order with divergent form and variable non-linearities. We obtain solvability conditions for the Dirichlet problem in unbounded domains  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . The proof of existence of solutions is free of restrictions on growth of data for  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

В работе рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с переменными нелинейностями. Изучаются условия разрешимости задачи Дирихле в неограниченных областях  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Доказано существование решений без ограничений на рост входных данных при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\Omega$  — произвольная область пространства  $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{i=1}^n (a_i(\mathbf{x}, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (1)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функции  $a_i(\mathbf{x}, s_0, s_1, \dots, s_n)$  имеют степенной рост по переменным  $s_i$  с показателями  $p_i(\mathbf{x}) \in (1, \infty)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . В качестве простейшего примера можно привести уравнение

$$\sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(\mathbf{x})-2} u_{x_i})_{x_i} - |u|^{p_0(\mathbf{x})-2} u = \sum_{i=1}^n (\varphi_i(\mathbf{x}))_{x_i} - \varphi_0(\mathbf{x}). \quad (3)$$

В 1984 году Н. Brezis [1] на примере уравнения

$$-\Delta u + |u|^{p_0-2} u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad p_0 > 2,$$

и его обобщений показал, что есть эллиптические уравнения в неограниченных областях, для которых существуют единственные решения соответствующих краевых задач без предположений на их поведение и рост входных данных на бесконечности.



В работе [2] Л. М. Кожевниковой, А. А. Хаджи для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями доказана теорема существования без ограничений на рост входных данных при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . М. М. Bokalo, О. V. Domanska в работе [3] исследовали краевые задачи в неограниченных областях для эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейностей, модельным примером которых является уравнение (3). Корректность краевых задач доказана без ограничений на поведение решений и условий на рост исходных данных на бесконечности. Следует отметить, что в работах [2], [3] установлено существование решений эллиптических уравнений в неограниченных областях с соответствующими операторами, удовлетворяющими условию монотонности. В настоящей работе рассматривается более широкий класс эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейностей с соответствующими псевдомонотонными операторами.

Пусть  $Q$  произвольная область пространства  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим

$$C^+(\overline{Q}) = \{p(\mathbf{x}) \in C(\overline{Q}) : 1 < p^- \leq p^+ < +\infty\},$$

где  $p^- = \inf_Q p(\mathbf{x})$ ,  $p^+ = \sup_Q p(\mathbf{x})$ .

Пусть  $p(\mathbf{x}) \in C^+(\overline{Q})$ . Определим лебегово пространство с переменным показателем  $L_{p(\cdot)}(Q)$  как множество измеримых на  $Q$  вещественнозначных функций  $v(\mathbf{x})$  таких, что:

$$\rho_{p(\cdot), Q}(v) = \int_Q |v(\mathbf{x})|^{p(\mathbf{x})} d\mathbf{x} < \infty.$$

Норма Люксембурга в пространстве  $L_{p(\cdot)}(Q)$  определяется равенством

$$\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \|v\|_{p(\cdot), Q} = \inf \left\{ k > 0 \mid \rho_{p(\cdot), Q}(v/k) \leq 1 \right\}.$$

Пространство  $L_{p(\cdot)}(\Omega)$  является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством.

Пусть  $\vec{p}(\mathbf{x}) = (p_0(\mathbf{x}), p_1(\mathbf{x}), \dots, p_n(\mathbf{x})) \in (C^+(\overline{\Omega}))^{n+1}$ , положим

$$p_+(\mathbf{x}) = \max_{i=1, n} \{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_n(\mathbf{x})\}.$$

Предполагается, что функции  $a_i(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s})$ ,  $i = 0, \dots, n$ , измеримы по  $\mathbf{x} \in \Omega$  для  $\mathbf{s} = (s_0, \mathbf{s}) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , непрерывны по  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n+1}$  для почти всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Кроме того, существуют положительные измеримые функции  $\varphi(\mathbf{x})$ ,  $\Phi(\mathbf{x})$  и неотрицательные измеримые функции  $\varphi_i(\mathbf{x})$ ,  $\Phi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , такие, что для п. в.  $\mathbf{x} \in \Omega$  и любых  $\mathbf{s} = (s_0, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  справедливы неравенства

$$|a_i(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s})| \leq \Phi(\mathbf{x})(|s_i|^{p_i(\mathbf{x})-1} + |s_0|^{p_0(\mathbf{x})/p_i(\mathbf{x})}) + \Phi_i(\mathbf{x}), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s}) - a_i(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{t}))(s_i - t_i) > 0, \quad \mathbf{s} \neq \mathbf{t}; \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s}) s_i \geq \varphi(\mathbf{x}) \sum_{i=0}^n |s_i|^{p_i(\mathbf{x})} - \varphi(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Введем обозначение  $v_{x_0} = v$ . Определим пространство Соболева с переменными показателями  $\dot{W}_{\bar{\mathbf{p}}(\cdot)}^1(Q)$  как пополнение пространства  $C_0^\infty(Q)$  по норме

$$\|v\|_{\dot{W}_{\bar{\mathbf{p}}(\cdot)}^1(Q)} = \|v\|_{p_0(\cdot), Q} + \|v\|_{\dot{H}_{\bar{\mathbf{p}}(\cdot)}^1(Q)} = \sum_{i=0}^n \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot), Q}.$$

Пусть

$$\bar{p}(\mathbf{x}) = n \left( \sum_{i=1}^n 1/p_i(\mathbf{x}) \right)^{-1}, \quad p_*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{n\bar{p}(\mathbf{x})}{n - \bar{p}(\mathbf{x})}, & \bar{p}(\mathbf{x}) > n, \\ +\infty, & \bar{p}(\mathbf{x}) \leq n. \end{cases}$$

Будем считать, что

$$p_0(\mathbf{x}) < p_*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (7)$$

$$p_+(\mathbf{x}) \leq p_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8)$$

Определим  $L_{\infty, \text{loc}}(\bar{\Omega})$ ,  $L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega})$ ,  $\dot{W}_{\bar{\mathbf{p}}(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$  как пространства, состоящие из функций  $v(\mathbf{x})$ , определенных в  $\Omega$ , для которых при любой ограниченной  $Q \subset\subset \Omega$  найдётся функция из пространства  $L_\infty(\Omega)$ ,  $L_1(\Omega)$ ,  $\dot{W}_{\bar{\mathbf{p}}(\cdot)}^1(\Omega)$ , соответственно, совпадающая с функцией  $v(\mathbf{x})$  в  $Q$ .

Будем считать, что неотрицательные функции

$$\varphi \in L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega}), \quad \Phi_i \in L_{p'_i(\cdot), \text{loc}}(\bar{\Omega}), \quad p'_i(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}) / (p_i(\mathbf{x}) - 1), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (9)$$

$$1/\varphi, \varphi, \Phi \in L_{\infty, \text{loc}}(\bar{\Omega}). \quad (10)$$

**Определение 1.** Обобщенным решением задачи (1), (2), (9), (10) назовем функцию  $u(\mathbf{x}) \in \dot{W}_{\bar{\mathbf{p}}(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{x}, u, \nabla u) v_{x_i} d\mathbf{x} = 0$$

для любой функции  $v(\mathbf{x}) \in \dot{W}_{\bar{\mathbf{p}}(\cdot)}^1(\Omega)$  с ограниченным носителем.

**Теорема 1.** Если выполнены условия (4)–(8), то существует обобщенное решение задачи (1), (2), (9), (10).

Доказательство теоремы в ближайшее время будет опубликовано авторами в открытой печати.

## Литература

- [1] Brezis H. Semilinear equations in  $R_N$  without condition at infinity // Appl. Math. Optim. 1984. Т. 12, № 3. – С. 271–282.
- [2] Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях // Матем. сборник. 2015. – Т. 206, – № 8. – С. 1123–1149.

- [3] Bokalo M., Domanska O. On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces // *Mathematychni Studii*. 2007. – Т. 28, – № 1. – С. 77–91.

УДК 517.9

## К ТЕОРИИ ДВУХЧАСТИЧНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

Лагодинский В. М.

Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения

Санкт-Петербург  
e-mail: lagodinskiy@mail.ru

**Lagodinskiy V. M. On the theory of relativistic two-particle Shrödinger equation.** It is shown that the relativistic two-particle Shrödinger equation yields the relativistic invariant description of the sistem of two spinless particles interacting via aspherically symmetric potential.

В работе показано, что двухчастичное релятивистское уравнение Шрёдингера даёт релятивистски инвариантное описание системы двух бесспиновых частиц, взаимодействующих посредством центрально-симметричного потенциала.

**Введение.** Принято считать [1], что релятивистская квантовая теория бесспиновых частиц должна быть основана на уравнении Клейна–Гордона (УКГ), однако это уравнение приводит ко многим существенным трудностям. Наиболее известной из этих трудностей является наличие решений, соответствующих отрицательным значениям энергии, но есть и много других: парадокс Клейна, появление комплексных значений энергии водородоподобного  $\pi$ -атома с атомным номером  $Z > 68$  [2], знаконеопределённая плотность вероятности и т. д. Но, по-видимому, наибольшее влияние на все современное развитие релятивистской квантовой теории оказало принципиальное различие в способах описания физических систем, состоящих из  $N$  частиц, с помощью нерелятивистского уравнения Шрёдингера (НУШ) и УКГ. Напомним, что в нерелятивистской квантовой механике такая система описывается одним НУШ, которое является уравнением относительно одной волновой функции  $3N + 1$  переменных:  $3N$  координат и времени. Но многочастичное УКГ невозможно. Причина этого состоит в том, что УКГ для свободной бесспиновой частицы получается, если стандартную замену

$$\varepsilon \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \nabla \quad (1)$$

(используем систему единиц, в которой постоянная Планка  $\hbar$  и скорость света  $c$  равны единице) произвести не в выражении для энергии, как для получения НУШ, а в выражении для квадрата энергии:  $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ . Это делается потому, что если указанную замену произвести в релятивистском выражении для

энергии:

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

то получается необычное уравнение:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \sqrt{m^2 - \nabla^2}\Psi, \quad (2)$$

где  $\Psi = \Psi(t, \mathbf{r})$ . Это уравнение или аналогичное ему приводится многими авторами, но обычно лишь для того, чтобы объявить о его непригодности для релятивистской квантовой теории [1, 3], считая это уравнение несимметричным относительно пространства и времени, а оператор, имеющий вид квадратного корня из дифференциального оператора — нелокальным. На этом основании возводят операторы в обеих частях уравнения в квадрат и получают УКГ. Но энергия системы  $N$  свободных частиц равна сумме энергий этих частиц, и однократным возведением в квадрат от корней не избавиться, а при многократном могут появиться и комплексные энергии.

В настоящее время принято считать, что адекватной релятивистской квантовой теорией взаимодействия частиц является квантовая теория поля (КТП), в которой физическая система, состоящая из взаимодействующих бесспиновых частиц  $N$  сортов описывается системой  $N$  УКГ, каждое из которых соответствует одному сорту частиц, причем взаимодействие должно учитываться введением дополнительных членов, билинейных по полям отдельных сортов частиц. Конечно, это приводит, во-первых, к резкому различию между релятивистской и нерелятивистской квантовыми теориями взаимодействия бесспиновых частиц, во-вторых, к невозможности точного решения подобных задач из-за их нелинейности. Используется теория возмущений, которая обязательно приводит к расходимостям, преодолеваемым чисто рецептурными средствами — перенормировками.

Имея целью не только достичь согласия теории с экспериментом, но и понять закономерности физических явлений, представляется интересным рассмотреть возможность альтернативного к КТП подхода, основанного на уравнении (2). Действительно ли оно непригодно для построения математически корректной и правильно описывающей физические явления теории?

Прежде всего, для релятивистской инвариантности уравнения его симметричность относительно координат и времени необязательна, выражение (1) несимметрично относительно  $\varepsilon$  и  $\mathbf{p}$ . Необходима лишь инвариантность множества решений уравнения относительно преобразований Лоренца [4]. А нелокальным это уравнение считали лишь потому, что оператор, имеющий вид квадратного корня из дифференциального оператора, определялся с помощью импульсного представления, т. е. трёхмерного преобразования Фурье. Это определение вполне соответствует определению, данному Дж. фон Нейманом [5], которое функции  $f(z)$  комплексного переменного и самосопряжённому оператору  $A$ , имеющему собственные значения  $\alpha$  и собственные функции  $\varphi(\alpha, x)$  сопоставляет самосопряжённый оператор  $f(A)$ , имеющий те же собственные функции и собственные значения  $f(\alpha)$ . Нетрудно, однако, показать уже в случае функции  $\varphi(x) = x^2$  это определение не работает. Действительно, самосопряжённый вариант оператора  $-d^2/dx^2$  может быть определён различными способами и его собственные функции могут быть не такими, как у оператора  $-id/dx$ . В

частности на промежутке  $[0, \infty)$  последний вообще не может быть определен как самосопряжённый, а оператор  $-d^2/dx^2$  может [6].

Следуя Треву [7], мы называем локальным линейный оператор  $A$ , если из  $f(x) = 0, \forall x \in M$ , где  $M$  — открытое множество, следует  $(Af)(x) = 0, \forall x \in M$ . Имея локальное определение гамильтониана, мы можем найти общее решение уравнения Шрёдингера, а затем определить те значения энергии, при которых это решение можно подчинить поставленным граничным условиям и найти решения, удовлетворяющие этим условиям. Если эти условия удовлетворяют определенным требованиям, мы получаем наборы функций и значений энергии, которые можно рассматривать как собственные функции и собственные значения некоторого самосопряжённого дифференциального оператора. Таким образом, самосопряжённый оператор — это не то, чем мы оперируем в процессе решения задачи, а результат её решения.

Определение функции дифференциального оператора, приводящее к локальному оператору, в частности, определение квадратного корня из дифференциального оператора, предложено автором настоящей работы [8]. Это определение сопоставляет оператору  $D$  и функции комплексного переменного  $f(z)$  (голоморфной на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов, точек ветвления и разрезов, соединяющих каждую из точек ветвления с бесконечно удаленной точкой, а продолжения этих разрезов пересекаются в начале координат, где функция  $f(z)$  голоморфна) оператор, который любой функции  $u(x)$ , такой, что множество предельных точек последовательности

$$\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ |(D^n u)(x)|^{1/n} \exp\left(i \frac{\varphi_n}{n}\right) \right\}_{n=0}^{\infty},$$

где  $\varphi_n = \arg(D^n u)(x)$ , при любом  $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$  ограничено и включает лишь те точки, в которых функция  $f(z)$  голоморфна, сопоставляет функцию, определенную на  $(a, b)$  и принимающую в каждой точке  $x \in (a, b)$  значения, получающиеся из функции

$$(f(\alpha D)u)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \alpha^n (D^n u)(x), \quad \forall x \in (a, b) \quad (3)$$

аналитическим продолжением по вещественному параметру  $\alpha$  от  $\alpha = 0$  до  $\alpha = 1$ . Это соответствие между множеством функций  $F = \{f(z)\}$  и множеством дифференциальных операторов (вообще говоря) бесконечного порядка  $\hat{F} = \{f(D)\}$  есть изоморфизм коммутативных колец: сумме функций  $f_1(z) + f_2(z)$  соответствует сумма операторов  $f_1(D) + f_2(D)$ , а произведению функций  $f_1(z)f_2(z)$  — произведение операторов  $f_1(D)f_2(D) = f_1(D)f_2(D)$  (т. е. их последовательное действие). В частности, если  $u(x) = \exp(ikx) \forall x \in (a, b)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$(H_m u)(x) = \sqrt{m^2 - \partial_x^2} u(x) = \sqrt{m^2 + k^2} \exp(ikx), \quad \forall x \in (a, b), \quad (4)$$

$$(H_m^{-1} u)(x) = (m^2 - \partial_x^2)^{-1/2} u(x) = (m^2 + k^2)^{-1/2} \exp(ikx), \quad \forall x \in (a, b), \quad (5)$$

$$(V_m u)(x) = -i (m^2 - \partial_x^2)^{-1/2} \partial_x u(x) = \frac{k}{\sqrt{m^2 + k^2}} \exp(ikx), \quad \forall x \in (a, b), \quad (6)$$

где  $\partial_x \equiv d/dx$ . Очень важно, что функция  $u(x) = \exp(\chi x)$ , если  $\chi \in \mathbb{R}$  и  $\chi > m$  не принадлежит области определения оператора  $H_m$ .

Таким образом, ничто не мешает рассматривать уравнение (2) с нашим определением квадратного корня из оператора как релятивистское обобщение НУШ. Естественно называть уравнение (2) с так определенным квадратным корнем из дифференциального оператора релятивистским уравнением Шрёдингера (РУШ). В работе [8] также построена спектральная теория граничных задач для стационарного свободного одномерного РУШ:

$$\left( \varepsilon - \sqrt{m^2 - \frac{d^2}{dx^2}} \right) u(x) = 0$$

и доказана инвариантность уравнения (2) относительно преобразований Лоренца. Эти результаты позволяют надеяться построить адекватную квантово-релятивистскую теорию взаимодействия двух бесспиновых частиц на основе двухчастичного релятивистского уравнения Шрёдингера:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{m_1^2 - \nabla_1^2} - \sqrt{m_2^2 - \nabla_2^2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right] \Psi(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0, \quad (7)$$

где  $m_i$ ,  $\nabla_i$  — масса покоя и оператор градиента по координатам  $i$ -ой частицы соответственно,  $i = 1, 2$ ,  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  — расстояние между частицами.

В настоящей работе будет построено представление группы Лоренца, относительно которого это уравнение инвариантно, найдено выражение для потока и сформулированы и решены некоторые граничные задачи для уравнения (7). При этом, ориентируясь на описание точечного взаимодействия двух бесспиновых частиц, будем считать, что их импульсы направлены вдоль одной и той же прямой.

**Инвариантность двухчастичного РУШ.** Пусть в (7) потенциал  $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  обладает малым радиусом действия  $\rho$ . Поскольку пара частиц образует замкнутую физическую систему, её полная энергия  $\varepsilon$  и импульс  $\mathbf{P}$  сохраняются. Используя (4), получим решение уравнения (7) в области, где расстояние между частицами больше  $\rho$  в виде:

$$\Psi(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp(-i\varepsilon t) \{ \exp(i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1 + i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}_2) + A \exp[i(\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{k}) \mathbf{r}_1 + i(\mathbf{p}_2 + 2\mathbf{k}) \mathbf{r}_2] \}, \quad (8)$$

если выполнены равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_1^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2} = \\ &= \sqrt{m_1^2 + (\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{k})^2} + \sqrt{m_2^2 + (\mathbf{p}_2 + 2\mathbf{k})^2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \end{aligned} \quad (9)$$

$A \in \mathbb{C}$ . Считая, что импульсы  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  направлены вдоль оси  $X$ , находим из первого из равенств (9) выражение для вектора  $\mathbf{k}$ :

$$k_x = \frac{\varepsilon(p_{1x}\varepsilon_2 - p_{2x}\varepsilon_1)}{\varepsilon^2 - P^2}, \quad k_y = k_z = 0, \quad (10)$$

где  $\varepsilon_i = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}_i^2}$ ,  $i = 1, 2$ .

Представим решение (8) в виде:

$$\Psi(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp[i(\mathbf{P}\mathbf{R} - \varepsilon t)] \{ \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] + A \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{R} = a_1 \mathbf{r}_1 + a_2 \mathbf{r}_2$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  — инвариантные постоянные, значение которых ещё нужно определить. Сравнивая (8) и (11), получим:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}a_1 + \mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{P}a_2 - \mathbf{k}. \quad (12)$$

В системе центра импульсов (СЦИ) решение (11) имеет вид:

$$\Psi^0(t^0, \mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0) = \exp(-i\varepsilon^0 t^0) \{ \exp[i(\mathbf{k}^0(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_2^0))] + A^0 \exp[-i(\mathbf{k}^0(\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_2^0))] \}, \quad (13)$$

где

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0 = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^0{}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^0{}^2}.$$

Очевидно, в СЦИ начало отсчёта выражается формулой:

$$R^0 = \frac{\varepsilon_1^0 \mathbf{r}_1 + \varepsilon_2^0 \mathbf{r}_2}{\varepsilon^0} = 0. \quad (14)$$

Пусть система отсчёта, в которой решение имеет вид (8), движется относительно СЦИ со скоростью  $V$  вдоль оси  $X$ . Тогда, используя преобразования Лоренца, получаем:

$$p_{1x} = \frac{k_x^0 + V\varepsilon_1^0}{\sqrt{1-V^2}}, \quad p_{2x} = \frac{-k_x^0 + V\varepsilon_2^0}{\sqrt{1-V^2}}, \quad p_{iy} = p_{iz} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon^0 + VP}{\sqrt{1-V^2}}. \quad (15)$$

Следовательно,

$$P = P_x = \frac{V\varepsilon^0}{\sqrt{1-V^2}}, \quad \varepsilon^0 = \varepsilon\sqrt{1-V^2} = \sqrt{\varepsilon^2 - P^2}, \quad V = \frac{P}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Отсюда, и из (15) получаем:

$$k^0 = \frac{p_{1x}\varepsilon_2 - p_{2x}\varepsilon_1}{\varepsilon^0} = k \frac{\varepsilon^0}{\varepsilon}, \quad p_{1x} = k + P \frac{\varepsilon_1^0}{\varepsilon^0}, \quad p_{2x} = -k + P \frac{\varepsilon_2^0}{\varepsilon^0}. \quad (17)$$

Сравнив (15) и (12), получаем:  $a_i = \varepsilon_i^0/\varepsilon^0$ ,  $i = 1, 2$ . Выполним замену переменных:

$$\mathbf{R} = \frac{\varepsilon_1^0 \mathbf{r}_2 + \varepsilon_2^0 \mathbf{r}_1}{\varepsilon^0} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (18)$$

Используя преобразования Лоренца для переменных  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ :

$$x_i = \frac{x_i^0 + Vt^0}{\sqrt{1-V^2}}, \quad y_i = y_i^0, \quad z_i = z_i^0, \quad i = 1, 2$$

и (14), получаем преобразования Лоренца для переменных  $t, \mathbf{R}, \mathbf{r}^0$ :

$$t = \frac{t^0}{\sqrt{1-V^2}}, \quad R_x = \frac{Vt^0}{\sqrt{1-V^2}}, \quad R_y = R_z = 0, \quad \mathbf{r}^0 = \text{inv}. \quad (19)$$

Кроме того, заметим, что переменные  $\mathbf{r}_1^0$ ,  $\mathbf{r}_2^0$  описывают нашу физическую систему в СЦИ, поэтому инвариантны. Пусть потенциальная энергия взаимодействия частиц в СЦИ есть  $U^0(r^0)$ , тогда инвариантно уравнение:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\left( \sqrt{m_1^2 - \nabla_0^2} + \sqrt{m_2^2 - \nabla_0^2} + U^0(r^0) \right)^2 - \nabla_R^2} \right] \Psi(t, \mathbf{R}, \mathbf{r}) = 0, \quad (20)$$

где  $\nabla_0$  — градиент по координатам вектора  $\mathbf{r}^0$ , а  $\nabla_R$  — градиент по координатам вектора  $\mathbf{R}$ .

Преобразования (19) определяют приводимое представление группы Лоренца. Оператор в уравнении (20) есть функция от двух дифференциальных операторов  $\nabla_0$  и  $\nabla_R$ . Такие функции можно определить в виде ряда Тейлора, аналогично ряду Тейлора функции двух переменных. Переменные  $t$ ,  $\mathbf{r}^0$  и  $\mathbf{R}$  в уравнении (20) разделяются.

Итак, получено двухчастичное релятивистское уравнение Шрёдингера, в котором переменные разделены и доказана релятивистская инвариантность этого уравнения.

## Литература

- [1] Бьеркен Дж., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 1. Релятивистская квантовая механика. — М.: Наука, 1978. — 297 с.
- [2] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля, Т. 1. — М.: Мир, 1984. — 448 с.
- [3] Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979. — 408 с.
- [4] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.
- [5] Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964. — 367 с.
- [6] Рихтмаер Р. Принципы современной математической физики. — М.: Мир, 1982. — 482 с.
- [7] Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1984. — 359 с.
- [8] Лагодинский В. М. Голоморфные функции дифференциальных операторов и дифференциальные уравнения бесконечного порядка. Диссерт. на соискания уч. степени канд. физ.-мат. наук. СПб. 2005.



## О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ

Линчук Л. В.

Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет  
Санкт-Петербург  
e-mail: lidiya\_linchuk@mail.ru

**Linchuk L. V. On the first integrals of generalized Rayleigh equation.** We consider generalized Rayleigh equation. The first integrals and alternative generalized operators admitted by the equation are looking for.

Рассматривается обобщённое уравнение Рэля. Ищутся его допускаемые альтернативные обобщённые операторы и первые интегралы.

Поиск первых интегралов (законов сохранения) для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) не менее актуален, чем поиск симметрий (операторов, допускаемых ОДУ), так как позволяет понизить порядок уравнения и получить дополнительную информацию о множестве решений. В каком-то смысле знание первого интеграла даже более информативно: мы получаем уравнение меньшего порядка относительно **исходных** переменных и явную зависимость от одной из произвольных констант. Это позволяет уже на промежуточной стадии решения удовлетворить одному из краевых или начальных условий и тем самым существенно облегчить дальнейшее решение задачи.

Как известно, любой известный метод поиска первых интегралов в общем виде является неалгоритмичным, и для реализации требует какого-то изначального предположения – анзаца, например, задания структуры зависимости первого интеграла от старшей производной (без анзаца оба общеизвестных метода неэффективны). Заметим впрочем, что анзац требуется и для алгоритмов группового анализа – классический метод С. Ли основан на поиске **точечных** преобразований, что само по себе является анзацем, причём достаточно жёстким. Поэтому часто успех в решении задачи определяется удачным выбором исходного предположения. Это обстоятельство стимулирует поиск других методов, которые при схожих анзацах могут дать иные результаты. Один из этих методов прямо следует из 2-ой теоремы о факторизации [1] и применения альтернативных симметрий [2].

Рассмотрим класс обобщённых уравнений Рэля

$$y'' + f(y)g(y') + h(y) = 0. \quad (1)$$

Уравнения такого типа часто встречаются в задачах нелинейной механики. Частными случаями уравнения (1) является хорошо известное уравнение Лье-нара [3]. Очевидно, в силу автономности уравнение (1) допускает оператор  $X_1 = \partial_x$ . Понижение порядка  $y' = p(y)$  приводит к уравнению

$$pp' + f(y)g(p) + h(y) = 0, \quad (2)$$

решить которое в аналитическом виде можно лишь для очень небольшого количества троек  $(f, g, h)$ . Исключениями являются лишь случаи, когда  $g(p) = p^2$  (тогда уравнение (2) сводится к линейному) и  $g(p) = ap^4 + bp^2$  (уравнение (2) приводится к уравнению Риккати, а следовательно, линеаризуется). Даже при  $g(p) = p$  мы получаем уравнение Абеля 2-го рода, как следствие уравнения Льенара.

Заметим, что в редких случаях уравнение (1) для некоторой тройки функций  $(f, g, h)$  удаётся проинтегрировать с помощью современных систем аналитических вычислений (например, MAPLE), но это не всегда помогает при решении ряда задач математического моделирования – при построении промежуточной модели требуется найти уравнение, удовлетворяющее некоторым **априорным условиям**, например условию разрешимости в конечном аналитическом виде. По существу это – обратная задача, и алгоритмы её решения пока находятся на стадии активной разработки.

Если обыкновенное дифференциальное уравнение допускает некоторый альтернативный обобщённый оператор (в частности, точечный), то первый интеграл получается в результате решения соответствующей факторсистемы. К сожалению, при этом возникает несколько сложностей, связанных как с разрешимостью уравнения на инварианты допускаемого оператора, так и с решением самой факторсистемы. Поэтому, формулируя обратную задачу, приходится накладывать дополнительные условия на коэффициенты оператора. Например, при исследовании симметрий класса обобщённых уравнений Релея (1) допускаемый оператор искался в виде

$$X = \partial_x + \alpha(x, y)y^k \partial_y + \beta(x, y)y^m \partial_{y'}.$$

Одним из первых результатов, который получился, было уравнение

$$y'' + ae^{3y}(y')^{-1} + be^{2y} = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

допускающее оператор

$$X = \partial_x - x^{-1} \partial_y - x^{-1} y' \partial_{y'}.$$

Это уравнение, как оказалось, допускает двумерную точечную алгебру, следовательно имеет факторсистему:

$$\begin{cases} t = xe^y, \\ u = -xy', \\ u' = \frac{au^3 - ut - bt^3}{t^2(u - 1)}. \end{cases}$$

Но интересной получилась форма его первого интеграла: он автономный и выражается через квадратуры от дробно-рациональных функций

$$I = y + \int \frac{z^2 dz}{z^3 + bz + a}, \quad z = y'e^{-y},$$

при этом сам интеграл дробно-рациональной функцией не является. Такого рода конструкции удобны для исследования пакетами символьных вычислений,

так как эти пакеты хорошо справляются с задачами на расщепление многочленов на слагаемые по степеням переменных, а следовательно, дают возможность проводить исследования задач с достаточно большими степенями и большим числом слагаемых. К тому же автономность первого интеграла уравнения 2-го порядка гарантирует нам решение исходного уравнения в квадратурах (допускаемый оператор  $X = \partial_x$  является в этом случае оператором вариационной симметрии).

Поэтому возникла гипотеза, что существует подкласс уравнений класса (1), обладающих первым интегралом вида

$$I = y + \int \frac{P(z) dz}{Q(z)}, \quad z = u(y')v(y),$$

где  $P(z)$ ,  $Q(z)$  – многочлены. В результате удалось обобщить уравнение (3) и получить ещё два модельных уравнения:

1) уравнение

$$y'' + ae^{(2-n)y}(y')^n + be^{2y} = 0$$

и его первый интеграл

$$I = y + \int \frac{z dz}{az^n + z^2 + b}, \quad z = y'e^{-y};$$

2) уравнение

$$y'' + y^{-1}(y')^2(ay' - 1) + by^2 = 0$$

и его первый интеграл

$$I = y + \int \frac{z dz}{az^3 + b}, \quad z = y'/y;$$

3) уравнение

$$y'' + 2y^{-1}(y')^2(a(y')^2 - 1) + by = 0$$

и его первый интеграл

$$I = y + \int \frac{z dz}{az^2 + 2b}, \quad z = (y')^2/y.$$

Естественным для группового анализа возникает вопрос об операторах, инварианты которых факторизуют уравнение таким образом, что решение внешнего уравнения факторсистемы даёт первый интеграл. Действительно, если для уравнения

$$y'' = F(x, y, y')$$

факторсистема имеет вид

$$\begin{cases} u = u(x, y, y'), \\ t = t(x, y, y'), \\ u'_t = 0, \end{cases}$$

то  $u = u(x, y, y')$  – первый интеграл исходного уравнения. Как оказалось, для всех полученных уравнений класса (1) первый интеграл является инвариантом оператора

$$X = y' \partial_y - [f(y)g(y') + h(y)] \partial_{y'} = y' \partial_y + y'' \Big|_{(1)} \partial_{y''} = (D_x - \partial_x) \Big|_{(1)}.$$

Это совпадение не случайно. Любое автономное уравнение

$$y'' = F(y, y') \quad (4)$$

в качестве допускаемого оператора уже имеет оператор переноса  $\partial_x$  и оператор полной производной  $D_x$ , поэтому оно также допускает альтернативный обобщённый оператор

$$X = (D_x - \partial_x) \Big|_{(4)} = y' \partial_y + y'' \Big|_{(4)} \partial_{y'}. \quad (5)$$

Рассмотрим инвариант этого оператора  $U = U(y, y')$ , который удовлетворяет уравнению

$$y' U_y + y'' \Big|_{(4)} U_{y'} = 0. \quad (6)$$

Покажем, что он будет первым интегралом уравнения (4). Действительно

$$D_x(U) \Big|_{(4)} = (U_y + y'' U_{y'}) \Big|_{(4)} = y' U_y + y'' \Big|_{(4)} U_{y'} = [(6)] = 0.$$

Таким образом, все первые интегралы автономного уравнения (4) являются первым дифференциальным инвариантом оператора (5).

Найденные выше частные случаи обобщённого уравнения Рэля являются новыми и отсутствуют в справочнике [1]. Они могут использоваться в качестве эталонных или промежуточных моделей при решении задач нелинейной механики.

## Литература

- [1] Зайцев В. Ф. Формальные операторы и теоремы о факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений // “Симметрия и дифференциальные уравнения”, труды III международной конференции. – Красноярск, 2002. – С. 101–105.
- [2] Линчук Л. В. Альтернативные обобщённые симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”, материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2010” (12–17 апреля 2010 г.). – СПб: Издательство БАН, 2010. – С. 46–53.
- [3] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

## НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ АВТОНОМНЫХ И ЦИЛИНДРИЧНЫХ АБСОЛЮТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Проневич А. Ф.

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

Гродно, Беларусь

e-mail: pranevich@grsu.by

**Pranevich A. F. Necessary conditions for the existence of autonomous and cylindrical absolute integral invariants of the first order.** We consider normal ordinary non-autonomous differential systems. The necessary conditions for the existence of autonomous and cylindrical absolute integral invariants of the first order are obtained.

**Keywords:** ordinary differential system, integral invariant of the first order.

Для нормальной обыкновенной неавтономной дифференциальной системы получены необходимые условия существования автономных и цилиндрических по части зависимых переменных абсолютных интегральных инвариантов первого порядка.

**Ключевые слова:** обыкновенная дифференциальная система, интегральный инвариант первого порядка.

Для нормальной обыкновенной дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где функции  $X_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывно дифференцируемы на области  $D = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ , из расширенного фазового пространства  $\mathbb{R}^{1+n}$ , В. И. Мироненко [1; 2, с. 17–19] был разработан метод нахождения автономных первых интегралов. В. Н. Горбузовым в работах [3; 4, с. 106–120, 164–167; 5] наряду с автономными первыми интегралами была решена задача наличия автономных частных интегралов и автономных последних множителей Якоби в случаях, когда они зависят не обязательно от всех фазовых переменных. В данной статье предлагается с этой точки зрения рассмотреть вопрос существования у дифференциальной системы (1) автономных абсолютных интегральных инвариантов первого порядка, которые зависят не от всех фазовых переменных.

Основы теории интегральных инвариантов были заложены А. Пуанкаре в мемуаре «О проблеме трёх тел и уравнениях динамики» [6] и позднее изложены им в расширенном виде в книги «Новые методы небесной механики» [7]. При этом важные конкретные примеры интегральных инвариантов были известны и ранее (например, теоремы У. Томсона и Г. Л. Ф. Гельмгольца из гидродинамики о сохранении циркуляции и потока вихря [8, с. 122–127]). Дальнейшее развитие направления связано с работами Э. Картана [9; 10], который при изучении дифференциальных уравнений, допускающих данные преобразования, пришел к рассмотрению дифференциальных выражений, названных им интегральными формами: они характеризуются тем свойством, что могут быть выражены через первые интегралы данных дифференциальных уравнений и

через их дифференциалы. Оказалось, что понятие интегральной формы не отличается существенно от понятия интегральный инвариант. Сопоставляя эти два понятия Э. Картан в работе «Лекции об интегральных инвариантах» [10] с помощью метода внешних форм завершил построение теории интегральных инвариантов. Научный обзор результатов по теории интегральных инвариантов, полученных после классических работ А. Пуанкаре и Э. Картана, сделан В. В. Козловым в работе «Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана» [11].

С целью однозначного толкования определим используемые понятия.

*Интегральным инвариантом первого порядка* [10, с. 37] дифференциальной системы (1) будем называть криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_L \sum_{i=1}^n J_i(t, x) \delta x_i, \quad J_i \in C^1(D'), \quad D' \subset D, \quad (2)$$

где  $L$  есть произвольная гладкая кривая из области  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  фазового пространства  $\mathbb{R}^n$ , который сохраняет постоянное значение в процессе движения точек кривой  $L$  вдоль интегральных кривых системы (1).

Интегральный инвариант (2) называется *абсолютным*, если свойство инвариантности имеет место для любых кривых интегрирования, и *относительным*, если это свойство имеет место только для замкнутых кривых.

Критерий существования у дифференциальной системы (1) абсолютного интегрального инварианта первого порядка (2) выражает

**Теорема 1** [12, с. 141–142]. Обыкновенная дифференциальная система (1) допускает абсолютный интегральный инвариант первого порядка (2), если и только если имеет место система тождеств

$$\mathfrak{X} J_i(t, x) + \sum_{\xi=1}^n J_{\xi}(t, x) \partial_{x_i} X_{\xi}(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in D', \quad i = 1, \dots, n,$$

где линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathfrak{X}(t, x) = \partial_t + \sum_{i=1}^n X_i(t, x) \partial_{x_i} \quad \forall (t, x) \in D.$$

Интегральный инвариант первого порядка (2) системы (1) назовем *автономным*  $(n-k)$ -цилиндричным, если функции  $J_i: D' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , зависят только от  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

Поставим задачу существования у системы (1) автономного  $(n-k)$ -цилиндричного абсолютного интегрального инварианта первого порядка

$$I = \int_L \sum_{i=1}^n J_i({}^k x) \delta x_i, \quad {}^k x = (x_1, \dots, x_k), \quad (3)$$

где  $L$  есть произвольная гладкая кривая из области  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ .

**Основной результат работы** выражает

**Теорема 2.** Необходимым условием существования у неавтономной дифференциальной системы (1) автономного  $(n-k)$ -цилиндричного абсолютного

интегрального инварианта первого порядка (3) является выполнение тождеств

$$W_t({}^kX(t, x), \partial_{x_i} X(t, x)) = 0 \quad \forall(t, x) \in D', \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$W_{x_\alpha}({}^kX(t, x), \partial_{x_i} X(t, x)) = 0 \quad \forall(t, x) \in D', \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha = k + 1, \dots, n,$$

где  $W_t$  и  $W_{x_\alpha}$  — вронскианы по переменным  $t$  и  $x_\alpha$ , соответственно, а функции

$${}^kX: (t, x) \rightarrow (X_1(t, x), \dots, X_k(t, x)) \quad \forall(t, x) \in D,$$

$$\partial_{x_i} X: (t, x) \rightarrow (\partial_{x_i} X_1(t, x), \dots, \partial_{x_i} X_n(t, x)) \quad \forall(t, x) \in D, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Доказательство.* Согласно критерию существования у системы (1) абсолютного интегрального инварианта первого порядка (теорема 1) криволинейный интеграл (3) будет интегральным инвариантом системы (1) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$${}^k\mathfrak{X} J_i({}^kx) + \sum_{\xi=1}^n J_\xi({}^kx) \partial_{x_i} X_\xi(t, x) = 0 \quad \forall(t, x) \in D', \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где линейный дифференциальный оператор первого порядка

$${}^k\mathfrak{X}(t, x) = \sum_{\zeta=1}^k X_\zeta(t, x) \partial_{x_\zeta} \quad \forall(t, x) \in D.$$

Относительно функциональных совокупностей

$$M_i = \{X_1(t, x), \dots, X_k(t, x), \partial_{x_i} X_1(t, x), \dots, \partial_{x_i} X_n(t, x)\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

функциональная система тождеств (5) означает: при любых фиксированных значениях зависимых переменных  $x_p$ ,  $p = 1, \dots, n$ , функции каждой из совокупностей  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , линейно зависят по независимой переменной  $t$  на области  $D'$ ; при любых фиксированных значениях независимой переменной  $t$  и зависимых переменных  $x_p$ ,  $p = 1, \dots, n$ ,  $p \neq \alpha$ , функции каждой из совокупностей  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , линейно зависят по зависимой переменной  $x_\alpha$  на области  $D'$ . Это имеет место при каждом фиксированном индексе  $\alpha = k + 1, \dots, n$ .

Поэтому на области  $D'$  вронскианы по независимой переменной  $t$  и по зависимым переменным  $x_\alpha$ ,  $\alpha = k + 1, \dots, n$ , каждой из совокупностей функций  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , тождественно равны нулю, т. е. выполняется система тождеств (4). Теорема доказана.

**Следствие 1.** Для того, чтобы обыкновенная неавтономная дифференциальная система (1) имела автономный абсолютный интегральный инвариант первого порядка (3) необходимо выполнение системы тождеств

$$W_t({}^nX(t, x), \partial_{x_i} X(t, x)) = 0 \quad \forall(t, x) \in D', \quad i = 1, \dots, n.$$

## Литература

- [1] Мироненко В. И. Замечания о стационарных интегралах и стационарных преобразованиях неавтономных дифференциальных систем // Дифф. уравнения, 1977. Т. 13, № 5. – С. 864–868.
- [2] Мироненко В. И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. – Минск: БГУ им. В. И. Ленина, 1981. – 104 с.
- [3] Горбузов В. Н. Автономность интегралов и последних множителей обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения, 1994. Т. 30, № 6. – С. 939–946.
- [4] Горбузов В. Н. Интегралы дифференциальных систем. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.
- [5] Горбузов В. Н., Проневич А. Ф. Автономность и цилиндричность  $R$ -дифференцируемых интегралов систем в полных дифференциалах // Дифф. уравнения и процессы управления. 2008. № 1. – С. 35–48.
- [6] Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // Acta Mathematica. 1890. Vol. 13. – P. 3–270.
- [7] Пуанкаре А. Избранные труды в трёх томах. – М.: Наука, 1972. – Том II: Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. – 358 с.
- [8] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
- [9] Cartan E. Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables I, II // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France). 1902. Vol. 134. – P. 1415–1418, 1564–1566.
- [10] Картан Э. Интегральные инварианты. – М.–Л.: Гостехиздат, 1940. – 216 с.
- [11] Козлов В. В. Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана // Библиотека R&C Dynamics. 1998. Т. 1. – С. 217–260.
- [12] Галиуллин А. С. Аналитическая динамика. – М.: Высшая школа, 1989. – 264 с.



## ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ЛУЧА

Светлаков А. Н.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена  
Санкт-Петербург  
e-mail: asas70@rambler.ru

**Svetlakov A. N. The study of the properties of integral curves of the equation the beam path.** The properties of integral curves of the equation the beam path are discussed.

Исследуются свойства интегральных кривых уравнения траектории луча.

Основные обозначения:  $x, y$  – продольная и поперечная координаты в тепловом пограничном слое;  $n = n(y)$  – профиль показателя преломления;  $T$  – температура,  $v$  – удельный объём,  $h$  – энтальпия,  $\text{Pr}$  – число Прандтля. Индексы: 0 – значение на входе в оптически неоднородную среду или нижний предел изменения аргумента;  $w$  – значение на нагреваемой поверхности; \* – точка разбиения.

В среде с градиентом показателя преломления имеет место искажение изображения при съёмке. Такая ситуация наблюдается в средах с неоднородными оптическими свойствами, например, в атмосфере при значительном перепаде температур между поверхностью и воздухом [1], а также при кипении недогретых жидкостей [2]. Известны случаи искажения изображения в атмосфере (явления миража) при приближении предмета к достаточно протяженной нагреваемой поверхности [1]. В зависимости от того, где находится нагреваемая поверхность: снизу, сверху или сбоку различают нижний (наиболее распространенный), верхний и боковой миражи. Подобные явления наблюдаются и в жидких средах. В работе [2] проводились исследования течения в каналах с развитым тепловым пограничным слоем. С помощью фотосъёмки исследовались оптические искажения в процессе роста, развития и отрыва пузырей на стенке, обтекаемой потоком недогретой жидкости. Оптическая система выделяла параллельный пучок лучей в канале и направляла в плоскость фоторегистрации. В результате исследований были получены случаи деформации, дублирования и исчезновения изображения. Дешифрацию изображений при съёмке можно произвести с помощью анализа интегральных кривых уравнения траектории светового луча при наличии градиента показателя преломления, которое может быть записано в виде [3].

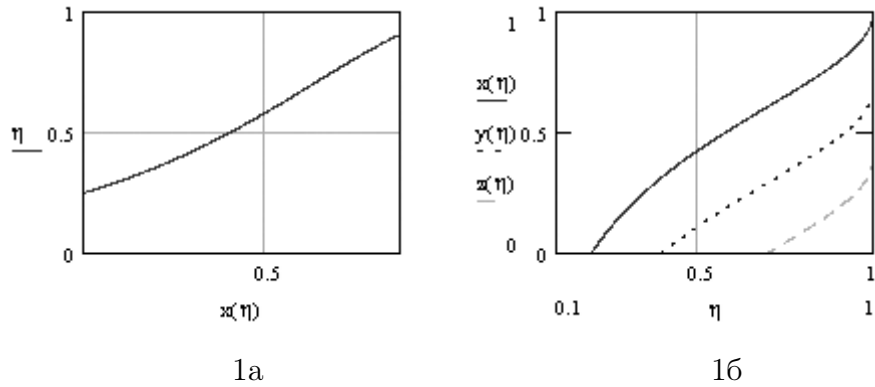


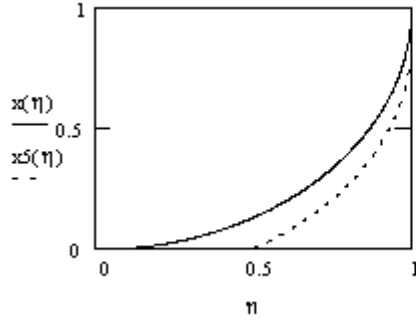
Рис. 1. Ход луча в пограничном слое

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \operatorname{cosec}^2 \varphi, \quad (1)$$

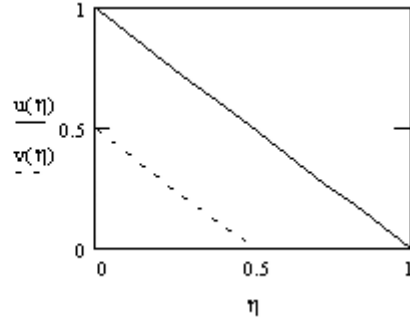
$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + 1 = \left(\frac{n - n_w}{n_\infty - n_w}\right)^2. \quad (2)$$

Здесь  $x$  – размерная продольная координата в пограничном слое,  $\eta$  – безразмерная поперечная координата. На рис. 1а вход луча на 0.1 толщины пограничного слоя, считая от нагреваемой поверхности, на рис. 1б вход луча на 0.1, 0.4, 0.7 толщины луча, считая от нагреваемой поверхности. Рассмотрен случай квадратичной зависимости показателя преломления от нормальной координаты.

За счёт выбора параметров согласовываются значения производных справа и слева в точках стыка. Такая схема получения аппроксимационных зависимостей особенно удобна для представления простыми формулами теплофизических свойств воды, водяного пара и воздуха и применения их для инженерных и автоматизированных расчётов в различных, но, как правило, достаточно узких областях изменения параметров (например, по давлению от 0.1 мПа до 3 мПа, а по температуре от 0 до 300 градусов Цельсия). Произведённый анализ показал, что для практически необходимых областей изменения параметров: давления, концентрации и температуры можно построить достаточно простые аппроксимации высокой точности. Ниже приводятся аппроксимационные формулы для воды, водяного пара и воздуха в некоторых пределах изменения аргументов с оценкой погрешностей по сравнению с таблицами [5]. Если нужна аппроксимация обратной функции, то используется однопараметрическая формула обратной аппроксимации.



2a



2б

Рис. 2. Графики траекторий светового луча и область аппроксимации

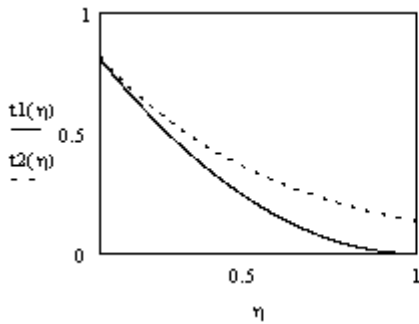
$$N(n) = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}, \quad (3)$$

$$x = \int \frac{d\eta}{\sqrt{N^2(\eta) - 1}} - x_0. \quad (4)$$

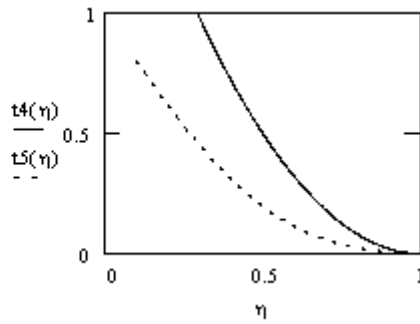
$$x = \sqrt{1 - (1 - \eta_0)^2} - \sqrt{1 - (1 - \eta)^2}, \quad N = \frac{n - n_w}{n_\infty - n_w} = \frac{1}{\eta}$$

(величины в безразмерном виде). На рис. 2а показаны графики траекторий светового луча в пограничном слое в случае, когда интеграл (4) берется в конечном виде. Здесь сплошная линия – график траектории луча с точкой входа  $\eta = 0.1$ , пунктирная кривая – с  $\eta = 0.5$ . На рис. 2б – область аппроксимации монотонной безразмерной (приведенной к промежутку  $[0, 1]$ ) функции.

Сравнивая предложенные аппроксимационные формулы с имеющимися в литературе, например [5], следует отметить, что они требуют минимума аппроксимационных параметров, занимают мало места в памяти ПК или программируемого калькулятора и универсальны. Кроме того они позволяют удовлетворить заданной точности аппроксимаций ценой незначительного усложнения формулы для параметра семейства аппроксимационных функций. Указанные свойства позволяют использовать эти формулы для автоматизированных и инженерных работ.



3a



3б

Рис. 3. Аппроксимации профиля температур в пограничном слое.

На рис. 3а проведены аппроксимации

$$\begin{aligned} T &= T_\infty - \Delta T \cdot (1 - \eta)^2, & \max |T''| &= 2 \cdot \Delta T, \\ T &= T_\infty - \Delta T \cdot \exp(-2\eta), & \max |T''| &= 2 \cdot \Delta T, \end{aligned}$$

на рис. 3б – аппроксимации

$$\begin{aligned} T &= \begin{cases} T_\infty - \Delta T \cdot (1 - 0.5 \cdot \eta), & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ T_\infty - \Delta T \cdot a \cdot (1 - \eta)^\alpha, & \eta_* \leq \eta \leq 1, \end{cases} \\ T &= T_\infty - \Delta T \cdot \exp(-a \cdot \eta^4 - 2 \cdot \eta^2 - 2 \cdot \eta), \end{aligned}$$

$$y = y_0 + \frac{y_n - y_0}{\exp(a + b) - 1} \cdot \left\{ \exp \left[ \frac{a \cdot (x - x_0)^2}{(x_n - x_0)^2} + \frac{b \cdot (x - x_0)}{(x_n - x_0)} \right] - 1 \right\}.$$

Семейство аппроксимаций (1–4) построено, соответственно, для значений параметра  $\alpha$  (1; 5; 10; 15). Величина  $\max |T''|$  меняется от  $1.5 \cdot \Delta T$  до  $6.5 \cdot \Delta T$  при изменении  $\eta$  от 0.2 до 15.

## Литература

- [1] Миннарт М. Свет и цвет в природе. – М.: Наука, 1969. – С. 79–84.
- [2] Zysin L. V., Svetlakov A. N., Feldberg L. A., Dobkes A. L. An Experimental-analytic research of steam bubbles form for boiling of underheated liquidity // Heat Transfer. Soviet Research. – New York: American Society of Mechanical Engineers, USA: 1982. – V. 14. – № 3. – P. 64–70.
- [3] Хауф В., Григуль У. Оптические методы в теплопередаче. – М.: Мир, 1973. – 240 с.
- [4] Толстых Г. Е. К вопросу о нахождении огибающих семейства интегральных кривых // ЖВММФ. – 1969. – № 3.
- [5] Ривкин С. Л., Александров А. А. Теплофизические свойства воды и водяного пара. – М.: Энергия, 1980.
- [6] Bo Dong, Weizhong Li, Xun Zhou. Numerical Investigation on Motion Characteristic of a Single Bubble along Overheated Curved Surface // The IX International Heat Transfer Symposium. – University of Nottingham, UK. – 2016. – P. 24.



и выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_2} \varphi_{1i_1}}{\partial x_2^{i_2}}(x_2, x_3, \dots, x_n) &= \frac{\partial^{i_1} \varphi_{2i_2}}{\partial x_1^{i_1}}(x_{10}, x_3, \dots, x_n), \\ \frac{\partial^{i_3} \varphi_{1i_1}}{\partial x_3^{i_3}}(x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) &= \frac{\partial^{i_1} \varphi_{3i_3}}{\partial x_1^{i_1}}(x_{10}, x_2, x_4, \dots, x_n), \dots, \\ \frac{\partial^{i_n} \varphi_{1i_1}}{\partial x_n^{i_n}}(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) &= \frac{\partial^{i_1} \varphi_{ni_n}}{\partial x_1^{i_1}}(x_{10}, x_2, \dots, x_{n-1}); \\ \frac{\partial^{i_3} \varphi_{2i_2}}{\partial x_3^{i_3}}(x_1, x_3, x_4, \dots, x_n) &= \frac{\partial^{i_2} \varphi_{3i_3}}{\partial x_2^{i_2}}(x_1, x_{20}, x_4, \dots, x_n), \dots, \\ \frac{\partial^{i_n} \varphi_{2i_2}}{\partial x_n^{i_n}}(x_1, x_3, x_4, \dots, x_{n0}) &= \frac{\partial^{i_2} \varphi_{ni_n}}{\partial x_2^{i_2}}(x_1, x_{20}, x_3, \dots, x_{n-1}), \dots, \\ \frac{\partial^{i_n} \varphi_{n-1i_{n-1}}}{\partial x_n^{i_n}}(x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n0}) &= \frac{\partial^{i_{n-1}} \varphi_{ni_n}}{\partial x_{n-1}^{i_{n-1}}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-10}). \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$b_{jk_{j_1} \dots k_{j_n}} = \sum_{\substack{s_{j_1}=k_{j_1} \\ \dots \\ s_{j_1} + \dots + s_{j_n} < m_i}}^{m_{i_1}} \dots \sum_{\substack{s_{j_n}=k_{j_n} \\ \dots \\ s_{j_1} + \dots + s_{j_n} < m_i}}^{m_{i_n}} \prod_{p=1}^n C_{s_{j_p}}^{k_{j_p}} (-1)^{\sum_{p=1}^n (s_{j_p} + k_{j_p})} \frac{\partial^{\sum_{p=1}^n (s_{j_p} - k_{j_p})} a_{js_{j_1} \dots s_{j_n}}}{\partial x_1^{s_{j_1} - k_{j_1}} \dots \partial x_n^{s_{j_n} - k_{j_n}}},$$

$$\begin{aligned} K_{jq_1 q_2 \dots q_k}^i(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) &= \\ &= \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{i_1}-1} \dots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{i_k}-1} b_{jp_1 p_2 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n) \prod_{l=1}^k \frac{(x_{q_l} - \alpha_{q_l})^{m_{i_l} - p_{q_l} - 1}}{(m_{i_l} - p_{q_l} - 1)!}, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

причем  $p_i = m_{i_l}$ , если  $i \neq q_l$ ;  $b_{jp_1 p_2 \dots p_n} = 0$ , если выполняется хотя бы одно из неравенств  $p_k > m_{j_k}$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

**Теорема 1.** Если  $K_{jq_1 q_2 \dots q_k}^i$  ( $i, j, k = \overline{1, n}$ ) непрерывны в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных, то решение задачи 1 существует и единственно.

При исследовании задачи 1 были использованы результаты из [1].

## Литература

- [1] Севастьянов В. А. О методе И. Н. Векуа решения интегральных уравнений типа Вольтерра // Казан. ун-т., 1997. – Деп. в ВИНТИ 24.04.97, № 1373-В97. – 9 с.

# ПРИНЦИПЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОВЕРКИ АДЕКВАТНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Сорокин В. Г.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва  
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана  
e-mail: vsesor@gmail.com

**Sorokin V. G. Principles of using test problems for examining approximation of numerical methods of solving reaction-diffusion equations with delay.** We establish basic principles of construction, selection, and using of test problems for examining approximation and estimating accuracy of numerical methods of solving reaction-diffusion equations with delay. We formulate theorems that allow obtaining exact solutions in elementary functions for these equations. We present certain examples of constructing test problems using these exact solutions.

**Keywords:** reaction-diffusion equations with delay, test problems, numerical methods

Описаны основные принципы построения, выбора и использования тестовых задач для проверки адекватности и оценки точности численных методов решения реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. Сформулированы теоремы, которые позволяют получать точные решения в элементарных функциях для таких уравнений. Приведены некоторые примеры построения тестовых задач с использованием данных точных решений.

**Ключевые слова:** реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием, тестовые задачи, численные методы

**Введение.** Наследственные системы характеризуются зависимостью скорости изменения искомых величин не только от состояния системы в данный момент времени, но и от всей предыдущей эволюции процесса. В частном случае, когда состояние системы определяется не всей эволюцией, а только некоторым моментом в прошлом, процессы моделируются реакционно-диффузионными уравнениями с запаздыванием вида

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (1)$$

где  $\tau > 0$  — время запаздывания,  $a > 0$ . Кинетическая функция  $F$  (скорость протекания химических или биохимических реакций) зависит как от искомой функции  $u = u(x, t)$ , так и от той же самой функции, но уже с запаздывающим аргументом  $w = u(x, t - \tau)$ . Специальный случай  $F(u, w) = f(w)$  допускает простую физическую интерпретацию: процесс переноса субстанции в локально-неравновесной среде обладает инерционными свойствами, то есть система реагирует на воздействие не мгновенно, как в классическом локально-равновесном случае, а на время запаздывания  $\tau$  позже.

Для корректной постановки начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с запаздыванием (например, уравнений типа (1)) необходимо задать начальные данные на отрезке  $-\tau \leq t \leq 0$  (или  $0 \leq t \leq \tau$ ). Граничные условия ставятся как обычно. Численное решение таких задач сопровождается определенными трудностями, которые могут быть связаны с особенностями

как самих уравнений с запаздыванием, так и алгоритмов решения. Выделим следующие проблемы (подробный обзор со ссылками на источники см. в [1]):

1. Распространение разрывов производной: решение некоторой начально-краевой задачи может иметь разрывную производную по времени в начальных точках, что вследствие запаздывания приводит к разрывам в других точках.

2. Необходимость хранения данных не только с предыдущего временного слоя, как при решении задач без запаздывания, а с нескольких предыдущих временных слоёв, что требует значительных объёмов оперативной памяти.

3. Необходимость вычисления значений функции в точках, не входящих в сетку (например, при переменном  $\tau$ ).

4. Возможная неустойчивость решений задач с запаздыванием: введение запаздывания в стандартные математические модели (описываемые дифференциальными уравнениями без запаздывания) может превратить корректную задачу в некорректно поставленную.

Описанные выше качественные особенности уравнений с запаздыванием необходимо иметь в виду при разработке и практическом применении численных методов решения соответствующих задач. Используемые численные схемы целесообразно тестировать на модельных задачах, допускающих точные решения в элементарных функциях.

**Принципы использования, построения и выбора тестовых задач для уравнений с запаздыванием.** Для реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием вида (1) (а также других нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием или без него) при использовании, построении и выборе тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности соответствующих численных методов, полезно руководствоваться следующими принципами.

1. Наиболее надежны тестовые задачи, полученные путем использования точных решений реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием.

2. Предпочтительнее выбирать простые тестовые задачи, решения которых выражаются через элементарные функции.

3. Рассматриваемые тестовые задачи должны содержать ряд свободных параметров, которые можно свободно варьировать в широких пределах.

4. Можно выбирать тестовые задачи из более широкого класса уравнений аналогичного типа (нет необходимости использовать точные решения рассматриваемого уравнения, которые далеко не всегда удается получить).

5. Для оценки точности численных методов лучше использовать несколько различных тестовых задач.

6. Следует проверять численные методы на тестовых задачах с большими градиентами искомых величин в начальных данных или граничных условиях (например, для быстро осциллирующих начальных данных).

7. Полезно тестировать численные методы на быстро растущих решениях при достаточно больших временах.

8. По возможности надо проверять точность используемых численных методов на тестовых задачах вблизи критических значений параметров, которые определяют неустойчивые решения (некорректные по Адамару задачи).

Важно подчеркнуть, что хорошо подобранные тестовые задачи позволяют сопоставлять и совершенствовать “работоспособные” численные методы и



отсеивать малопригодные.

**Замечание 1.** Для нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием нельзя ограничиваться тестовыми задачами, полученными на основе точных решений нелинейных уравнений без запаздывания.

Далее будет рассмотрен класс реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием, допускающих точные решения в элементарных функциях. Эти уравнения и их точные решения содержат ряд свободных параметров (которые можно варьировать) и могут быть использованы в качестве тестовых задач.

**Теоремы о построении точных решений.** Рассмотрим широкий класс нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$u_t = a\Delta u + bu + f(u - kw), \quad w = u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad (2)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $f(z)$  – произвольная функция,  $\tau > 0$ ,  $a > 0$ ,  $b$ ,  $k$  – свободные параметры.

Ниже сформулировано несколько полезных теорем, которые обобщают результаты работ [2, 3] на трёхмерный случай и позволяют получать точные решения и тестовые задачи для реакционно-диффузионных уравнений.

**Теорема 1.** Пусть  $k > 0$  и  $u_0 = u_0(\mathbf{x}, t)$  – решение уравнения (2). Тогда функция

$$u = u_0(\mathbf{x}, t) + e^{c_1 t} \xi(\mathbf{x}, t), \quad c_1 = \frac{\ln k}{\tau},$$

где  $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$  – любое  $\tau$ -периодическое решение линейного уравнения

$$\xi_t = a\Delta \xi + (b - c_1)\xi, \quad \xi(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}, t + \tau), \quad (3)$$

также является решением уравнения (2).

**Теорема 2.** Пусть  $k < 0$  и  $u_0 = u_0(\mathbf{x}, t)$  – решение уравнения (2). Тогда функция

$$u = u_0(\mathbf{x}, t) + e^{c_2 t} \eta(\mathbf{x}, t), \quad c_2 = \frac{\ln |k|}{\tau},$$

где  $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$  – любое  $\tau$ -апериодическое решение линейного уравнения

$$\eta_t = a\Delta \eta + (b - c_2)\eta, \quad \eta(\mathbf{x}, t) = -\eta(\mathbf{x}, t + \tau), \quad (4)$$

также является решением уравнения (2).

**Теорема 3.** При  $k = 1$  остаются справедливыми результаты теоремы 1. Кроме того, при  $k = 1$  уравнение (2) допускает решение с обобщённым разделением переменных вида

$$u = t\varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}),$$

где функции  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$  и  $\psi = \psi(\mathbf{x})$  удовлетворяют системе стационарных уравнений

$$\begin{aligned} a\Delta \varphi + b\varphi &= 0, \\ a\Delta \psi + b\psi &= \varphi - f(\tau\varphi), \end{aligned}$$

а также решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \varphi(\mathbf{x}) + \theta(t),$$

где функции  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$  и  $\theta = \theta(t)$  удовлетворяют независимым уравнениям

$$\begin{aligned} a\Delta\varphi + b\varphi &= 0, \\ \theta'_t(t) &= b\theta(t) + f(\theta(t) - \theta(t - \tau)). \end{aligned}$$

**Теорема 4.** Пусть  $\xi_m = \xi_m(x_m, t)$  — частные решения одномерных уравнений

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x_m^2} + p_m \xi_m, \quad m = 1, 2, 3,$$

где  $p_1 + p_2 + p_3 = b - c_1$ . Тогда трехмерное уравнение (3) допускает точное решение в виде произведения одномерных решений

$$\xi_{1,2,3} = \xi_1(x_1, t)\xi_2(x_2, t)\xi_3(x_3, t).$$

Аналогично формулируются теоремы для более широкого класса нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$u_t = a\Delta u + f(u - kw) + ug(u - kw) + wh(u - kw), \quad w = u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad (5)$$

где  $f(z)$ ,  $g(z)$ ,  $h(z)$  — произвольные функции,  $\tau > 0$ ,  $a > 0$ ,  $k$  — свободные параметры. В частном случае  $g(z) = b = \text{const}$  и  $h(z) \equiv 0$  уравнение (5) переходит в (2). Формулировки теорем и примеры их использования для построения точных решений приводятся в [4].

Сформулированные выше теоремы 1–4 доказываются непосредственной проверкой и являются основой для получения большого числа тестовых задач для нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием.

**Примеры построения тестовых задач для реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием.** Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + bu - s(u - kw)^2, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (6)$$

которое содержит пять параметров:  $a > 0$ ,  $b$ ,  $s$ ,  $k$ ,  $\tau > 0$ . Это уравнение является частным случаем одномерного уравнения (2) при  $f(z) = -sz^2$  и в вырожденных случаях  $k = 0$  или  $\tau = 0$  переходит в ненормированное уравнение Фишера.

Применим теоремы 1–4 для получения точных решений уравнения (6), которые затем будут использованы для построения тестовых задач. Мы будем рассматривать лишь самые простые точные решения; другие точные решения уравнения (6), полученные с использованием теорем 1–4, приводятся в [4].

Пусть  $k > 0$ . Используя теорему 1 и взяв за основу положения равновесия (соответствуют  $u_0 = \text{const}$ ), получаем следующие решения уравнения (6):

$$u = u_0 + e^{ct}\xi_0(x), \quad c = \frac{\ln k}{\tau}, \quad (7)$$

где постоянная  $u_0$  может принимать два значения:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & k > 0 & \text{— любое;} \\ u_0 &= \frac{b}{s(1-k)^2}, & k &\neq 1, \end{aligned} \quad (8)$$

а функция  $\xi_0 = \xi_0(x)$  является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$a\xi_0'' + (b - c)\xi_0 = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_0(x) &= A \cos(\gamma_0 x) + B \sin(\gamma_0 x), & \gamma_0 &= \sqrt{(b - c)/a} & \text{при } b > c; \\ \xi_0(x) &= A e^{-\gamma_0 x} + B e^{\gamma_0 x}, & \gamma_0 &= \sqrt{(c - b)/a} & \text{при } b < c; \\ \xi_0(x) &= Ax + B, & & & \text{при } b = c, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A, B$  — произвольные постоянные. Константы  $u_0$  в (8) и функции  $\xi_0$  в (9) выбираются независимо.

Пусть теперь  $k < 0$ . Используя теорему 2, получаем решения

$$u = u_0 + e^{ct} \eta(x, t), \quad c = \frac{\ln |k|}{\tau}, \quad (10)$$

где  $u_0$  — любая константа из (8), а функция  $\eta(x, t)$  является любым частным решением одномерного уравнения (4) при  $c_2 = c$ . Общее  $\tau$ -апериодическое решение этого уравнения можно представить в виде [2, 3]:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x} [A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x} [C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n - 1)}{\tau}, \quad \gamma_n = \frac{\beta_n}{2a\lambda_n}, \quad \lambda_n = \left( \frac{\sqrt{(b - c)^2 + \beta_n^2} - b + c}{2a} \right)^{1/2},$$

где  $A_n, B_n, C_n, D_n$  — произвольные постоянные, для которых ряды (11) и производные  $\eta_t$  и  $\eta_{xx}$  сходятся.

Перейдем к построению тестовых задач. Выберем параметры уравнения (6) так, чтобы оно имело стационарные решения  $u_0 = 0$  и  $u_0 = 1$ . Первое тривиальное стационарное решение уже имеется. Чтобы совпало второе стационарное решение в (8) надо положить  $u_0 = 1$ , что дает  $s = b/(1 - k)^2$ . Подставив это значение в (6), приходим к уравнению

$$u_t = au_{xx} + bu - b \left( \frac{u - kw}{1 - k} \right)^2, \quad w = u(x, t - \tau). \quad (12)$$

Ниже приведены две группы наиболее простых точных решений уравнения (12).

(i) Решения при  $k > 0$  ( $k \neq 1$ ):

$$\begin{aligned} u &= e^{ct} [A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x)], & \gamma &= \sqrt{(b - c)/a} & \text{при } b > c; \\ u &= e^{ct} (A e^{-\gamma x} + B e^{\gamma x}), & \gamma &= \sqrt{(c - b)/a} & \text{при } b < c; \\ u &= e^{ct} (Ax + B), & & & \text{при } b = c; \\ u &= 1 + e^{ct} [A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x)], & \gamma &= \sqrt{(b - c)/a} & \text{при } b > c; \\ u &= 1 + e^{ct} (A e^{-\gamma x} + B e^{\gamma x}), & \gamma &= \sqrt{(c - b)/a} & \text{при } b < c, \end{aligned}$$

где  $c = (\ln k)/\tau$ ;  $A, B$  — произвольные постоянные.

(ii) Решения при  $k < 0$ :

$$\begin{aligned} u &= A_n e^{ct \mp \lambda_n x} \cos(\beta_n t \mp \gamma_n x + C_n), \\ u &= 1 + A_n e^{ct \mp \lambda_n x} \cos(\beta_n t \mp \gamma_n x + C_n), \\ c &= \frac{\ln |k|}{\tau}, \quad \beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau}, \quad \gamma_n = \frac{\beta_n}{2a\lambda_n}, \\ \lambda_n &= \left( \frac{\sqrt{(b-c)^2 + \beta_n^2} - b + c}{2a} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $A_n, C_n$  — произвольные постоянные;  $n = 1, 2, \dots$

Для тестирования численных методов интегрирования нелинейных реакционно-диффузионных уравнений можно выбирать указанные выше точные решения уравнения (12). Отметим качественные особенности некоторых решений.

Первое и четвертое решения из первой группы (i) являются периодическими функциями по пространственной переменной  $x$ . Их удобно использовать в качестве тестовых решений для начально-краевых задач с граничными условиями первого и второго рода на отрезке  $0 \leq x \leq m\pi/\gamma$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Подходящим выбором свободных постоянных  $A$  и  $B$  можно сделать искомую функцию на границе равной нулю или единице (для краевых условий первого рода) или получить на границе нулевую производную по  $x$  (для краевых условий второго рода). В случае задач со смешанными граничными условиями удобно рассматривать эти решения на отрезках  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}m\pi/\gamma$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Начальные данные при  $-\tau \leq t \leq 0$  (или  $0 \leq t \leq \tau$ ) определяются из решений, используемых в качестве тестовых задач. Полезно сравнить численные и точные решения тестовых задач при  $k$ , близких к единице (решения слабо меняются по времени), и при достаточно больших  $k$  (решения изменяются быстро).

Решения из второй группы (ii) при  $k = -1$  являются периодическими по времени, а при  $|k| \rightarrow \infty$  и  $|k| \rightarrow 0$  — быстроосциллирующими по обеим переменным. Такие решения полезно использовать для оценки точности численных методов в задачах с большими градиентами.

Отметим, что при выполнении условий

$$k > 1, \quad b > 0, \quad \tau \geq \frac{\ln k}{b}$$

решения начально-краевых задач для уравнения (12) являются неустойчивыми [5], а сама задача — некорректной по Адамару. Необходимо обязательно тестировать численные методы, выбирая значения параметров тестовых задач вблизи данных критических значений.

**Замечание о прямом тестировании численных методов.** Для получения тестовых задач помимо уравнений с запаздыванием вида (1), допускающих точные решения, можно использовать более широкий класс уравнений

$$u_t = au_{xx} + F(u, w) + G(x, t), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (13)$$

Выбирают (достаточно произвольно) некоторую функцию  $\psi = \psi(x, t)$ , удовлетворяющую заданным граничным условиям. Эта функция является точным

решением уравнения (13) при

$$G(x, t) = \psi_t - a\psi_{xx} - F(\psi, \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(x, t - \tau). \quad (14)$$

Уравнение (13)–(14) вместе с соответствующими начальными и граничными условиями является тестовой задачей, которая имеет точное решение  $u = \psi(x, t)$ . Это решение сравнивают с численным решением этой задачи. Различные функции  $\psi = \psi(x, t)$  порождают различные уравнения (13) и различные тестовые задачи.

Прямой метод получения тестовых задач в описанной выше общей формулировке, вообще говоря, имеет серьезный недостаток. Поскольку функция  $\psi = \psi(x, t)$  задается априорно и не связана с рассматриваемым уравнением, то она не имеет качественных особенностей, присущих решениям уравнений с запаздыванием вида (1). Подходящий выбор этой функции полностью зависит от удачи и интуиции исследователя.

**Выводы.** Описаны основные принципы построения, выбора и использования тестовых задач для проверки адекватности и оценки точности численных методов решения реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. Сформулированы теоремы, позволяющие получать точные решения в элементарных функциях для таких уравнений. Приведены примеры построения тестовых задач с использованием теорем и с опорой на рассмотренные принципы.

Автор благодарит А. Д. Полянина за внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №16-08-01252а.

## Литература

- [1] Полянин А. Д., Сорокин В. Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: математические модели и качественные особенности // Вестник национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”, 2017. Т. 6. №1.
- [2] Polyanin A. D., Zhurov A. I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 62. P. 33.
- [3] Polyanin A. D., Zhurov A. I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. №3. P. 417.
- [4] Полянин А. Д., Сорокин В. Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: численные методы и тестовые задачи // Вестник национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”, 2017. Т. 6. №2.
- [5] Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Вязьмин А. В. Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // ТОХТ – 2015. Т. 49. №5. С. 527.

# ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЁННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Спичак С. В.<sup>1</sup>, Стогний В. И.<sup>2</sup>, Копась И. Н.<sup>2</sup>

Институт математики НАН Украины<sup>1</sup>,

Национальный технический университет Украины

Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского<sup>2</sup>

Киев

e-mail: stas.math@gmail.com, valeriy\_stogniy@mail.ru, innak@net.ua

**Spichak S. V., Stogniy V. I., Kopas I. N.** In this paper, a class of (2+1)-dimensional generalized nonlinear Kolmogorov equations is considered. Using the classical Lie-Ovsiannikov algorithm we performe the group classification of the class under study with respect to the equivalence transformations.

В этой статье рассматривается один класс (2+1)-мерных обобщенных нелинейных уравнений Колмогорова. Используя классический метод Ли–Овсянникова, проведена групповая классификация исследуемого класса уравнений с точностью до преобразований эквивалентности.

**1. Постановка задачи.** Обобщённое нелинейное уравнение Колмогорова

$$u_t - u_{xx} + h(u)u_y = f(u), \quad (1)$$

где  $u = u(t, x, y)$ ,  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $h(u) \neq \text{const}$  и  $f(u)$  – заданные гладкие функции, встречается во многих задачах финансовой математики и в теории диффузионных процессов [1].

Широкое применение уравнения (1) вызывает несомненный интерес к нахождению его точных решений. Хорошо известно [2], что если нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными имеет нетривиальные симметричные свойства, то это позволяет использовать дифференциальные операторы алгебры инвариантности для его симметричной редукции.

Так, в работе [3] была проведена групповая классификация уравнения

$$u_t - u_{xx} + h(u)u_y = 0$$

относительно произвольной функции  $h(u)$  и, в частности, показано, что нелинейное уравнение Колмогорова

$$u_t - u_{xx} - uu_y = 0 \quad (2)$$

допускает 6-параметрическую группу нетривиальных локальных преобразований зависимой и независимых переменных. Используя вышеупомянутый метод симметричной редукции, построены точные частные решения уравнения (2).

Таким образом, становится очевидным актуальность задачи полной групповой классификации уравнения (1) относительно произвольных функций  $h(u)$

и  $f(u)$ , которая и была нами решена, используя классический метод Ли–Овсянникова [2, 4].

**2. Преобразование эквивалентности.** Групповая классификация проводилась с точностью до преобразований эквивалентности уравнений (1).

**Определение.** Преобразованием эквивалентности уравнений (1) называется невырожденная локальная замена переменных:

$$\bar{t} = T(t, x, y, u), \quad \bar{x} = X(t, x, y, u), \quad \bar{y} = Y(t, x, y, u), \quad \bar{u} = U(t, x, y, u)$$

( $J(t, x, y, u) \neq 0$ ), которая переводит каждое уравнение из класса (1) для зависимой переменной  $u = u(t, x, y)$  с произвольными функциями  $h(u)$  и  $f(u)$  в некоторое другое уравнение из этого же класса для переменной  $\bar{u} = \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$  с новыми произвольными функциями  $\bar{h}(\bar{u})$  и  $\bar{f}(\bar{u})$ .

Множество преобразований эквивалентности образует группу, которую обозначим  $G^{\text{equiv}}$ . С помощью преобразований эквивалентности класс уравнений можно разделить на неэквивалентные подклассы, выделив при этом в каждом из подклассов по одному представителю уравнений простейшего вида, которые называются каноническими уравнениями. Тогда достаточно исследовать только канонические представители, чтобы сделать вывод о симметричных свойствах всех уравнений соответствующего подкласса.

**Теорема 1.** Группа  $G^{\text{equiv}}$  преобразований эквивалентности уравнений (1) состоит из следующих преобразований:

$$\bar{t} = a_1^2 t + a_2, \quad \bar{x} = a_1 x + a_3, \quad \bar{y} = a_4 y + a_5 t + a_6, \quad \bar{u} = a_7 u + a_8, \quad (3)$$

$$\bar{h}(\bar{u}) = \frac{a_4}{a_1^2} h(u) + \frac{a_5}{a_1^2}, \quad \bar{f}(\bar{u}) = \frac{a_7}{a_1^2} f(u),$$

где  $a_i, i \in \{1, \dots, 8\}$  – произвольные действительные постоянные,  $a_1 a_4 a_7 \neq 0$ .

**3. Основная алгебра инвариантности.** Определим основную алгебру инвариантности класса уравнений (1) как пересечение всех алгебр инвариантности для уравнений с произвольными функциями  $h(u)$  и  $f(u)$ . Используя стандартный алгоритм (см., например, [2, 4]), получаем следующий результат.

**Теорема 2.** Основной алгеброй инвариантности уравнений (1) в случае произвольных функций  $h(u)$  и  $f(u)$  будет трёхмерная алгебра Ли операторов симметрии

$$A^{\text{ker}} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_y \rangle. \quad (4)$$

Исследуем, при каких функциях  $h(u)$  и  $f(u)$  уравнение (1) инвариантно относительно алгебры инвариантности большей размерности, чем у алгебры  $A^{\text{ker}}$  (4).

**4. Групповая классификация класса дифференциальных уравнений (1).** Используя вышеупомянутый метод Ли–Овсянникова для описания всех дифференциальных уравнений из класса (1), которые имеют нетривиальные симметричные свойства, т. е. те, которые допускают расширение алгебры  $A^{\text{ker}}$ , мы приходим к следующему результату.

**Теорема 3.** Алгебра инвариантности обобщенного нелинейного уравнения Колмогорова (1) с функциями  $h(u) \neq \text{const}$  и  $f(u)$  имеет размерность

больше, чем размерность алгебры  $A^{\ker}$  (4), тогда и только тогда, когда это уравнение с помощью преобразований эквивалентности (3) сводится к одному из канонических уравнений, представленными следующими функциями:

- 1)  $h = u$ ,  $f = \tilde{\varepsilon}$  или  $f = u^2$ ;  
алгебры инвариантности в этих случаях – шестимерные;
  - 2)  $h = e^u$ ,  $f = \tilde{\varepsilon}e^u$ ;  $h = \ln u$ ,  $f = \tilde{\varepsilon}u$ ;  
 $h = u^m$ ,  $f = \tilde{\varepsilon}u^{m+1}$ ,  $m \neq 0, 1$ ;  $h = u$ ,  $f = \varepsilon_1 u$  или  $f = u^2 + \varepsilon_1$ ;  
алгебры инвариантности в этих случаях – пятимерные;
  - 3)  $h = e^u$ ,  $f = \tilde{\varepsilon}e^u + \varepsilon_1$  или  $f = \varepsilon_1 e^{mu}$ ,  $m \neq 0, 1$ ;  
 $h = \ln u$ ,  $f = \varepsilon_1 u^m$ ,  $m \neq 1$  или  $f = \varepsilon_1 u \ln u$ ;  
 $h = u^m$ ,  $m \neq 0, 1$ ,  $f = \varepsilon_1 u^n$ ,  $n \neq m + 1$  или  $f = \varepsilon_1 u^{m+1} + \varepsilon_2 u$ ;  
 $h = u$ ,  $f = \varepsilon_1 u^m$ ,  $m \neq 0, 1, 2$  или  $f = \varepsilon_1 e^u$ ;  
 $h \notin \{e^u, \ln u, u^m\}$ ,  $f = 0$ ;  
алгебры инвариантности в этих случаях – четырёхмерные.
- Здесь  $\varepsilon_i = \pm 1$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\tilde{\varepsilon} \in \{-1, 0, 1\}$ .

## Литература

- [1] Pascucci A., Polidoro S. On the Cauchy problem for a nonlinear Kolmogorov equation // Siam J. Math. Anal. 2003. Vol. 35. № 3. – P. 579–595.
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука. – 1978. – 400 с.
- [3] Demetriou E., Christou M. A., Sophocleous C. On the classification of similarity solutions of a two-dimensional diffusion-advection equation // J. Appl. Math. Comp. 2007. Vol. 187. – P. 1333–1350.
- [4] Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И. Симметричный анализ уравнений эволюционного типа. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2004. – 392 с.

УДК 517.95

## УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С СУПЕРУСТОЙЧИВОЙ ПОЛУГРУППОЙ

Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг  
МГУ имени М. В. Ломоносова, МПГУ  
Москва  
e-mail: ivtikh@mail.ru, vnsontung@mail.ru

**Tikhonov I. V., Vu Nguyen Son Tung. Universal algorithm to solve the inverse problem for the evolution equation with superstable semigroup.** Inverse problem for the evolution equation is studied. The basic assumption is connected with superstability of the evolutionary semigroup. It is shown that the solution can be represented by a convergent Neumann series. As a result, a constructive algorithm for finding a solution of the inverse problem is obtained.



Для эволюционного уравнения изучается линейная обратная задача. Основное предположение связано с суперустойчивостью эволюционной полугруппы. Показано, что тогда решение обратной задачи представимо сходящимся рядом Неймана. Тем самым, установлен конструктивный алгоритм для поиска решения.

Настоящая работа посвящена линейной обратной задаче о нахождении неоднородного слагаемого в абстрактном дифференциальном уравнении. Мы используем стандартный полугрупповой подход (см. [1]–[4]). В качестве дополнительного условия задано нелокальное переопределение в виде векторного интеграла Римана–Стилтьеса. Общая схема исследования подобных обратных задач была разработана в [5], [6]. Сейчас мы уточним некоторые детали и укажем конструктивный алгоритм для поиска решения в предположении, что основной оператор эволюционного уравнения порождает суперустойчивую полугруппу класса  $C_0$  (см. [7]–[10]).

Начнем с постановки исходной прямой задачи. В банаховом пространстве  $E$  при фиксированном значении  $T > 0$  рассмотрим абстрактную задачу Коши для эволюционного уравнения с неоднородным слагаемым специального вида:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $A$  — линейный замкнутый оператор в  $E$  с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $E$ . Начальный элемент  $u_0$  задан в  $D(A)$ . Считаем, что оператор  $A$  порождает полугруппу  $U(t)$  класса  $C_0$  (см. [1]–[4]). Скалярная функция  $\varphi(t)$  непрерывна на отрезке  $[0, T]$ , причем  $\varphi(t) \not\equiv 0$ . Дополнительно предполагаем, что  $\varphi(t)$  имеет ограниченную вариацию на  $[0, T]$ , т. е.  $\varphi \in BV[0, T]$ .

Тогда, как показано в [6], при любом выборе элемента  $g \in E$  стандартная формула

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)\varphi(s)g ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

дает классическое решение задачи (1), принадлежащее  $C^1([0, T]; E)$ , и такое, что  $u(t) \in D(A)$  при  $0 \leq t \leq T$ .

Предположим теперь, что элемент  $g \in E$  неизвестен. Для его нахождения добавим к задаче (1) специальное *нелокальное переопределение*

$$\int_0^T u(t) d\mu(t) = u_1. \quad (3)$$

Элемент  $u_1 \in D(A)$  считаем известным. Интеграл в условии (3) есть векторный интеграл Римана–Стилтьеса с заданной функцией  $\mu \in BV[0, T]$ . Поставленная задача (1), (3) для нахождения пары  $(u(t), g)$  называется *линейной обратной задачей с нелокальным переопределением* (см. [5], [6]).

Сделаем сейчас акцент на специальном случае суперустойчивой полугруппы  $U(t)$ . Напомним, что *экспоненциальным типом* полугруппы называется величина

$$\omega_0 \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{t}.$$

Указанный предел заведомо существует со значением в промежутке  $[-\infty, \infty)$ . Если  $\omega_0 = -\infty$ , то полугруппа  $U(t)$  называется *суперустойчивой* (см. [7]–[10]). В таком случае при любом выборе сколь угодно большого числа  $\alpha > 0$  найдется константа  $M = M_\alpha \geq 1$ , для которой

$$\|U(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Суперустойчивую полугруппу называют также *квазинильпотентной*, поскольку все ее операторы  $U(t)$  при  $t > 0$  являются квазинильпотентными в пространстве  $E$ . Спектр порождающего оператора  $A$  будет пустым, а резольвентное множество заполнит всю комплексную плоскость.

Из теории, развитой в [6], следует такое утверждение (см. [6, с. 112]).

**Теорема 1.** Пусть оператор  $A$  порождает суперустойчивую полугруппу  $U(t)$  класса  $C_0$ . Пусть  $\varphi \in C[0, T] \cap BV[0, T]$  и  $\mu \in BV[0, T]$ , причём

$$\mu(0) = \mu(0+) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t). \quad (5)$$

Пусть также

$$\beta \equiv \int_0^T \varphi(t) d\mu(t) \neq 0. \quad (6)$$

Тогда обратная задача (1), (3) имеет и притом единственное решение  $(u(t), g)$  при любом выборе элементов  $u_0, u_1 \in D(A)$ .

Данный результат гарантирует корректность обратной задачи (1), (3) в случае суперустойчивой полугруппы при минимальных ограничениях (5), (6), связанных с самой природой обратной задачи. Метод доказательства теоремы 1, предложенный в [6], носил неконструктивный характер и базировался на теории Гельфанда коммутативных банаховых алгебр, точнее, на её специальной версии, разработанной в трактате [1]. Дополнительный анализ показывает, что можно избежать обращения к этой мощной теории и получить теорему 1 элементарным конструктивным методом. Коротко обрисует план нашего исследования.

В предположениях теоремы 1 рассмотрим операторное уравнение на неизвестный элемент  $g \in E$ . Согласно схеме [6] это уравнение допускает запись

$$\beta g - Bg = f \quad (7)$$

со значением  $\beta \neq 0$  из формулы (6), оператором

$$B = \int_0^T \varphi(0) U(t) d\mu(t) + \int_0^T d\mu(t) \int_0^t U(t-s) d\varphi(s) \quad (8)$$

и заданным элементом  $f \in E$  вида

$$f = A \left( \int_0^T U(t) u_0 d\mu(t) - u_1 \right). \quad (9)$$

Интегралы в (8) понимаются в сильной операторной топологии. Используя структуру выражения (8) и оценку (4) с подходящим выбором  $\alpha > 0$ , можно оценить оператор  $B$  в некоторой эквивалентной норме и показать его квазинильпотентность.

**Теорема 2.** Пусть выполнены предположения теоремы 1, включая требования (5), (6). Тогда оператор  $B$  из формулы (8) является квазинильпотентным в  $E$ , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|B^k\|} = 0.$$

При этом решение операторного уравнения (7) представимо рядом Неймана

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \quad (10)$$

сходящимся по норме пространства  $E$ . Если элемент  $f \in E$  взят в виде (9), а число  $\beta \neq 0$  — в виде (6), то элемент  $g$  из формулы (10) дает второй компонент решения  $(u(t), g)$  поставленной обратной задачи (1), (3). При этом первый компонент — функция  $u(t)$  — выражается формулой (2).

Теорема 2 обосновывает итерационный алгоритм для поиска решения обратной задачи (1), (3) на базе ряда Неймана (10). Алгоритм приобретает законченный вид в специальном случае *нильпотентной полугруппы*  $U(t)$ , когда

$$U(t) = 0, \quad \forall t \geq t_0 > 0, \quad (11)$$

с некоторым фиксированным значением  $t_0$ . Всякая нильпотентная полугруппа очевидно будет суперустойчивой (квазинильпотентной). При дополнительных ограничениях на функции  $\varphi(t)$ ,  $\mu(t)$  можно установить следующий результат.

**Теорема 3.** Пусть выполнены предположения теоремы 1, включая требования (5), (6). Пусть дополнительно полугруппа  $U(t)$  является нильпотентной, удовлетворяя соотношению (11) с фиксированным значением  $t_0 > 0$ . Предположим также, что функция  $\mu(t)$  является постоянной на некотором промежутке  $[0, \varepsilon] \subset [0, T)$ , а функция  $\varphi(t)$  является постоянной на некотором промежутке  $[T - \delta, T] \subset (0, T]$ , причём

$$\varepsilon + \delta > T. \quad (12)$$

Тогда оператор  $B$  из формулы (8) является нильпотентным, и

$$B^k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq \frac{t_0}{\varepsilon + \delta - T}.$$

Соответственно, решение операторного уравнения (7) представимо в виде конечной суммы

$$g = \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \quad N_0 \equiv \left[ \frac{t_0}{\varepsilon + \delta - T} \right] - 1,$$

замещающей бесконечный ряд Неймана (10).

Здесь через  $[h]$  обозначен *потолок* числа  $h \in \mathbb{R}$ , т. е. наименьшее целое число, большее или равное  $h$ . Доказательство теоремы 3 основано на представлении оператора  $B$  в виде

$$B = U(\varepsilon + \delta - T) Q$$

где

$$Q = U(T - \delta) \int_{\varepsilon}^T \varphi(0) U(t - \varepsilon) d\mu(t) + \int_{\varepsilon}^T d\mu(t) \int_0^{T-\delta} U(t - \varepsilon + T - \delta - s) d\varphi(s).$$

Данное представление возможно в силу выполненного условия (12).

Простым «вырожденным» примером к теореме 3 служит модельная обратная задача с финальным переопределением:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, & u(T) = u_1. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь  $\varphi(t) \equiv 1$  на  $[0, T]$ , а  $\mu(t)$  есть функция единичного скачка в финальный момент времени  $t = T$ . Оператор  $B$  и элемент  $f$  из формул (8), (9) приобретают вид

$$B = U(T), \quad f = A(U(T)u_0 - u_1).$$

По-прежнему считаем, что полугруппа  $U(t)$  является нильпотентной, удовлетворяя соотношению (11) с фиксированным значением  $t_0 > 0$ . Тогда решение обратной задачи (13) представимо в замкнутой форме

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)g ds, \quad g = \sum_{k=0}^{N_0} B^k f = \sum_{k=0}^{N_0} U(kT)f. \quad (14)$$

В формуле (14) допустимо значение  $N_0 = \lceil t_0/T \rceil - 1$ .

Перечисленные результаты могут применяться в некоторых специальных разделах математической физики, связанных с теорией упругости и задачами линейного переноса.

## Литература

- [1] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ. 1962. – 830 с.
- [2] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М: Наука. 1967. – 464 с.
- [3] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. – N.Y.: Springer Verlag. 1983. – 279 p.
- [4] Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. – N.Y.: Springer. 2000. – 586 p.
- [5] Прилепко А. И., Тихонов И. В. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Известия РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 2. – С. 167–188.
- [6] Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56. Вып. 2. – С. 99–113.

- [7] Balakrishnan A. V. On superstability of semigroups // In: M.P. Polis et al (Eds.). Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics. – Chapman & Hall. 1999. – P. 12–19.
- [8] Balakrishnan A. V. Smart structures and super stability // In: G. Lumer, L. Weis (Eds.). Evolution equations and their applications in physical and life sciences. Lecture notes in pure and applied mathematics. Vol. 215. – Marcel Dekker. 2001. – P. 43–53.
- [9] Balakrishnan A. V. Superstability of systems // Applied Mathematics and Computation. 2005. Vol. 164. Issue 2. – P. 321–326.
- [10] Creutz D., Mazo M., Preda C. Superstability and finite time extinction for  $C_0$ -Semigroups // arXiv:0907.4812. Submitted. 2013. – P. 1–12.

## К ВОПРОСУ О ПРОВЕРКЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СКМ

Флегонтов А. В.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена,  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Санкт-Петербург  
e-mail: flegontoff@yandex.ru

**Flegontov A. V. To the question of verification of solutions of differential equations in the SCM.** Discusses the experience and provides some examples for the verification of large volumes of solutions of ordinary differential equations in explicit, implicit and parametric forms. Are considers traditional methods and automation of search and verification solutions in SCM, and solvers of such problems.

**Keywords:** ordinary differential equations, form solutions, computer support, problem solvers.

Рассматривается опыт и приводятся некоторые примеры по проверке больших массивов решений обыкновенных дифференциальных уравнений в явной, неявной и параметрической формах. Приводятся как традиционные методы и средства автоматизации поиска и проверки решений в СКМ, так и собственные решатели таких задач.

**Ключевые слова:** обыкновенные дифференциальные уравнения, формы решений, средства компьютерной поддержки, решатели.

В современной справочной, учебной и научной литературе по обыкновенным дифференциальным уравнениям накопилось огромное количество уравнений и видов представления их решений, которые, со временем, нуждаются в периодической верификации. В силу сложившегося уже большого объёма такой информации, наряду с традиционными штучными проверками средствами компьютерной математики (СКМ) в виде Mathematica, Maple, Derive, Maxima, намечается и подход по созданию собственных автоматизированных решателей и проверочных средств на языках Python, C++ и т. д.

В качестве полигона рассматривались 100 первых обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений и их решений в явной, неявной и параметрической формах из материалов учебных пособий [1, 2].

В проверке решений и поиске альтернативных решений, в случае несовпадений, активное участие принимали магистры 2 года обучения факультета ПМ–ПУ СПбГУ и бакалавры 3 курса факультета математики РГПУ им. А. И. Герцена.

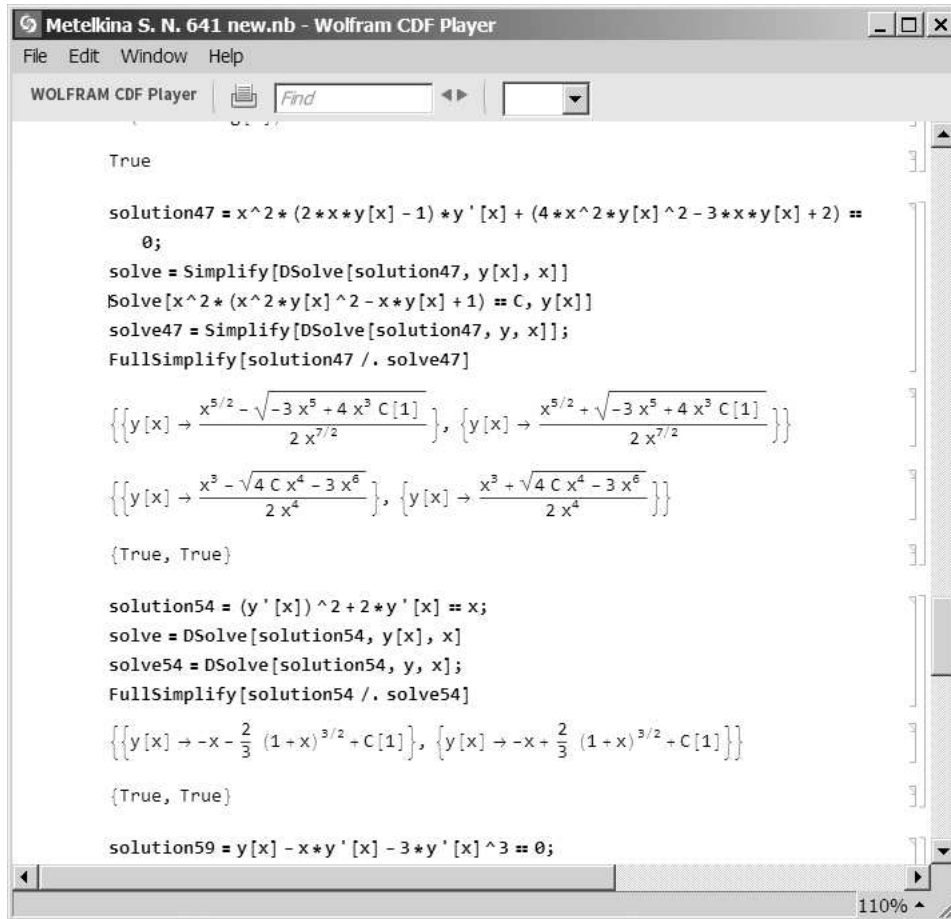
**Пример 1.** Проверка уравнения 12 и его решения [1] в системе Maple.

```

[12)
> de := x * (d/dx y(x) - 2 * y(x)) = b * x^3 * y(x)^2
              de := x * (d/dx y(x)) - 2 * y(x) = b * x^3 * y(x)^2      (5.1)
> ans2 := y(x) = (5 * x^2) / (x^5 + _C1)
              ans2 := y(x) = (5 * x^2) / (x^5 + _C1)                  (5.2)
> odetest(ans2, de)
              - (25 * b * x^7) / (x^5 + _C1)^2 - (25 * x^7) / (x^5 + _C1)^2  (5.3)
> ans1 := dsolve(de)
              ans1 := y(x) = (5 * x^2) / (-b * x^5 + 5 * _C1)          (5.4)
> odetest(ans1, de)
              0                                                         (5.5)
> restart

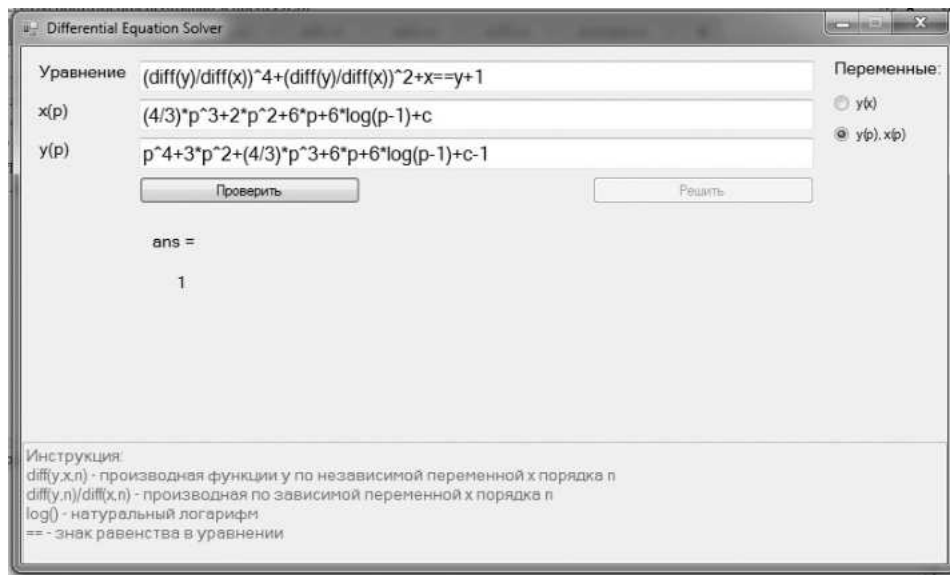
```

**Пример 2.** Проверка уравнений 47, 54 и их решений [1] в системе Mathematica.

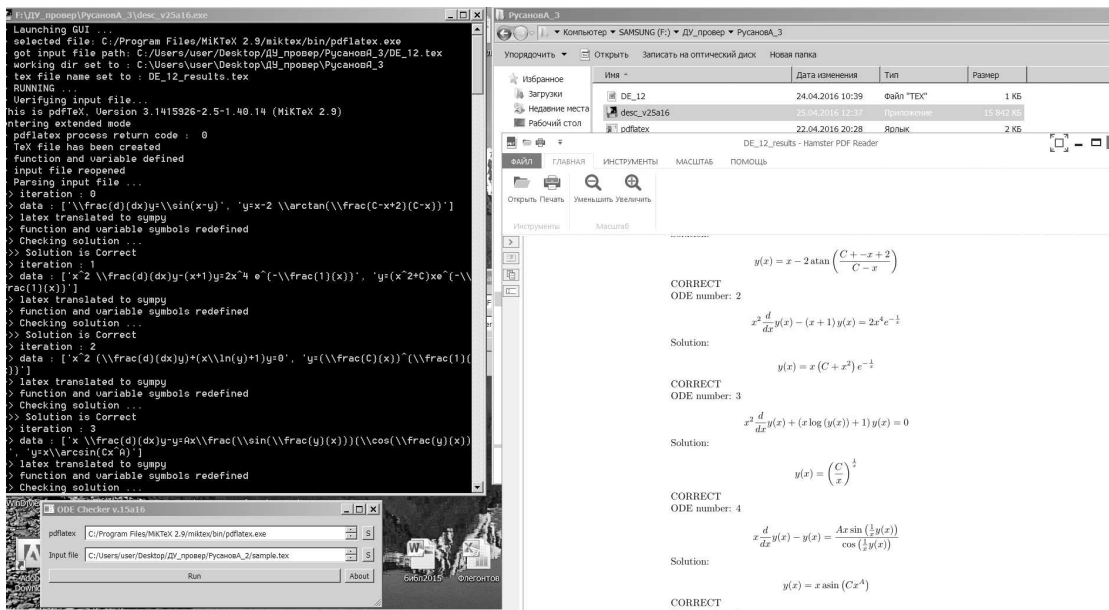


Для уравнения 47 система Mathematica находит по две пары разных на вид решений в явной форме. Однако и то, и другое решение сводится к одной и той же неопределённой форме, которая приведена в [1].

**Пример 3.** Решатель «Differential Equation Solver».



**Пример 4.** Решатель «ODE Checker v.15a16».



Приведенные решатели умеют проверять решения в разных формах для соответствующих уравнений, самостоятельно решать уравнения, обращаясь к специальным библиотекам подпрограмм, принимать исходные формулы в текстовой нотации и в специальной нотации TeX, обращаться к компиляторам TeX, а также выводить полученные результаты в файлы с расширением .tex или .pdf.

## Литература

- [1] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть I. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – 160 с.
- [2] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория): Учебное пособие. – СПб.: Изд. «Лань», 2017. – 500 с.

УДК 517.9

## ВЫБОР КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НОВЫХ РАЗРЕШИМЫХ СЛУЧАЕВ

Хакимова З. Н.

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского  
Санкт-Петербург

e-mail: zilya-khakimova@mail.ru

**Khakimova Z. N. The choice of a differential equations class to find new solvable cases.** It considers the expansion method of differential equations classes for discrete group transformations are closed. Many new solvable ordinary second- and third-order differential equations are found.



Рассматривается метод пополнения классов дифференциальных уравнений для получения замкнутости образующих дискретных групп. Найдено много новых разрешимых случаев обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го и 3-го порядков.

**1. Уравнения 2-го порядка.** Один из первых классов обыкновенных дифференциальных уравнений, к которому был применен дискретно-групповой анализ – класс обобщённых уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ):

$$y'' = Ax^k y^l (y')^m, \quad (1)$$

являющийся обобщением класса уравнений Эмдена-Фаулера

$$y'' = Ax^k y^l, \quad (2)$$

Классы уравнений (2) и (1) имеют много приложений – в физике (в том числе в механике, астрофизике), химии и т. д.

Элемент класса (1) обозначим вектором существенных параметров  $(k, l, m)$ . На всем классе уравнений (2) замкнута одна единственная образующая  $\mathfrak{s}$  циклической дискретной группы 2-го порядка:

$$\mathfrak{s} : x = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{u}{t}, \quad (k, l, 0) \rightarrow (-k - l - 3, l, 0), \quad \mathfrak{s}^2 = E.$$

Расширение класса (2) до (1) даёт замыкание образующих  $\mathfrak{r}$  и  $\mathfrak{g}$ , порождающих группу диэдра  $\mathfrak{D}_3$  6-го порядка ( $\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{g}^3 = \mathfrak{r}\mathfrak{g}^2 = E$ ):

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} : x = u, \quad y = t, \quad (k, l, m) &\rightarrow (l, k, 3 - m), \quad \mathfrak{r}^2 = E, \\ \mathfrak{g} : x = u^{\frac{1}{n+1}}, \quad y = (u)^{-\frac{1}{l}}, \quad (k, l, m) &\rightarrow \left( \frac{1}{1 - m}, -\frac{k}{k + 1}, \frac{2l + 1}{l} \right), \quad \mathfrak{g}^3 = E \end{aligned}$$

(в классе (2)  $\mathfrak{r}$  и  $\mathfrak{g}$  не замкнуты).

В справочнике Камке [2] было указано небольшое количество интегрируемых уравнений классов (2) и (1). Они “размножаются” в классе (1) по группе  $\mathfrak{D}_3$  и с помощью образующих, действующих на различных подклассах класса (1), до 99 разрешимых случаев [1].

Надо отметить, что в классе (1) преобразование  $\mathfrak{s}$  теряет свойство замкнутости.

Для восстановления замкнутости  $\mathfrak{s}$  пополним класс (1) до класса уравнений (3) добавлением ещё одного сомножителя:

$$y'' = Ax^k y^l (y')^m (xy' - y)^n, \quad (3)$$

элементы которого обозначим  $(k, l, m, n)$ :

$$\mathfrak{s} : (k, l, m, n) \rightarrow (-k - l - 3, l, n, m).$$

Оказывается, что преобразование  $\mathfrak{r}$  так же, как и в классе (1), замкнуто в классе уравнений (3):

$$\mathfrak{r} : (k, l, m, n) \rightarrow (l, k, 3 - m - n, n).$$

Приятным сюрпризом является тот факт, что известное касательное преобразование Лежандра оказалось замкнутым в классе (3):

$$\mathfrak{l}: x = \dot{u}, y = t\dot{u} - u, \quad (k, l, m, n) \rightarrow (-m, -n, -k, -l), \quad \mathfrak{l}^2 = E.$$

Класс уравнений (3) допускает группу  $\mathfrak{D}_6$  ( $\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{h}^6 = \mathfrak{lh}^2 = E$ ) с образующими  $\mathfrak{l}$  и  $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}$  [3–5]:

$$\mathfrak{h}: x = \frac{1}{\dot{u}}, y = \frac{t\dot{u} - u}{\dot{u}}, \quad (k, l, m, n) \rightarrow (-m, -n, k + l + 3, -l), \quad \mathfrak{h}^6 = E.$$

Разумеется, в свою очередь все 99 интегрируемых случаев класса (1) “размножаются” в классе (3) по группе  $\mathfrak{D}_6$  12-го порядка и дают около 400 разрешимых уравнений вида (3). В работе [3] приведены 47 таблиц разрешимых уравнений класса (3).

Любопытно, что среди этих новых разрешимых уравнений класса (3) оказалось 6 уравнений Эмдена–Фаулера, попарно связанных преобразованием  $\mathfrak{l}$ :

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{4}{5}, -\frac{11}{5}, \frac{1}{2}, 0 \right) \quad \text{и} \quad \left( -\frac{11}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{2}, 0 \right), \\ & \left( -\frac{17}{10}, -\frac{13}{10}, \frac{1}{2}, 0 \right) \quad \text{и} \quad \left( -\frac{13}{10}, -\frac{17}{10}, \frac{5}{2}, 0 \right), \\ & \left( -\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{1}{2}, 0 \right) \quad \text{и} \quad \left( -\frac{10}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{5}{2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Заодно обнаружилась новая образующая 2-го порядка, замкнутая на подклассе  $(k, -k - 3, m)$  класса уравнений (1):

$$\mathfrak{f}: x = -\frac{\dot{u}}{t\dot{u} - u}, y = \frac{1}{t\dot{u} - u}, \quad (k, -k - 3, m) \rightarrow (-m, m - 3, -k), \quad \mathfrak{f}^2 = E.$$

Дело в том, что преобразование  $\mathfrak{f}$  следующим образом действует в классе уравнений (3):

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{h}^3: (k, l, m, n) \rightarrow (-m, m + n - 3, -k, k + l + 3),$$

и расширение при  $k + l + 3 = 0$  оказалось нетривиальным.

Если к уравнениям

$$\left( -\frac{4}{5}, -\frac{11}{5}, \frac{1}{2}, 0 \right), \quad \left( -\frac{17}{10}, -\frac{13}{10}, \frac{1}{2}, 0 \right) \quad \text{и} \quad \left( -\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

применить группу  $\mathfrak{D}_3$  6-го порядка с образующими  $\mathfrak{r}$  и  $\mathfrak{g}$ , то получатся 18 новых интегрируемых уравнений Эмдена–Фаулера, “размноженных” по группе  $\mathfrak{D}_3$ :

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{4}{5}, -\frac{11}{5}, \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{\mathfrak{g}} \left( 2, 4, \frac{17}{11} \right) \xrightarrow{\mathfrak{g}} \left( -\frac{11}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{9}{4} \right) \\ & \quad \updownarrow \mathfrak{r} \quad \quad \quad \updownarrow \mathfrak{r} \quad \quad \quad \updownarrow \mathfrak{r} \quad ; \\ & \left( -\frac{11}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{2} \right) \xleftarrow{\mathfrak{g}} \left( 4, 2, \frac{16}{11} \right) \xleftarrow{\mathfrak{g}} \left( -\frac{2}{3}, -\frac{11}{6}, \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\left(-\frac{17}{10}, -\frac{13}{10}, \frac{1}{2}\right) & \xrightarrow{\mathfrak{g}} & \left(2, -\frac{17}{7}, \frac{16}{13}\right) & \xrightarrow{\mathfrak{g}} & \left(-\frac{13}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{27}{17}\right) \\
\updownarrow \mathfrak{r} & & \updownarrow \mathfrak{r} & & \updownarrow \mathfrak{r} \\
\left(-\frac{13}{10}, -\frac{17}{10}, \frac{1}{2}\right) & \xleftarrow{\mathfrak{g}} & \left(-\frac{17}{7}, 2, \frac{23}{13}\right) & \xleftarrow{\mathfrak{g}} & \left(-\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{24}{17}\right) \\
& & & & \\
\left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{1}{2}\right) & \xrightarrow{\mathfrak{g}} & \left(2, -\frac{11}{4}, \frac{13}{10}\right) & \xrightarrow{\mathfrak{g}} & \left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{18}{11}\right) \\
\updownarrow \mathfrak{r} & & \updownarrow \mathfrak{r} & & \updownarrow \mathfrak{r} \\
\left(-\frac{10}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{1}{2}\right) & \xleftarrow{\mathfrak{g}} & \left(-\frac{11}{4}, 2, \frac{17}{10}\right) & \xleftarrow{\mathfrak{g}} & \left(-\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{15}{11}\right)
\end{array}$$

Таким образом, теперь разрешимых случаев в классе (1) ОУЭФ – 117 уравнений. Новые 18 ОУЭФ [3, 6], так же как и прежние 99, порождают соответствующие разрешимые уравнения в классе (3).

**2. Уравнения 3-го порядка.** Класс дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$y''' = Ax^k y^l (y')^m (y'')^p, \quad (4)$$

элементы которого будем обозначать  $(k, l, m, p)$ , не столь хорош, как ОУЭФ (1), так как для него не найдено ни одной общей группы. Этот класс приводится к ОУЭФ (1) при  $l = 0$ :

$$\varphi: y' = u(x), \quad (k, 0, m, p) \rightarrow (k, m, p),$$

и при  $k = 0$ :

$$\psi: y' = z(y), \quad z = u^{1/2} \quad (0, l, m, p) \rightarrow \left(l, \frac{m-1}{2}, p\right),$$

или после переобозначений,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}: (k, l, m) &\rightarrow (k, 0, l, m), \\
\psi^{-1}: (k, l, m) &\rightarrow (0, k, 2l+1, m).
\end{aligned}$$

Каждое разрешимое ОУЭФ дает 2 различных уравнения класса (4). Поэтому 117 разрешимых ОУЭФ порождают 234 разрешимых уравнений класса (4).

Кроме этого, в [1] и [7] отмечены еще 9 разрешимых уравнений, принадлежащих подклассам класса уравнений (4): линейное  $(k, 1, 0, 0)$ , затем 7 уравнений, интегрируемых за счёт применения  $\psi^{-1}\zeta$  к разрешимым уравнениям класса (1) вида  $(k, -1/2, 0)$ :

$$\begin{array}{ccc}
\left(-3, -\frac{1}{2}, 0, 0\right), & \left(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{6}, 0, 0\right), & \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, 0, 0\right), \\
\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0\right), & \left(1, -\frac{5}{2}, 0, 0\right), & \left(3, -\frac{7}{2}, 0, 0\right),
\end{array}$$

где  $\xi$  – аналог преобразования  $\mathfrak{s}$  для класса (1):

$$\xi : x = \frac{1}{t}, y = \frac{u}{t^2}, \quad (k, l, 0, 0) \rightarrow (-k - 2l - 4, l, 0, 0),$$

и, наконец, 9-е уравнение  $(-3, 1, 0, 3)$ , интегрируемое за счёт применения преобразования  $\mathfrak{q}$  к уравнению  $(-3, -1/2, 0, 0)$ , где

$$\mathfrak{q} : x = \frac{1}{t}, y = (\ddot{u})^{1/\beta}, \quad (-3, 1, 0, l) \rightarrow \left(-3, 1, 0, \frac{l-1}{l}\right).$$

Таким образом, в классе (4) теперь 243 разрешимых случая (прежние 207 плюс новые 36).

Пополним класс уравнений (4) до такого класса уравнений, на котором преобразования  $\mathfrak{l}$ ,  $\mathfrak{r}$  и  $\mathfrak{s}$  были бы замкнуты. Для этого рассмотрим класс уравнений:

$$Ax^k y^l (y')^m (xy' - y)^n (y'')^p (y''')^q [y'y''' - 3(y'')^2]^r (xy''' + 3y'')^3 = 1. \quad (5)$$

Класс уравнений (5) содержит все рассмотренные выше классы (1)–(4), причём

$$\mathfrak{l} : (k, l, m, n, p, q, r, s) \rightarrow (m, n, k, l, -p - 3q - 3r - 3s, q, s, r);$$

$$\mathfrak{r} : (k, l, m, n, p, q, r, s) \rightarrow (l, k, -m - n - 3p - 5q - 5r, n, p, r, q, 0);$$

$$\mathfrak{s} : (k, l, m, n, p, q, r, s) \rightarrow (-k - l + 3 + 4q + 4s, l, n, m, p, s, 0, q).$$

Таким образом, преобразование  $\mathfrak{l}$  замкнуто на всем классе (5), а  $\mathfrak{r}$  и  $\mathfrak{s}$  – соответственно на подклассах  $s = 0$  и  $r = 0$ .

При  $n = r = s = 0$ ,  $q = -1$

$$y''' = Ax^k y^l (y')^m (y'')^p \xrightarrow{\mathfrak{l}} y''' = Bx^m y^k (xy' - y)^l (y'')^{3-p}; \quad (6)$$

$$y''' = Ax^k y^l (y')^m (y'')^p \xrightarrow{\mathfrak{r}} y'y''' - 3(y'')^2 = Bx^l y^k (y')^{5-m-3p} (y'')^p; \quad (7)$$

$$y''' = Ax^k y^l (y')^m (y'')^p \xrightarrow{\mathfrak{s}} xy''' + 3y'' = Ax^{-k-l+3p-4m} y^l (xy' - y)^m (y'')^p. \quad (8)$$

Поэтому каждое из разрешимых 243 уравнений класса (4) порождает сразу 3 разрешимых уравнения 3-го порядка классов (6)–(8). В справочнике [1] отмечено преобразование (6), а уравнения классов (7) и (8) рассмотрены лишь в частных случаях.

## Литература

- [1] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 560 с.
- [2] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
- [3] Зайцев О. В., Хакимова З. Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Актуальные вопросы современной науки, №3. – СПб.: Научно-издательский центр “Открытие”, 2014. – С. 3–11.

- [4] Хакимова З. Н. Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Труды Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского. – СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2014. – Вып. 645. – С. 57–62.
- [5] Зайцев О. В. О дискретных симметриях и новых разрешимых случаях в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Наука XXI века: новый подход. Материалы IX молодежной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. - СПб.: Научно-издательский центр “Открытие”, 2014. – С. 8–16.
- [6] Зайцев В. Ф., Зайцев О. В. Об одном применении метода вложения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции “Герценовские чтения–2015”. – СПб: РГПУ, 2014. – С. 30–33.
- [7] Зайцев В. Ф., Фалилеева Е. Г. О дискретно-групповом анализе уравнения // Деп. ВИНТИ №8294–В86. – 1986. – 22 с.

# Современные проблемы теории функций и функционального анализа

УДК 517.927.25

## НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЁННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Будаев В. Д.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: budaev@list.ru

**Budaev V. D. Some estimations of root fuctions of ordinary nonselfadjoint differential operators.** We establish some estimations of root functions of ordinary nonselfadjoint differential operator. The root functions are considered according to V. A. Il'in's works, i. e. regardless of a type of boundary conditions.

Установлены некоторые оценки собственных и присоединённых функций обыкновенного, вообще говоря, несамосопряжённого дифференциального оператора, понимаемых по В. А. Ильину, т. е. безотносительно к виду краевых условий.

На произвольном конечном интервале  $G = (a, b)$  рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(2m)} + p_2(x)u^{(2m-2)} + \dots + p_{2m-1}(x)u' + p_{2m}(x)u, \quad (m \geq 2), \quad (1)$$

с коэффициентами  $p_{2m-k}(x) \in W_1^k(G)$ ,  $(k = 0, 1, \dots, 2m - 2)$ .

Корневые (т. е. собственные и присоединённые) функции оператора  $L$  будем понимать в духе работ В. А. Ильина (см., например, [1]). Пусть  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  – последовательность комплексных чисел, занумерованных в порядке возрастания модуля. Пусть  $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$  – последовательность нулей и единиц, причем при  $\theta_n = 1$  требуем, чтобы  $\mu_n = \mu_{n-1}$ , и  $\theta_1 = 0$ . Системой корневых функций оператора  $L$  будем называть произвольную систему комплекснозначных отличных от тождественного нуля регулярных на  $G$  решений уравнения

$$Lu_n - (-1)^n \mu_n^{2m} u_n = \theta_n \mu_n^{2m-1} u_{n-1}. \quad (2)$$

Числа  $\lambda_n = (-1)^n \mu_n^{2m}$  будем называть собственными значениями, а сами  $\mu_n$  – спектральным параметром, причем для однозначности считаем, что  $\arg \mu_n \in (-\pi/2m, \pi/2m]$  (в частности,  $\operatorname{Re} \mu_n \geq 0$ ).

В ряде работ В. А. Ильина и его учеников (см., например, [1–7]) установлены критерий базисности систем корневых функций в  $L_2(K)$  на произвольном компакте  $K \subset G$ , критерий равносходимости на компакте спектральных разложений с тригонометрическим рядом, а также критерии безусловной базисности и базисности Рисса систем корневых функций на всем  $\overline{G}$ . Названные

критерии формулируются в терминах структуры спектра, а также выполнения некоторых неравенств, связывающих нормы корневых функций в различных пространствах, и не предполагают выполнения каких-либо краевых условий.

В диссертационной работе [7] автором предложено разбиение системы корневых функций на 3 попарно не пересекающихся класса. К классу  $U_1$  относим все функции  $u_n$  такие, что

$$\|u_n\|_{L_\infty(\bar{G})} \leq C \|u_n\|_{L_2(G)}$$

с произвольной фиксированной константой  $C > 0$ ; к классу  $U_2$  – функции, не вошедшие в класс  $U_1$ , но удовлетворяющие условию

$$\|u_n\|_{L_2(K)} \geq \varepsilon \|u_n\|_{L_2(G)},$$

где  $K = [a + \delta, b - \delta]$ , а  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  – произвольные достаточно малые фиксированные константы; наконец,  $U_3 = \{u_n\} \setminus (U_1 \cup U_2)$ . Таким образом, классу  $U_3$  принадлежат те функции  $u_n$ , для которых

$$\|u_n\|_{L_2(K)} \leq \varepsilon \|u_n\|_{L_2(G)}. \quad (3)$$

Говоря нестрогим языком, к классу  $U_1$  следует отнести все те корневые функции, у которых главный член асимптотики осциллирует, к классу  $U_2$  – функции, у которых главный член асимптотики содержит как осциллирующие, так и экспоненциальные слагаемые, а к классу  $U_3$  – у которых главный член асимптотики содержит только экспоненциально растущие либо экспоненциально убывающие слагаемые.

Отметим, что особую сложность при исследовании базисных свойств систем корневых функций представляет класс  $U_3$ .

Назовем рангом собственной функции длину отвечающей ей цепочки корневых функций.

**Теорема 1.** Пусть  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  – некоторая последовательность корневых функций оператора  $L$ , содержащаяся в классе  $U_3$  и такая, что  $|\mu_n| > \mu_0 > 0$ , где  $\mu_0$  достаточно велико. Пусть выполнены следующие условия: 1) ранг собственных функций равномерно ограничен, 2) условие Карлемана, т. е.

$$\exists M_1 > 0: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |\operatorname{Im} \mu_n| \leq M_1, \quad (4)$$

3) антиаприорная оценка, т. е.

$$\exists M_2 > 0: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|\theta_n \mu_{n-1}\|_{L_2(G)} \leq M_2 \|u_n\|_{L_2(G)}. \quad (5)$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|u_n\|_{L_\infty(\bar{G})} \geq C \sqrt{|\mu_n|} \cdot \|u_n\|_{L_2(G)}, \quad (6)$$

где константа  $C$  зависит лишь от коэффициентов оператора (а также, вообще говоря, от  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ).

**Замечание 1.** В работе [8] показано, что любую систему корневых функций можно модифицировать (с помощью линейных комбинаций), не меняя собственных значений так, чтобы антиаприорная оценка (5) была выполнена. Таким образом, требование выполнения оценки (5) не ограничивает общности.

**Замечание 2.** Хорошо известно (см., например, [9]), что корневые функции при условии выполнения антиаприорной оценки удовлетворяют неравенству

$$\|u_n\|_{L_\infty(\bar{G})} \leq \text{const} \sqrt{|\mu_n|} \cdot \|u_n\|_{L_2(G)}. \quad (7)$$

Таким образом, в теореме утверждается, что  $L_\infty$ -норма функций класса  $U_3$  удовлетворяют не только оценке сверху (7), но и оценке снизу (6), имеющей тот же порядок.

*Доказательство.* В работах [6, 7] доказано, что для корневых функций класса  $U_3$  (при выполнении условия Карлемана) справедлива следующая односторонняя формула среднего значения:

$$\begin{aligned} u_n(x \pm r) = & \sum_{k=1}^{m-1} \exp i\mu_n \alpha_k r \left( D_{n,k}^\pm(x) + \sum_{u_{n-q} \sim u_n} A_q r^q D_{n-q,k}^\pm(x) \right) + \\ & + O(\varepsilon + |\mu|^{-1/2}) \cdot \left( \|u_n\|_{L_2(G)} + \sum_{u_{n-q} \sim u_n} \|u_{n-q}\|_{L_2(G)} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

где  $r > 0$  достаточно мало,  $\alpha_k = \exp i\pi k/m$ , символ  $u_{n-q} \sim u_n$  означает, что функции  $u_{n-q}$  и  $u_n$  принадлежат одной цепочке корневых функций,  $A_q$  – отличные от нуля постоянные, а все величины  $D$  с различными индексами могут быть выписаны в явном виде (для краткости опускаем их явный вид в силу его громоздкости) и удовлетворяют оценке

$$|D| \leq \text{const} \left( \|u_n\|_{L_\infty(G)} + |\mu_n|^{-1} \cdot \|\theta_n u_{n-1}\|_{L_\infty(G)} \right). \quad (9)$$

Рассмотрим компакт  $K = [a + \delta, b - \delta]$  и воспользуемся тем, что  $u_n \in U_3$ :

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L_2(G)}^2 = & \|u_n\|_{L_2(a, a+\delta)}^2 + \|u_n\|_{L_2(K)}^2 + \|u_n\|_{L_2(b-\delta, b)}^2 \leq \\ & \leq \|u_n\|_{L_2(a, a+\delta)}^2 + \varepsilon^2 \|u_n\|_{L_2(G)}^2 + \|u_n\|_{L_2(b-\delta, b)}^2. \quad (10) \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (10) с помощью формулы (8):

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L_2(a, a+\delta)}^2 \leq & \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^\delta \exp(2\text{Re}(i\mu_n \alpha_k)r) \cdot \left( |D_{n,k}^\pm(a)| + \sum_{u_{n-q} \sim u_n} |A_q| r^q |D_{n-q,k}^\pm(a)| \right)^2 dr + \\ & + O(\varepsilon^2 + |\mu_n|^{-1}) \cdot \left( \|u_n\|_{L_2(G)}^2 + \sum_{u_{n-q} \sim u_n} \|u_{n-q}\|_{L_2(G)}^2 \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\int_0^\delta \exp(2\text{Re}(i\mu_n \alpha_k)r) dr = O(|\mu_n|^{-1})$  и  $\int_0^\delta r^q \exp(2\text{Re}(i\mu_n \alpha_k)r) dr = O(|\mu|^{-2})$  ( $q \geq 1$ ).



Пользуясь оценкой (9), получим, что

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L_2(a, a+\delta)}^2 &\leq \|u_n\|_{L_\infty(\bar{G})}^2 \cdot O(|\mu_n|^{-1}) + \sum_{u_{n-q} \sim u_n} \|u_{n-q}\|_{L_\infty(\bar{G})}^2 \cdot O(|\mu_n|^{-2}) + \\ &+ O(\varepsilon^2 + |\mu_n|^{-1}) \cdot \left( \|u_n\|_{L_2(G)}^2 + \sum_{u_{n-q} \sim u_n} \|u_{n-q}\|_{L_2(G)}^2 \right). \end{aligned}$$

Для оценки первой из сумм в правой части применим неравенство (7), после чего в обеих суммах воспользуемся антиаприорной оценкой (5). Тогда

$$\|u_n\|_{L_2(a, a+\delta)}^2 \leq \|u_n\|_{L_\infty(\bar{G})}^2 \cdot O(|\mu_n|^{-1}) + O(\varepsilon^2 + |\mu_n|^{-1}) \cdot \|u_n\|_{L_2(G)}^2.$$

Аналогично оценивается норма корневых функций по отрезку  $[b - \delta, b]$ . В итоге из неравенства (10) получим

$$\|u_n\|_{L_2(G)}^2 \leq \|u_n\|_{L_\infty(\bar{G})}^2 \cdot O(|\mu_n|^{-1}) + O(\varepsilon^2 + |\mu_n|^{-1}) \cdot \|u_n\|_{L_2(G)}^2.$$

Учитывая, что  $\varepsilon > 0$  мало, а  $|\mu_n|$  достаточно велико, приходим к оценке (6) ■

Естественно поставить вопрос: можно ли обратить утверждение теоремы, т. е. достаточна ли оценка (6) для принадлежности последовательности корневых функций классу  $U_3$ ? Ответ на этот вопрос отрицателен, что показывает следующий контрпример.

*Контрпример.* Рассмотрим систему функций  $u_n(x) = \sqrt{n} \exp(-nx) + \sin nx$  на отрезке  $[0, \pi]$ , которая является системой собственных функций простейшего оператора  $Lu = u^{(4)}$ . Несложно убедиться, что  $\|u_n\|_{L_\infty[0, \pi]} = \sqrt{n}$ , а нормы функций в  $L_2$  как по всему отрезку  $[0, \pi]$ , так и по любому компактному  $K \subset [0, \pi]$  ограничены сверху и снизу положительными константами. Таким образом, система удовлетворяет оценке (6), но не принадлежит классу  $U_3$ .

В заключение отметим, что идея данной работы восходит к диссертации автора [7], но там она не была доведена до логического завершения.

## Литература

- [1] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 5. – С. 771–794.
- [2] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 6. – С. 980–1009.
- [3] Ильин В. А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1983. Т. 273. № 5. – С. 1048–1053.
- [4] Будаев В. Д. Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов. I // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. – С. 2033–2044.

- [5] Будаев В. Д. Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов. II // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. – С. 23–33.
- [6] Будаев В. Д. О необходимых условиях безусловной базисности систем корневых функций несамосопряженных дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1993. Т. 329. № 4. – С. 396–398.
- [7] Будаев В. Д. Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов. Дисс. доктора физ.-мат. наук. – М., МГУ. 1993. – 242 с.
- [8] Будаев В. Д. Некоторые свойства корневых функций дифференциальных операторов, связанные с безусловной базисностью // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 1. – С. 9–14.
- [9] Будаев В. Д. Оценка модуля производной регулярного решения решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 2. С. 198–204.

УДК 517.547.2, 517.95, 517.983.23

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ОДНОЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА, ВАЖНОЙ ДЛЯ ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Карев А. В., Тихонов И. В.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Москва

e-mail: alexander.karev.30@gmail.com, ivtikh@mail.ru

**Karev A. V., Tikhonov I. V. On the distribution of zeros of Mittag-Leffler entire function which is important for the inverse problems theory.** We formulate the exact results for the zeros distribution of a special entire function, which appears naturally in the analysis. Some applications to the theory of linear inverse problems are noted.

Сформулированы точные результаты о распределении нулей одной специальной целой функции, естественно возникающей в анализе. Указаны возможные применения в теории линейных обратных задач для эволюционных уравнений.

Некоторое время назад в теории неклассических задач для абстрактных эволюционных уравнений возник интерес к специальным целым функциям типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho^{-1}m + \mu)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

порядка  $\rho > 0$  с параметром  $\mu \in \mathbb{C}$  (см. [1]–[4]).

Обсудим сейчас специальный частный случай функции (1), естественно возникающий при исследовании одной обратной задачи для эволюционного

уравнения. Исходное выражение имеет вид

$$L(z) = \int_0^1 dt \int_0^t e^{z(t-s)} ds, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Возможны также другие представления:

$$L(z) = \int_0^1 e^{z\tau} (1 - \tau) d\tau, \quad (3)$$

$$L(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad L(0) = \frac{1}{2}, \quad (4)$$

$$L(z) = \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(m+2)!}, \quad (5)$$

$$L(z) = E_1(z; 3). \quad (6)$$

Каждое из представлений (3)–(6) играет свою роль при исследовании функции (2). Формула (6) показывает, в частности, что (2) является целой функцией типа Миттаг-Леффлера с параметрами  $\rho = 1$  и  $\mu = 3$ .

Учитывая интересы возможных приложений, требуется как можно точнее локализовать нули функции (2). Имеющиеся оценки (см. [4]–[6]) являются слишком общими и недостаточными для целей тонкого исследования. В то же время, пользуясь особой спецификой функции (2), можно установить следующий вполне законченный результат.

**Теорема 1.** Все нули функции  $L(z)$  из формулы (2) являются простыми и образуют бесконечный счётный набор вида

$$z_k = x_k + iy_k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \quad z_{-k} = \bar{z}_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нули  $z_k = x_k + iy_k$  при  $k \in \mathbb{N}$  расположены в верхней полуплоскости; их вещественные и мнимые части строго возрастают к  $+\infty$  и при всех  $k \in \mathbb{N}$  подчинены ограничениям

$$x_k = \operatorname{Re} z_k > 2, \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < y_k = \operatorname{Im} z_k < \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \quad (7)$$

Если обозначить

$$b_k \equiv \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

то верно представление

$$z_k = \ln b_k + ib_k + \alpha_k - i\beta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Здесь  $\alpha_k > 0$  и  $\beta_k > 0$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ , причем  $\alpha_k \rightarrow 0$  и  $\beta_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  так, что  $\alpha_k = o(\beta_k)$ . Кроме того, справедливы оценки

$$0 < \alpha_k < \frac{1}{2} \left( \frac{\ln b_k + 2}{b_k} \right)^2, \quad \frac{\ln b_k}{b_k} < \beta_k < \frac{\ln b_k + 2}{b_k}, \quad (10)$$

выполненные при всех  $k \in \mathbb{N}$ .

Доказательство теоремы элементарно, но весьма технично. Оно основано на исследовании корней системы

$$\begin{cases} \cos y = e^{-x}(1+x), \\ \sin y = e^{-x}y, \end{cases}$$

возникающей из представления (4). В рассуждениях используется ряд вспомогательных оценок для некоторых элементарных функций.

Отметим также, что нули функции (2) выражаются в явном виде через специальную *W-функцию Ламберта*. Последняя определяется тождеством

$$W(\zeta)e^{W(\zeta)} = \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

как многозначная функция, обратная к функции  $\zeta = we^w$  (см. [7], [8]).

**Теорема 2.** Нули функции  $L(z)$  из формулы (2), попадающие в верхнюю полуплоскость, представимы в виде

$$z_k = -1 - W_{-k-1}(-e^{-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

где  $W_j(\zeta)$  —  $j$ -я однозначная ветвь  $W$ -функции Ламберта. Представление (11) дает нули в той же нумерации, что и формулы (7)–(10) в теореме 1.

В системе MATLAB команда для вычисления нулей (11) выглядит так

$$\text{-1-lambertw((-1)*k-1, -exp(-1)).}$$

Характер поведения первых ста нулей  $z_k$  при  $k = \pm 1, \dots, \pm 50$  ясен из рис. 1.

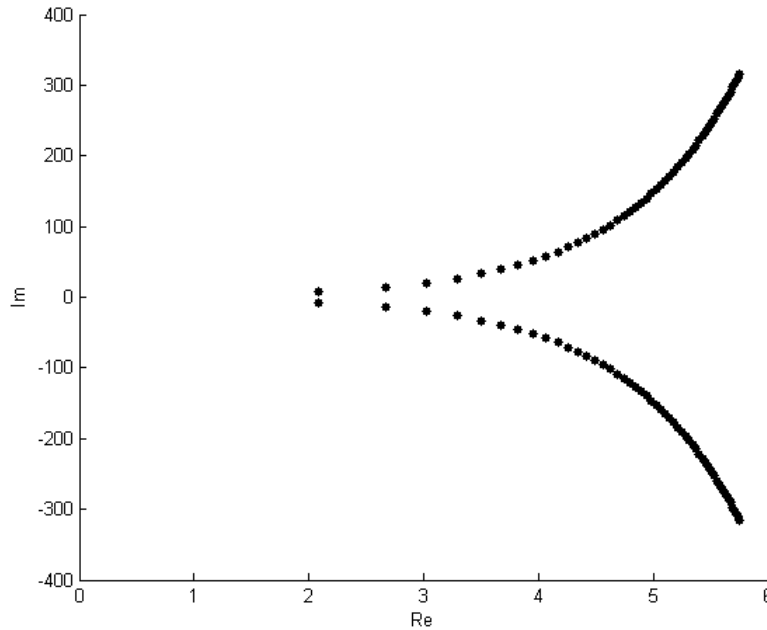


Рис. 1. Результат компьютерного расчёта первых ста нулей для функции (2).

Приведем таблицу для первых десяти нулей в верхней полуплоскости, вычисленных в системе MATLAB. Значения  $x_k, y_k$  даём с точностью до  $10^{-6}$ , округляя последнюю значимую цифру должным образом:

$$\begin{aligned} z_1 &\approx 2.088843 + 7.461489i, & z_6 &\approx 3.674505 + 39.151074i, \\ z_2 &\approx 2.664068 + 13.879056i, & z_7 &\approx 3.822153 + 45.447385i, \\ z_3 &\approx 3.026297 + 20.223835i, & z_8 &\approx 3.950805 + 51.740885i, \\ z_4 &\approx 3.291678 + 26.543239i, & z_9 &\approx 4.064796 + 58.032409i, \\ z_5 &\approx 3.501269 + 32.850548i, & z_{10} &\approx 4.167126 + 64.322490i. \end{aligned}$$

Для вычисления последующих нулей удобны приближённые формулы

$$x_k \approx \ln b_k + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln b_k + 1}{b_k} \right)^2, \quad y_k \approx b_k - \frac{\ln b_k + 1}{b_k}, \quad (12)$$

со значением  $b_k$ , заданным в (8).

Расчёты показывают, что первая из формул (12) будет справедливой с точностью  $10^{-3}$ , начиная с 12-го нуля функции  $L(z)$ ; затем с точностью  $10^{-4}$ , начиная с 41-го нуля; с точностью  $10^{-5}$ , начиная со 141-го нуля; и, наконец, с точностью  $10^{-6}$ , начиная с 478-го нуля. В свою очередь вторая из формул (12) будет справедливой с точностью  $10^{-4}$ , начиная уже с 6-го нуля функции  $L(z)$ ; с точностью  $10^{-5}$ , начиная с 21-го нуля; с точностью  $10^{-6}$ , начиная с 56-го нуля; и, наконец, с точностью  $10^{-7}$ , начиная со 145-го нуля.

Полученные результаты находят применение в теории обратных задач (понимаемых в смысле [9], [10]). Непосредственно к функции (2) приводит изучение следующего частного примера из специального класса обратных задач, введенного в [11], [12]. В банаховом пространстве  $E$  на отрезке  $[0, T]$  рассмотрим абстрактное дифференциальное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + g, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

с неизвестным элементом  $g \in E$ . Оператор  $A$  — линейный замкнутый в  $E$  с областью определения  $D(A) \subset E$ . Для одновременного нахождения функции  $u(t)$  и элемента  $g$  возьмём условия

$$u(0) = u_0, \quad \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = u_1. \quad (14)$$

Элементы  $u_0, u_1 \in D(A)$  считаем заданными. Решением задачи (13), (14) назовем пару  $(u(t), g)$ , где  $u: [0, T] \rightarrow E$ ,  $g \in E$ . Предполагаем, что  $u \in C^1([0, T]; E)$ , причём  $u(t) \in D(A)$  при  $0 \leq t \leq T$ .

Согласно [12] основные свойства обратной задачи (13), (14) должны выражаться в терминах характеристической функции

$$L_T(\lambda) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^t e^{\lambda(t-s)} ds = \frac{e^{\lambda T} - 1 - \lambda T}{\lambda^2 T}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

Функции (15) и (2) связаны простым соотношением

$$L_T(\lambda) = T \cdot L(\lambda T), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

Недавно авторам удалось установить следующий критерий единственности решения задачи (13), (14), справедливый без каких-либо дополнительных предположений об операторе  $A$ , кроме линейности и замкнутости.

**Теорема 3.** Для того чтобы обратная задача (13), (14) при любом выборе элементов  $u_0, u_1 \in D(A)$  имела не более одного решения  $(u(t), g)$  необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции  $L_T(\lambda)$  из формулы (15) не являлся собственным значением оператора  $A$ .

Принимая во внимание связь (16) и учитывая теорему 1 о распределении нулей функции  $L(z)$ , получаем следующие удобные признаки единственности решения для обратной задачи (13), (14).

**Теорема 4.** Пусть выполнено любое из предположений: 1) оператор  $A$  вообще не имеет собственных значений; 2) все собственные значения оператора  $A$  вещественные; 3) все собственные значения оператора  $A$  расположены в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda \leq 2/T$ ; 4) все собственные значения оператора  $A$  расположены в полосе  $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 7\pi/(3T)$ . Тогда обратная задача (13), (14) имеет не более одного решения  $(u(t), g)$  при любом выборе элементов  $u_0, u_1 \in D(A)$ .

Исследование разрешимости обратной задачи (13), (14) удастся провести при дополнительном предположении, что  $A$  есть производящий оператор для некоторой полугруппы класса  $C_0$  (см. [13], [14]). В таком случае из теории [12] можно извлечь следующий критерий корректности.

**Теорема 5.** Пусть оператор  $A$  порождает  $C_0$ -полугруппу  $U(t)$ ,  $t \geq 0$ . Для того чтобы обратная задача (13), (14) была однозначно разрешимой при любом выборе элементов  $u_0, u_1 \in D(A)$  необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции  $L_T(\lambda)$  из формулы (15) не принадлежал спектру оператора  $A$ .

Воспользуемся стандартной оценкой

$$\|U(t)\| \leq M e^{\beta t}, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

с некоторыми константами  $M \geq 1$  и  $\beta \geq 0$ . Тогда спектр оператора  $A$  будет в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda \leq \beta$ . Затем, принимая во внимание (16) и формулу (7) из теоремы 1, заключаем, что все нули характеристической функции  $L_T(\lambda)$  попадут в полуплоскость  $\operatorname{Re} \lambda > 2/T$ . Подобное сочетание позволяет сформулировать следующий результат.

**Теорема 6.** Пусть оператор  $A$  порождает  $C_0$ -полугруппу  $U(t)$ ,  $t \geq 0$ , и оценка (17) выполнена с некоторыми константами  $M \geq 1$  и  $\beta \geq 0$ . Пусть значение  $T > 0$  взято так, что  $\beta T \leq 2$ . Тогда задача (13), (14) с указанным  $T$  однозначно разрешима при любом выборе элементов  $u_0, u_1 \in D(A)$ .

Можно показать еще, что если  $\beta T \leq 1$ , то неизвестное неоднородное слагаемое  $g \in E$  в уравнении (13) выражается рядом Неймана

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f,$$

где

$$B = \frac{1}{T} \int_0^T (1 - \gamma T + \gamma t) U(t) dt, \quad f = (\gamma I - A) \left[ u_1 - \frac{1}{T} \int_0^T U(t) u_0 dt \right]$$

с некоторым параметром  $\gamma > \beta$ . Отсюда получаем конструктивный алгоритм для нахождения решения поставленной обратной задачи.

Авторы отмечают вклад А. Ю. Попова и В. Б. Шерстюкова, при помощи которых удалось установить теорему 1. Мы также признательны Ю. С. Эйдельману за интерес и обсуждения обратной задачи (13), (14).

## Литература

- [1] Попов А. Ю. О спектральных значениях одной краевой задачи и нулях функций Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. – С. 611–621.
- [2] Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. – С. 637–644.
- [3] Тихонов И. В. Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. – С. 325–336.
- [4] Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. – С. 3–171.
- [5] Pólya G. Uber die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen // Math. Zeitschrift. 1918. Bd. 2. Hefte 3/4. – S. 352–383.
- [6] Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 427 с.
- [7] Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the Lambert W function // Advances in Computational Mathematics. 1996. Vol. 5. – P. 329–360.
- [8] Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. – Саров: РФЯЦ–ВНИИЭФ, 2006. – 159 с.
- [9] Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 206 с.
- [10] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. – New-York, Basel: Marcel Dekker, 2000. – 709 p.
- [11] Прилепко А. И., Тихонов И. В. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Известия РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 2. – С. 167–188.
- [12] Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56, № 2. – С. 99–113.
- [13] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

- [14] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. – New-York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1983. – 279 p.

## О СИЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ С ЕДИНИЧНОЙ НОРМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $l_\infty^{(4)}$

Локоть В. В., Мартынов О. М.

Мурманский арктический государственный университет

Мурманск

e-mail: olegmartynov@yandex.ru

**Lokot' V. V., Martynov O. M. About strong unicity of minimal norm-one projections in  $l_\infty^{(4)}$ .** In this paper we find constants of strong unicity for some minimal norm-one projections in  $l_\infty^{(4)}$ .

В данной статье находятся константы сильной единственности для некоторого класса операторов проектирования с единичной нормой в пространстве  $l_\infty^{(4)}$ .

Пусть  $Y_{n-2}$  – подпространство пространства  $l_\infty^{(n)}$  размерности  $n - 2$ .

Оператор проектирования  $\pi_0 : l_\infty^{(n)} \rightarrow Y_{n-2}$  называется сильно единственным, если существует число  $k \in (0; 1]$  такое, что неравенство

$$\|\pi_0\| + k \cdot \|\pi - \pi_0\| \leq \|\pi\| \quad (1)$$

выполняется для любого оператора проектирования  $\pi : l_\infty^{(n)} \rightarrow Y_{n-2}$ .

Через  $k_0$  обозначим максимальное значение  $k$ , при котором выполняется неравенство (1).

Очевидно, что оператор  $\pi_0$  имеет минимальную норму и обладает свойством единственности.

Известно [1], что любой оператор проектирования  $\pi : l_\infty^{(n)} \rightarrow Y_{n-2}$  имеет вид

$$\pi_{\alpha,\beta}x = x - \alpha f(x) - \beta g(x),$$

где  $\alpha \in l_\infty^{(n)}$ ,  $\beta \in l_\infty^{(n)}$ ,  $f$  и  $g$  – линейные функционалы, определённые на  $l_\infty^{(n)}$ , причём

$$f(\alpha) = g(\beta) = 1; f(\beta) = g(\alpha) = 0. \quad (2)$$

Гиперплоскости пространства  $l_\infty^{(n)}$  имеют вид

$$f^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^{(n)} \left| f(x) = \sum_{i=1}^n f_i x_i = 0 \right. \right\},$$

$$g^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^{(n)} \left| g(x) = \sum_{i=1}^n g_i x_i = 0 \right. \right\},$$



а  $Y_{n-2} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ .

Нормы операторов  $\pi$  и  $\pi - \pi_0$  вычисляются по формулам

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} T_i, \quad \|\pi - \pi_0\| = \max_{1 \leq i \leq n} B_i, \quad \text{где} \quad T_i = \sum_{j=1}^n |\delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j|,$$

$$B_i = \sum_{j=1}^n \left| (\alpha_i - \alpha_i^{(0)}) f_j + (\beta_i - \beta_i^{(0)}) g_j \right|, \quad \text{а оператор} \quad \pi_0 \quad \text{имеет вид}$$

$$\pi_{\alpha, \beta}^{(0)} x = x - \alpha^{(0)} f(x) - \beta^{(0)} g(x).$$

Найдём константы сильной единственности операторов проектирования пространства  $l_\infty^{(4)}$  на некоторый класс подпространств коразмерности 2.

Функционалы  $f$  и  $g$  зададим следующим образом:

$$f = (1, r, 0, 0), \quad g = (0, 0, r, 1), \quad (3)$$

где параметр  $r > 0$ . Соотношения (2) примут вид:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha_1 + r\alpha_2 = 1, & g(\alpha) &= r\alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ f(\beta) &= \beta_1 + r\beta_2 = 0, & g(\beta) &= r\beta_3 + \beta_4 = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

**Лемма 1.** Пусть  $\pi_{\alpha, \beta}^{(0)}$  – оператор проектирования с минимальной нормой пространства  $l_\infty^{(4)}$  на подпространство  $Y_2$ , определяемое функционалами (3). Тогда  $\|\pi_{\alpha, \beta}^{(0)}\| = 1$ .

*Доказательство.* Найдём значения  $T_i^{(0)}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), где  $T_i^{(0)} = \sum_{j=1}^4 |\delta_{ij} - \alpha_i^{(0)} f_j - \beta_i^{(0)} g_j|$ . Имеем

$$T_1^{(0)} = \sum_{j=1}^4 |\delta_{1j} - \alpha_1^{(0)} f_j - \beta_1^{(0)} g_j| = |1 - \alpha_1^{(0)}| + r|\alpha_1^{(0)}| + r|\beta_1^{(0)}| + |\beta_1^{(0)}|,$$

$$T_2^{(0)} = \sum_{j=1}^4 |\delta_{2j} - \alpha_2^{(0)} f_j - \beta_2^{(0)} g_j| = |\alpha_2^{(0)}| + |1 - r\alpha_2^{(0)}| + r|\beta_2^{(0)}| + |\beta_2^{(0)}|,$$

$$T_3^{(0)} = \sum_{j=1}^4 |\delta_{3j} - \alpha_3^{(0)} f_j - \beta_3^{(0)} g_j| = |\alpha_3^{(0)}| + r|\alpha_3^{(0)}| + |1 - r\beta_3^{(0)}| + |\beta_3^{(0)}|,$$

$$T_4^{(0)} = \sum_{j=1}^4 |\delta_{4j} - \alpha_4^{(0)} f_j - \beta_4^{(0)} g_j| = |\alpha_4^{(0)}| + r|\alpha_4^{(0)}| + r|\beta_4^{(0)}| + |1 - \beta_4^{(0)}|.$$

Рассмотрим два случая. 1)  $0 < r \leq 1$ . Положим  $\alpha_1^{(0)} = \beta_4^{(0)} = 1$ ,  $\alpha_2^{(0)} = \alpha_3^{(0)} = \alpha_4^{(0)} = \beta_1^{(0)} = \beta_2^{(0)} = \beta_3^{(0)} = 0$ . При этом условия (2) выполняются. Тогда  $T_1^{(0)} = r \leq 1$ ,  $T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = 1$ ,  $T_4^{(0)} = r \leq 1$ .

Следовательно,

$$\|\pi_{\alpha, \beta}^{(0)}\| = \max_{1 \leq i \leq 4} T_i^{(0)} = 1.$$

2)  $r > 1$ . В этом случае положим  $\alpha_2^{(0)} = \beta_3^{(0)} = \frac{1}{r}$ ,  $\alpha_1^{(0)} = \alpha_3^{(0)} = \alpha_4^{(0)} = \beta_1^{(0)} = \beta_2^{(0)} = \beta_4^{(0)} = 0$ . Условия (2) выполняются. Тогда  $T_1^{(0)} = 1$ ,  $T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = \frac{1}{r} < 1$ ,  $T_4^{(0)} = 1$ .

Следовательно,

$$\|\pi_{\alpha, \beta}^{(0)}\| = \max_{1 \leq i \leq 4} T_i^{(0)} = 1.$$

Лемма 1 доказана.

**Замечание.** Этот результат можно было получить из более общей теоремы [2, с. 88]. Кроме того, из теоремы 1 [2, с. 101] следует, что рассмотренный оператор проектирования обладает свойством единственности, если  $r \neq 1$  ( $r > 0$ ).

**Лемма 2.** Значение  $k \leq \frac{1-r}{1+r}$ , если  $0 < r < 1$  и  $k \leq \frac{r-1}{1+r}$ , если  $r > 1$ .

*Доказательство.* Для получения оценки  $k$  сверху рассмотрим оператор  $\bar{\pi}x = x - \bar{\alpha}f(x) - \bar{\beta}g(x)$ . Значения  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$  определим следующим образом:  $0 < \bar{\alpha}_1 \leq 1$ ,  $\bar{\alpha}_2 \geq 0$ ,  $\bar{\beta}_3 = \bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{\beta}_4 = \bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_4 = \bar{\alpha}_3 = \bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = 0$ .

Вычислим нормы операторов  $\bar{\pi}$  и  $\bar{\pi} - \pi^{(0)}$ .

1.  $0 < r < 1$ . Имеем

$$\|\bar{\pi}\| = \max_{1 \leq i \leq 4} \bar{T}_i = \max_i \sum_{j=1}^4 |\delta_{ij} - \bar{\alpha}_i f_j - \bar{\beta}_i g_j|. \quad \text{Найдем значения } \bar{T}_i.$$

$$\bar{T}_1 = 1 - \bar{\alpha}_1 + r\bar{\alpha}_1 = 1 + (r-1)\bar{\alpha}_1 = 1 + (r-1)(1-r\bar{\alpha}_2) = r + r(1-r)\bar{\alpha}_2,$$

$$\bar{T}_2 = \bar{\alpha}_2 + 1 - r\bar{\alpha}_2 = 1 + (1-r)\bar{\alpha}_2,$$

$$\bar{T}_3 = |1 - r\bar{\beta}_3| + |\bar{\beta}_3| = |1 - r\bar{\alpha}_2| + |\bar{\alpha}_2| = 1 + (1-r)\bar{\alpha}_2,$$

$$\bar{T}_4 = r|\bar{\beta}_4| + |1 - \bar{\beta}_4| = r|\bar{\alpha}_1| + |1 - \bar{\alpha}_1| = r\bar{\alpha}_1 + 1 - \bar{\alpha}_1 = r + r(1-r)\bar{\alpha}_2.$$

Таким образом,  $\bar{T}_1 = \bar{T}_4$ ,  $\bar{T}_2 = \bar{T}_3$ ,  $\bar{T}_1 < \bar{T}_2 \Leftrightarrow r + r(1-r)\bar{\alpha}_2 < 1 + (1-r)\bar{\alpha}_2 \Leftrightarrow 0 < 1 - r + (1-r)^2 \cdot \bar{\alpha}_2$  и

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \bar{T}_i = \bar{T}_2 = 1 + (1-r)\bar{\alpha}_2.$$

$$\begin{aligned} \|\bar{\pi} - \pi^{(0)}\| &= \max_{1 \leq i \leq 4} \bar{B}_i = \max_i \sum_{j=1}^4 |(\bar{\alpha}_i - \alpha_i^{(0)})f_j - (\bar{\beta}_i - \beta_i^{(0)})g_j| = \\ &= \max \left\{ \sum_{j=1}^4 |(\bar{\alpha}_1 - 1)f_j|; \sum_{j=1}^4 |\bar{\alpha}_2 f_j|; \sum_{j=1}^4 |\bar{\alpha}_2 g_j|; \sum_{j=1}^4 |(\bar{\alpha}_1 - 1)g_j| \right\} = \\ &= \max\{(1+r)|\bar{\alpha}_1 - 1|; (1+r)|\bar{\alpha}_2|; (1+r)|\bar{\alpha}_2|; (1+r)|\bar{\alpha}_1 - 1|\} = \\ &= (1+r) \max\{|\bar{\alpha}_1 - 1|; |\bar{\alpha}_2|\} = (1+r) \max\{r|\bar{\alpha}_2|; |\bar{\alpha}_2|\} = (1+r)\bar{\alpha}_2. \end{aligned}$$

Найдем для  $k$  оценку сверху. Из неравенства  $\|\pi^{(0)}\| + k \cdot \bar{B}_2 \leq \bar{T}_2 \Leftrightarrow 1 + k \cdot (1+r)\bar{\alpha}_2 \leq 1 + (1-r)\bar{\alpha}_2$  получим, что  $k \leq \frac{1-r}{1+r}$ . Очевидно, что  $k \in (0, 1]$ .

2.  $r > 1$ . По-прежнему

$$\|\bar{\pi}\| = \max_{1 \leq i \leq 4} \bar{T}_i = \max_i \sum_{j=1}^4 |\delta_{ij} - \bar{\alpha}_i f_j - \bar{\beta}_i g_j|. \quad \text{Найдем значения } \bar{T}_i.$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_1 &= |1 - \bar{\alpha}_1| + r|\bar{\alpha}_1| = 1 + (r - 1)\bar{\alpha}_1, \\ \bar{T}_2 &= |\bar{\alpha}_2| + |1 - r\bar{\alpha}_2| = \frac{1}{r}|1 - \bar{\alpha}_1| + |\bar{\alpha}_1| = \frac{1}{r}(1 + (r - 1)\bar{\alpha}_1) = \frac{1}{r} \cdot \bar{T}_1 < \bar{T}_1, \\ \bar{T}_3 &= |1 - r\bar{\beta}_3| + |\bar{\beta}_3| = |1 - r\bar{\alpha}_2| + |\bar{\alpha}_2| = \frac{1}{r} \cdot \bar{T}_1 < \bar{T}_1, \\ \bar{T}_4 &= r|\bar{\beta}_4| + |1 - \bar{\beta}_4| = r|\bar{\alpha}_1| + |1 - \bar{\alpha}_1| = \bar{T}_1.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \bar{T}_i = \bar{T}_1 = 1 + (r - 1)\bar{\alpha}_1.$$

$$\begin{aligned}\|\bar{\pi} - \pi^{(0)}\| &= \max_{1 \leq i \leq 4} \bar{B}_i = \max_i \sum_{j=1}^4 \left| (\bar{\alpha}_i - \alpha_i^{(0)})f_j - (\bar{\beta}_i - \beta_i^{(0)})g_j \right| = \\ &= \max \left\{ \sum_{j=1}^4 |\bar{\alpha}_1 f_j|; \sum_{j=1}^4 \left| \left( \bar{\alpha}_2 - \frac{1}{r} \right) f_j \right|; \sum_{j=1}^4 \left| \left( \bar{\alpha}_2 - \frac{1}{r} \right) g_j \right|; \sum_{j=1}^4 |\bar{\alpha}_1 g_j| \right\} = \\ &= \max \left\{ (1+r)|\bar{\alpha}_1|; (1+r) \left| \bar{\alpha}_2 - \frac{1}{r} \right|; (1+r) \left| \bar{\alpha}_2 - \frac{1}{r} \right|; (1+r)|\bar{\alpha}_1| \right\} = \\ &= (1+r) \max \left\{ |\bar{\alpha}_1|; \left| \bar{\alpha}_2 - \frac{1}{r} \right| \right\} = (1+r) \max \left\{ |\bar{\alpha}_1|; \frac{1}{r}|\bar{\alpha}_1| \right\} = (1+r)\bar{\alpha}_1 = \bar{B}_1.\end{aligned}$$

Найдем для  $k$  оценку сверху. Из неравенства  $\|\pi^{(0)}\| + k \cdot \bar{B}_1 \leq \bar{T}_1 \Leftrightarrow 1 + k \cdot (1+r)\bar{\alpha}_1 \leq 1 + (r-1)\bar{\alpha}_1$  получим, что  $k \leq \frac{r-1}{1+r}$ . Очевидно, что  $k \in (0, 1]$ .

Лемма 2 доказана.

**Теорема.** Оператор проектирования  $\pi_{\alpha, \beta}^{(0)}$  пространства  $l_\infty^4$  на подпространство  $Y_2$ , определяемое функционалами (3), является сильно единственным, и значение константы сильной единственности  $k_0$  равно:

$$k_0 = \frac{1-r}{1+r}, \quad \text{если } 0 < r < 1 \quad \text{и} \quad k_0 = \frac{r-1}{1+r}, \quad \text{если } r > 1.$$

*Доказательство.* Сравним значения  $T_i$ . Воспользуемся равенствами (4).

$$\begin{aligned}T_1 &= 1 - |\alpha_1| + r|\alpha_1| + (1+r)|\beta_1| = r(|\alpha_2| + |1 - r\alpha_2| + (1+r)|\beta_2|), \\ T_2 &= |\alpha_2| + |1 - r\alpha_2| + (1+r)|\beta_2| \Rightarrow T_1 = rT_2, \quad T_3 = (1+r)|\alpha_3| + |1 - r\beta_3| + |\beta_3|, \\ T_4 &= (1+r)|\alpha_4| + r|\beta_4| + |1 - \beta_4| = r((1+r)|\alpha_3| + |1 - r\beta_3| + |\beta_3|) = rT_3.\end{aligned}$$

Если  $0 < r < 1$ , то  $\max_{1 \leq i \leq 4} T_i = \max\{T_2, T_3\}$ , если же  $r > 1$ , то

$$\max_{1 \leq i \leq 4} T_i = \max\{T_1, T_4\}.$$

**1.** Покажем, что  $k_0 = \frac{1-r}{1+r}$ , ( $0 < r < 1$ ) – максимально возможное значение константы сильной единственности. Для этого надо доказать, что неравенство

$$\|\pi^{(0)}\| + k_0 \cdot \max_{1 \leq i \leq 4} B_i \leq \max_{1 \leq i \leq 4} T_i \quad (5)$$

выполняется при любых значениях  $\alpha_i, \beta_i$ .

Сравним значения  $B_i$ . Имеем

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sum_{j=1}^4 \left| (\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}) f_j + (\beta_1 - \beta_1^{(0)}) g_j \right| = \sum_{j=1}^4 |(\alpha_1 - 1)f_j + \beta_1 g_j| = \\
&= (1+r)(|\alpha_1 - 1| + |\beta_1|), \\
B_2 &= \sum_{j=1}^4 \left| (\alpha_2 - \alpha_2^{(0)}) f_j + (\beta_2 - \beta_2^{(0)}) g_j \right| = \sum_{j=1}^4 |\alpha_2 f_j + \beta_2 g_j| = (1+r)(|\alpha_2| + |\beta_2|), \\
B_3 &= \sum_{j=1}^4 \left| (\alpha_3 - \alpha_3^{(0)}) f_j + (\beta_3 - \beta_3^{(0)}) g_j \right| = \sum_{j=1}^4 |\alpha_3 f_j + \beta_3 g_j| = (1+r)(|\alpha_3| + |\beta_3|), \\
B_4 &= \sum_{j=1}^4 \left| (\alpha_4 - \alpha_4^{(0)}) f_j + (\beta_4 - \beta_4^{(0)}) g_j \right| = \sum_{j=1}^4 |\alpha_4 f_j + (\beta_4 - 1)g_j| = \\
&= (1+r)(|\alpha_4| + |\beta_4 - 1|).
\end{aligned}$$

Используя равенства (4), получим  $B_1 = r(1+r)(|\alpha_2| + |\beta_2|) = rB_2$ ,  $B_4 = r(1+r)(|\alpha_3| + |\beta_3|) = rB_3$ . Так как  $0 < r < 1$ , то

$$\max_{1 \leq i \leq 4} B_i = \max\{B_2, B_3\}.$$

Неравенство (5) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
1 + k_0 \cdot \max\{B_2, B_3\} &\leq \max\{T_2, T_3\} \Leftrightarrow 1 + (1-r) \cdot \max\{|\alpha_2| + |\beta_2|; |\alpha_3| + |\beta_3|\} \leq \\
&\leq \max\{|\alpha_2| + |1 - r\alpha_2| + (1+r)|\beta_2|; (1+r)|\alpha_3| + |1 - r\beta_3| + |\beta_3|\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:

а)  $\max_{1 \leq i \leq 4} B_i = B_2$ . Достаточно доказать неравенство

$$1 + (1-r)(|\alpha_2| + |\beta_2|) \leq |\alpha_2| + |1 - r\alpha_2| + (1+r)|\beta_2|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1 + (1-r)|\alpha_2| \leq |\alpha_2| + |1 - r\alpha_2| \quad \text{и} \quad (1-r)|\beta_2| \leq (1+r)|\beta_2|,$$

которые равносильны двум очевидным неравенствам:

$$1 - r|\alpha_2| \leq |1 - r\alpha_2| \quad \text{и} \quad 1 - r \leq 1 + r.$$

б)  $\max_{1 \leq i \leq 4} B_i = B_3$ . Достаточно доказать неравенство

$$1 + (1-r)(|\alpha_3| + |\beta_3|) \leq (1+r)|\alpha_3| + |1 - r\beta_3| + |\beta_3|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1 + (1-r)|\beta_3| \leq |\beta_3| + |1 - r\beta_3| \quad \text{и} \quad (1-r)|\alpha_3| \leq (1+r)|\alpha_3|,$$

которые равносильны двум очевидным неравенствам:

$$1 - r|\beta_3| \leq |1 - r\beta_3| \quad \text{и} \quad 1 - r \leq 1 + r.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

2. Пусть  $r > 1$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\left\| \pi - \pi_{\alpha, \beta}^{(0)} \right\| &= \max_{1 \leq i \leq 4} B_i = \max_i \sum_{j=1}^4 \left| (\alpha_i - \alpha_i^{(0)}) f_j + (\beta_i - \beta_i^{(0)}) g_j \right| = \\
&= \max \left\{ \sum_{j=1}^4 |\alpha_1 f_j + \beta_1 g_j|; \sum_{j=1}^4 \left| \left( \alpha_2 - \frac{1}{r} \right) f_j + \beta_2 g_j \right|; \sum_{j=1}^4 \left| \alpha_3 f_j + \left( \beta_3 - \frac{1}{r} \right) g_j \right|; \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=1}^4 |\alpha_4 f_j + \beta_4 g_j| \right\} = \max \left\{ (1+r)(|\alpha_1| + |\beta_1|); (1+r) \left( \left| \alpha_2 - \frac{1}{r} \right| + |\beta_2| \right); \right. \\
&\quad \left. (1+r) \left( |\alpha_3| + \left| \beta_3 - \frac{1}{r} \right| \right); (1+r)(|\alpha_4| + |\beta_4|) \right\} = (1+r) \cdot \max \left\{ |\alpha_1| + |\beta_1|; \right. \\
&\quad \left. \left| \alpha_2 - \frac{1}{r} \right| + |\beta_2|; \left| \beta_3 - \frac{1}{r} \right|; |\alpha_4| + |\beta_4| \right\} = (1+r) \cdot \max \left\{ |\alpha_1| + |\beta_1|; \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{r}(|\alpha_1| + |\beta_1|); \frac{1}{r}(|\alpha_4| + |\beta_4|); |\alpha_4| + |\beta_4| \right\}.
\end{aligned}$$

Неравенство (5) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
1 + k_0 \cdot \max\{B_1, B_4\} &\leq \max\{T_1, T_4\} \Leftrightarrow 1 + (r-1) \cdot \max\{|\alpha_1| + |\beta_1|; |\alpha_4| + |\beta_4|\} \leq \\
&\leq \max\{|1 - \alpha_1| + r|\alpha_1| + (1+r)|\beta_1|; (1+r)|\alpha_4| + r|\beta_4| + |1 - \beta_4|\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:

а)  $\max_{1 \leq i \leq 4} B_i = B_1$ . Достаточно доказать неравенство

$$1 + (r-1)(|\alpha_1| + |\beta_1|) \leq |1 - \alpha_1| + r|\alpha_1| + (1+r)|\beta_1|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1 + (r-1)|\alpha_1| \leq |1 - \alpha_1| + r|\alpha_1| \quad \text{и} \quad (r-1)|\beta_1| \leq (1+r)|\beta_1|,$$

которые равносильны двум очевидным неравенствам:

$$1 - |\alpha_1| \leq |1 - \alpha_1| \quad \text{и} \quad r - 1 \leq 1 + r.$$

б)  $\max_{1 \leq i \leq 4} B_i = B_4$ . Достаточно доказать неравенство

$$1 + (r-1)(|\alpha_4| + |\beta_4|) \leq (1+r)|\alpha_4| + r|\beta_4| + |1 - \beta_4|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1 + (r-1)|\beta_4| \leq r|\beta_4| + |1 - \beta_4| \quad \text{и} \quad (r-1)|\alpha_4| \leq (1+r)|\alpha_4|,$$

которые равносильны двум очевидным неравенствам:

$$1 - |\beta_4| \leq |1 - \beta_4| \quad \text{и} \quad r - 1 \leq 1 + r.$$

Теорема доказана.

## Литература

- [1] Blatter J., Cheney E. W., Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces // Ann. math. pura et appl., 101 (1974). – P. 215–227.  
[2] Локоть В., Мартынов О. Операторы проектирования в конечномерных пространствах. – Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing. – 245 с.

## ОПЕРАТОРЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПО СИСТЕМЕ УОЛША В ПРОСТРАНСТВЕ $L_1$

Локоть В. В., Мартынов О. М.

Мурманский арктический государственный университет

Мурманск

e-mail: olegmartynov@yandex.ru

**Lokot' V. V., Martynov O. M. Projections by system functions Walsh in space  $L_1$ .** Let  $X_n = \{w_{i-1}\} (i = \overline{1, n})$  – be a subspace formed by Walsh's functions,  $F_n$  –  $n$  partial sum Fourier–Walsh's. The aim of this paper is to prove the following: 1) projection  $F_5 : X_8 \rightarrow X_5$  is not unique minimal; 2) projection  $F_6 : X_8 \rightarrow X_6$  is strongly unique.

Пусть  $X_n = \{w_{i-1}\} (i = \overline{1, n})$  – подпространство, образованное функциями Уолша,  $F_n$  – частные суммы Фурье–Уолша. Цель данной статьи доказать следующее: 1) проекция  $F_5 : X_8 \rightarrow X_5$  не является единственной минимальной; 2) проекция  $F_6 : X_8 \rightarrow X_6$  является сильно единственной.

### 1. Неединственность оператора $F_5 : X_8 \rightarrow X_5$ .

Частные суммы ряда Фурье–Уолша  $F_n$  имеют минимальные нормы среди всех операторов проектирования  $\pi_n : X \rightarrow X_n$ , где  $X$  – пространство  $M$  всех ограниченных на  $[0; 1]$  функций или пространство  $L_1$  всех суммируемых на  $[0; 1]$  функций [2, глава 12, §2].

Уолш [1] показал, что норма оператора  $F_n$  достигается на множестве  $X_{2^s}$  ( $s = 0, 1, \dots; n \leq 2^s$ ). Пусть

$$L_n^{(s)} = \sup_{P \in X_{2^s}, \|P\|=1} \|F_n(P)\|,$$

тогда

$$L_1^{(s)} = L_{2^s}^{(s)} = 1, \quad L_n^{(s-1)} = L_{2n}^{(s)}, \quad L_{2n+1}^{(s+1)} = \frac{1}{2} \left( L_{2n}^{(s+1)} + L_{2n+2}^{(s+1)} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( L_n^{(s)} + L_{n+1}^{(s)} \right) + \frac{1}{2},$$

$$\|F_n\| = L_n^{(s)}.$$

Легко проверить, что  $\|F_5\| = \frac{7}{4}$ ,  $\|F_6\| = \frac{3}{2}$ . Крайними точками единичной сферы пространства  $X_8$  в интегральной метрике являются элементы  $\pm v^{(j)} = \sum_{i=1}^8 a_{ij} w_{i-1}$  ( $j = \overline{1, 8}$ ). Действительно, пусть  $x_m \in \left( \frac{m-1}{8}, \frac{m}{8} \right)$ , ( $m = \overline{1, 8}$ ). Тогда

$$v^{(j)}(x_m) = \sum_{i=1}^8 a_{ij} a_{im} = \begin{cases} 8, & j = m, \\ 0, & j \neq m, \end{cases}$$

$$\|v^{(j)}\|_{L_1} = \int_0^1 |v^{(j)}(x)| dx = \sum_{m=1}^8 2^{-3} |v^{(j)}(x_m)| = 1,$$

поэтому любой полином  $P \in X_8$  с единичной нормой может быть представлен в виде выпуклой линейной комбинации элементов  $\pm v^{(j)}$ . Всего единичная сфера пространства  $X_8$  содержит 16 крайних точек (в метрике  $L_1$ ). Так как

$$\begin{aligned} \|F_6(v^{(j)})\| &= \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^6 a_{ij} w_{i-1} \right| dx = \sum_{m=1}^8 2^{-3} \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} \right| = \\ &= 2^{-3} \left( \sum_{m \neq j} \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} \right| + \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij}^2 \right| \right) = 2^{-3} (6 + 6) = \frac{3}{2} = \|F_6\|, \quad (j = \overline{1, 8}), \end{aligned}$$

то все крайние точки  $\pm v^{(j)}$  являются экстремальными для оператора  $F_6$ . Элементы  $\pm v^{(j)}$  экстремальны и для оператора  $F_5 : X_8 \rightarrow X_5$ , т. е.  $\|F_5(v^{(j)})\| = \frac{7}{4} = \|F_5\|$ , ( $j = \overline{1, 8}$ ).

Оператор  $\bar{\pi}_5$  определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_5(w_{i-1}) &= w_{i-1}, \quad i = \overline{1, 5}, \quad \bar{\pi}_5(w_6) = 0, \\ \bar{\pi}_5(w_7) &= \bar{\pi}_5(w_8) = \varepsilon(w_0 - w_1), \quad 0 < |\varepsilon| < \frac{1}{4}. \\ \bar{\pi}_5(v^{(j)}) &= \sum_{i=1}^5 a_{ij} w_{i-1} + \varepsilon(w_0 - w_1)(a_{7j} + a_{8j}) = \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^5 a_{ij} w_{i-1} + 2\varepsilon(w_0 - w_1)a_{8j}, & j = \overline{1, 4}, \\ \sum_{i=1}^5 a_{ij} w_{i-1}, & j = \overline{5, 8}. \end{cases} \end{aligned}$$

Если  $j = \overline{5, 8}$ , то

$$\|\bar{\pi}_5(v^{(j)})\| = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^5 a_{ij} w_{i-1} \right| dx = \sum_{m=1}^8 2^{-3} \left| \sum_{i=1}^5 a_{ij} a_{im} \right| = \|F_5(v^{(j)})\|.$$

Пусть  $j = 1$ .

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_5(v^{(1)}) &= \sum_{i=1}^5 a_{i1} w_{i-1} + 2\varepsilon(w_0 - w_1), \\ \bar{\pi}_5(v^{(1)}, x_m) &= \sum_{i=1}^5 a_{im} + 2\varepsilon(a_{1m} - a_{2m}) = \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^5 a_{im}, & m = \overline{1, 4}, \\ \sum_{i=1}^5 a_{im} + 4\varepsilon, & m = \overline{5, 8}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{\pi}_5(v^{(1)})\| &= 2^{-3} \sum_{m=1}^8 \|\bar{\pi}_5(v^{(1)}; x_m)\| = 2^{-3} \left( \sum_{m=1}^4 \left| \sum_{i=1}^5 a_{im} \right| + \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{i=1}^5 a_{im} + 4\varepsilon \right| \right) = \\ &= 2^{-3} (5 + 3 + 1 + 1 + |1 + 4\varepsilon| + |-1 + 4\varepsilon| + |1 + 4\varepsilon| + |-1 + 4\varepsilon|) = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что  $\|\bar{\pi}_5(v^{(j)})\| = \frac{7}{4}$ ,  $j = 2, 3, 4$ . Таким образом,  $\|\bar{\pi}_5\| = \|F_5\|$  и неединственность минимальной проекции  $\pi_5 : X_8 \rightarrow X_5$  доказана.

## 2. Сильная единственность оператора $F_6 : X_8 \rightarrow X_6$ .

В пространстве  $L_1$  свойством единственности оператор  $F_n$  обладает только при  $n = 2^s$ , ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ) [2, глава 13, §2]. Если рассматривать операторы  $\pi_n$  не на всём пространстве  $X$ , а на подпространстве  $X_{2^s}$  ( $\pi_n : X_{2^s} \rightarrow X_n$ ,  $n \leq 2^s$ ), то для некоторых  $n$  оператор  $F_n$  обладает не только свойством единственности, но и свойством сильной единственности.

**Определение.** Оператор проектирования  $\pi_n^{(0)} : Y \rightarrow X$  называется сильно единственным, если существует действительное число  $r$  ( $0 < r \leq 1$ ) такое, что для любого оператора  $\pi_n : Y \rightarrow X$  выполняется неравенство

$$\|\pi_n^{(0)}\| + r\|\pi_n - \pi_n^{(0)}\| \leq \|\pi_n\|. \quad (1)$$

Очевидно, что сильно единственный оператор обладает свойством минимальности и единственности. В случае проектирования на гиперплоскость  $F_{2^s-1} : X_{2^s} \rightarrow X_{2^s-1}$  справедливо следующее утверждение [2, глава 13, §3].

**Утверждение.** Оператор  $F_{2^s-1} : X_{2^s} \rightarrow X_{2^s-1}$  является сильно единственным. Максимальное значение констант сильной единственности  $r_0$  в пространствах  $L_1$  и  $M$  равны соответственно

$$\frac{1}{2^s - 1} \quad \text{и} \quad \frac{2^{s-1} - 1}{2^{s-1}(2^s - 1)} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

**Теорема.** Оператор  $F_6 : X_8 \rightarrow X_6$  является сильно единственным, и максимальное значение константы  $r = r_0$  в неравенстве

$$\|F_6\| + r_0\|\pi_6 - F_6\| \leq \|\pi_6\| \quad (2)$$

равно  $\frac{1}{3}$ .

Докажем несколько лемм.

### Лемма 1.

$$\|\pi_6\| = 2^{-3} \max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} + c_{jm} \right|, \quad (3)$$

где  $c_{jm} = \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 \gamma_{li} a_{lm}$ ,  $\gamma_{li} \in R$ .

*Доказательство.* Оператор  $\pi_6 : X_8 \rightarrow X_6$  имеет следующий вид:

$$\pi_6(w_{i-1}) = \begin{cases} w_{i-1}, & (i = \overline{1, 6}), \\ \sum_{l=1}^6 \gamma_{li} w_{l-1}, & (i = 7, 8), \end{cases} \quad \pi_6(v^{(j)}) = \sum_{i=1}^6 a_{ij} w_{i-1} + \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 \gamma_{li} w_{l-1}.$$

Тогда

$$\|\pi_6\| = \max_{1 \leq j \leq 8} \|\pi_6(v^{(j)})\| = 2^{-3} \max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} + c_{jm} \right|.$$



**Лемма 2.**

$$\|\pi_6 - F_6\| = 2^{-3} \max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 \|c_{jm}\|. \quad (4)$$

*Доказательство.* Оператор  $F_6 : X_8 \rightarrow X_6$  имеет следующий вид:

$$F_6(w_{i-1}) = \begin{cases} w_{i-1}, & i = \overline{1, 6}, \\ 0, & i = 7, 8, \end{cases} \quad F_6(v^{(j)}) = \sum_{i=1}^6 a_{ij} w_{i-1}.$$

Тогда

$$\|\pi_6 - F_6\| = \max_{1 \leq j \leq 8} \|(\pi_6 - F_6)(v^{(j)})\| = 2^{-3} \max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 |c_{jm}|.$$

**Лемма 3.**  $r_0 \leq \frac{1}{3}$ .

*Доказательство.* Оператор  $\tilde{\pi}_6$  определим следующим образом. Положим  $\gamma_{li} = -0,5ha_{l4}$ ,  $0 < h < 1$ ,  $l = \overline{1, 6}$ ,  $i = 7, 8$ . Вычислим нормы операторов  $\|\tilde{\pi}_6\|$  и  $\|\tilde{\pi}_6 - F_6\|$ .

$$\|\tilde{\pi}_6\| = \max_{1 \leq j \leq 8} \|\tilde{\pi}_6(v^{(j)})\| = 2^{-3} \max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} - 0,5h \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 a_{l4} a_{lm} \right|.$$

В зависимости от  $m$  сумма  $\sum_{l=1}^6 a_{l4} a_{lm}$  принимает следующие значения: 1)

$$1) \ 1 \leq m \leq 3, \quad \sum_{l=1}^6 a_{l4} a_{lm} = -2a_{8m}, \quad 2) \ m = 4, \quad \sum_{l=1}^6 a_{l4}^2 = 6,$$

$$3) \ 5 \leq m \leq 8, \quad \sum_{l=1}^6 a_{l4} a_{lm} = 0.$$

Имеем

$$\|\tilde{\pi}_6\| = 2^{-3} \max_{1 \leq j \leq 8} \left( \sum_{m=1}^3 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} + ha_{8m} \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| + \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{i4} - 3h \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| + \right. \\ \left. + \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} \right| \right) = 2^{-3} \max_{1 \leq j \leq 8} D_j = 2^{-3} \max \left\{ \max_{1 \leq j \leq 3} D_j; D_4; \max_{5 \leq l \leq 8} D_j \right\},$$

где

$$D_j = \sum_{m=1}^3 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} + ha_{8m} \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| + \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{i4} - 3h \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| + \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} \right|.$$

Каждый случай рассмотрим отдельно. Заметим, что

$$\sum_{m=5}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} \right| = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq 4.$$

1)  $1 \leq j \leq 3$ .

$$\begin{aligned}
D_j &= \sum_{m=1}^3 \left| \sum_{i=1}^8 a_{ij} a_{im} - \sum_{i=7}^8 a_{ij} a_{im} + h a_{8m} \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| + \left| \sum_{i=1}^8 a_{ij} a_{i4} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=7}^8 a_{ij} a_{i4} - 3h \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| = \sum_{m=1, m \neq j}^3 \left| \sum_{i=1}^8 a_{ij} a_{im} - \sum_{i=7}^8 a_{ij} a_{im} + h a_{8m} \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| + \\
&\quad + \left| \sum_{i=1}^8 a_{ij}^2 - \sum_{i=7}^8 a_{ij}^2 + h a_{8j} \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| + \left| \sum_{i=7}^8 a_{ij} a_{i4} + 3h \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| = \\
&= \sum_{m=1, m \neq j}^3 \left| - \sum_{i=7}^8 a_{ij} a_{im} + 2h a_{8m} a_{8j} \right| + |6 + 2h a_{8j}^2| + |2a_{8j} + 6h a_{8j}| = \\
&= \sum_{m=1, m \neq j}^3 | -2a_{8m} a_{8j} + 2h a_{8m} a_{8j} | + |6 + 2h| = 4(1 - h) + 8 + 8h = 12 + 4h.
\end{aligned}$$

2)  $j = 4$ .

$$\begin{aligned}
D_4 &= \sum_{m=1}^3 \left| \sum_{i=1}^6 a_{i4} a_{im} + h a_{8m} \sum_{i=7}^8 a_{i4} \right| + \left| \sum_{i=1}^6 a_{i4}^2 - 3h \sum_{i=7}^8 a_{i4} \right| = \\
&= \sum_{m=1}^3 \left| - \sum_{i=7}^8 a_{i4} a_{im} + 2h a_{8m} \right| + |6 - 6h| = \sum_{m=1}^3 | -2a_{8m} + 2h a_{8m} | + |6 - 6h| = 12 - 12h.
\end{aligned}$$

3)  $5 \leq j \leq 8$ . Так как в этом случае  $\sum_{i=7}^8 a_{ij} = 0$ , то

$$\begin{aligned}
D_j &= \sum_{m=1}^4 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} \right| + \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} \right| = \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} \right| = \\
&= \sum_{m=5, m \neq j}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} \right| + \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij}^2 \right| = 3 \cdot 2 + 6 = 12.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\tilde{\pi}_6\| = 2^{-3} \max\{12 + 4h, 12 - 12h, 12\} = 2^{-3}(12 + 4h).$$

Найдём теперь норму оператора  $\|\tilde{\pi}_6 - F_6\|$ .

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\pi}_6 - F_6\| &= \max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 \left| \frac{h}{2} \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 a_{l4} a_{lm} \right| = \\
&= 2^{-4} h \max_{1 \leq j \leq 8} \left( \sum_{m=1}^3 \left| \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 a_{l4} a_{lm} \right| + \left| \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 a_{l4}^2 \right| + \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 a_{l4} a_{lm} \right| \right) = \\
&= 2^{-4} h \max_{1 \leq j \leq 8} \left( 2 \sum_{m=1}^3 \left| \sum_{i=7}^8 a_{ij} a_{8m} \right| + 6 \left| \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| \right) = 2^{-3} h \max_{1 \leq j \leq 8} \left| 6 \sum_{i=7}^8 a_{ij} \right| = \frac{3h}{2}.
\end{aligned}$$

Подставим найденные значения  $\|\tilde{\pi}_6\|$  и  $\|\tilde{\pi}_6 - F_6\|$  в неравенство (2). Имейм

$$\frac{3}{2} + r \cdot \frac{3h}{2} \leq \frac{3}{2} + \frac{h}{2} \Leftrightarrow 3r \leq 1, \quad \text{откуда} \quad r \leq \frac{1}{3}.$$

Лемма 3 доказана.

Докажем теперь, что для произвольного оператора проектирования  $\pi_6 : X_8 \rightarrow X_6$  справедливо неравенство

$$\|F_6\| + \frac{1}{3}\|\pi_6 - F_6\| \leq \|\pi_6\| \quad (5)$$

или, используя (3) и (4),

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 |c_{jm}| \leq \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} + c_{jm} \right|. \quad (6)$$

Если  $c_{jm} = 0$  для любых  $j, m = \overline{1, 8}$ , то (6) выполнено. Пусть теперь не все  $c_{jm}$  равны нулю. Так как

$$\max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 |c_{jm}| = \max \left\{ \max_{1 \leq j \leq 4} \sum_{m=1}^8 |c_{jm}|; \max_{5 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 |c_{jm}| \right\},$$

$$\text{а} \quad \sum_{m=1}^8 |c_{jm}| = \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 \gamma_{li} a_{lm} \right| = \sum_{m=1}^8 \left| a_{7j} \sum_{l=1}^6 \gamma_{l7} a_{lm} + a_{8j} \sum_{l=1}^6 \gamma_{l8} a_{lm} \right|,$$

то при  $1 \leq j \leq 4$  имеем  $a_{7j} = a_{8j}$  и

$$\sum_{m=1}^8 |c_{jm}| = \sum_{m=1}^8 \left| a_{8j} \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| = \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right|.$$

Если же  $5 \leq j \leq 8$ , то  $a_{7j} = -a_{8j}$  и

$$\sum_{m=1}^8 |c_{jm}| = \sum_{m=1}^8 \left| a_{8j} \sum_{l=1}^6 (-\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| = \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (-\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right|.$$

Таким образом,

$$\max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 |c_{jm}| = \max \left\{ \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right|; \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (-\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| \right\}.$$

Пусть для определённости

$$\max_{1 \leq j \leq 8} \sum_{m=1}^8 |c_{jm}| = \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right|.$$

Для доказательства неравенства (6) достаточно доказать, что

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| \leq \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij} a_{im} + c_{jm} \right|. \quad (7)$$

Правую часть неравенства (7) оценим снизу. Воспользуемся очевидными соотношениями:

$$1) \quad 1 \leq m \leq 4, \quad m \neq j, \quad \sum_{i=1}^6 a_{ij}a_{im} = \sum_{i=1}^8 a_{ij}a_{im} - \sum_{i=7}^8 a_{ij}a_{im} = -2a_{8j}a_{8m}.$$

$$2) \quad m = j, \quad \sum_{i=1}^6 a_{jj}^2 = 6.$$

$$3) \quad 5 \leq m \leq 8, \quad \sum_{i=1}^6 a_{ij}a_{im} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij}a_{im} + c_{jm} \right| &= \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \left( \sum_{m=1, m \neq j}^4 \left| -2a_{8j}a_{8m} + c_{jm} \right| + |6 + c_{jj}| + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=5}^8 |c_{jm}| \right) = \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \left( \sum_{m=1, m \neq j}^4 \left| 2 - a_{8j}a_{8m}c_{jm} \right| + |6 + c_{jj}| + \sum_{m=5}^8 |c_{jm}| \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \left( 6 - \sum_{m=1, m \neq j}^4 a_{8j}a_{8m}c_{jm} + 6 + c_{jj} + \sum_{m=5}^8 |c_{jm}| \right) = \\ &= \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \left( 12 - \sum_{m=1}^4 a_{8j}a_{8m}c_{jm} + 2c_{jj} + \sum_{m=5}^8 |c_{jm}| \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{m=1}^4 a_{8j}a_{8m}c_{jm} = a_{8j} \sum_{m=1}^4 a_{8m} \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 \gamma_{li}a_{lm} = a_{8j} \sum_{i=7}^8 a_{ij} \sum_{l=1}^6 \gamma_{li} \sum_{m=1}^4 a_{8m}a_{lm} = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{i=1}^6 a_{ij}a_{im} + c_{jm} \right| &\geq \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \left( 12 + 2c_{jj} + \sum_{m=5}^8 |c_{jm}| \right) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \left( 2c_{jj} + \sum_{m=5}^8 |c_{jm}| \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \max_{1 \leq j \leq 4} \left( 2c_{jj} + \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8})a_{lm} \right| \right) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \max_{1 \leq j \leq 4} c_{jj} + \frac{1}{8} \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8})a_{lm} \right|. \end{aligned}$$

После упрощения неравенство (7) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \sum_{m=1}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) \right| &\leq \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \max_{1 \leq j \leq 4} c_{jj} + \frac{1}{8} \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8})a_{lm} \right| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=1}^4 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) \right| \leq 6 \max_{1 \leq j \leq 4} c_{jj} + 2 \sum_{m=5}^8 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8})a_{lm} \right|. \quad (8) \end{aligned}$$

Уменьшим правую часть неравенства (8). Докажем неравенство

$$\sum_{m=1}^4 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) \right| \leq 6 \max_{1 \leq j \leq 4} c_{jj}. \quad (9)$$

Преобразуем обе части неравенства (9).

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^4 \left| \sum_{l=1}^6 (\gamma_{l7} + \gamma_{l8}) a_{lm} \right| &= \sum_{m=1}^4 \left| \sum_{l=1}^6 t_l a_{lm} \right| = |t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6| + \\ &+ |t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - t_5 - t_6| + |t_1 + t_2 - t_3 - t_4 + t_5 + t_6| + \\ &+ |t_1 + t_2 - t_3 - t_4 - t_5 - t_6| = |d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3|, \end{aligned}$$

где  $t_l = \gamma_{l7} + \gamma_{l8}$  ( $l = \overline{1, 6}$ ),  $d_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - t_5 - t_6$ ,  $d_2 = t_1 + t_2 - t_3 - t_4 + t_5 + t_6$ ,  $d_3 = -t_1 - t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$ .

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{i=7}^8 a_{i1} \sum_{l=1}^6 \gamma_{li} a_{l1} = \sum_{l=1}^6 t_l a_{l1} = d_1 + d_2 + d_3, \\ c_{22} &= \sum_{i=7}^8 a_{i2} \sum_{l=1}^6 \gamma_{li} a_{l2} = - \sum_{l=1}^6 t_l a_{l2} = -(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - t_5 - t_6) = -d_1, \\ c_{33} &= \sum_{i=7}^8 a_{i3} \sum_{l=1}^6 \gamma_{li} a_{l3} = - \sum_{l=1}^6 t_l a_{l3} = -(t_1 + t_2 - t_3 - t_4 + t_5 + t_6) = -d_2, \\ c_{44} &= \sum_{i=7}^8 a_{i4} \sum_{l=1}^6 \gamma_{li} a_{l4} = \sum_{l=1}^6 t_l a_{l4} = (t_1 + t_2 - t_3 - t_4 - t_5 - t_6) = -d_3. \end{aligned}$$

После преобразований неравенство (9) примет вид

$$|d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3| \leq 6 \cdot \max \{d_1 + d_2 + d_3, -d_1, -d_2, -d_3\} = K. \quad (10)$$

Докажем его. В силу симметрии без уменьшения общности будем считать, что  $|d_1| \geq |d_2| \geq |d_3|$ . Рассмотрим несколько случаев.

**1.**  $d_1 \leq 0$ .  $|d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3| \leq 6|d_1| \leq K$ .

**2.**  $d_1 > 0$ ,  $d_2 \geq 0$ . Очевидно, что  $d_2 + d_3 \geq 0$ , поэтому  $d_1 + d_2 + d_3 \geq d_1$  и  $K \geq 6(d_1 + d_2 + d_3) \geq 6d_1 \geq |d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3|$ .

**3.**  $d_1 > 0$ ,  $d_2 < 0$ ,  $d_3 \geq 0$ ,  $\max \{d_1 + d_2 + d_3, -d_2\} = d_1 + d_2 + d_3$ . Докажем, что  $6(d_1 + d_2 + d_3) \geq |d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3| \Leftrightarrow 5(d_1 + d_2 + d_3) \geq d_1 - d_2 + d_3 \Leftrightarrow 2d_1 + 3d_2 + 2d_3 \geq 0$ . По условию  $d_1 + d_2 + d_3 \geq -d_2 \Leftrightarrow d_1 + 2d_2 + d_3 \geq 0$  и  $d_1 + d_2 + d_3 \geq 0$ . Сложив эти два неравенства, получим требуемое неравенство  $2d_1 + 3d_2 + 2d_3 \geq 0$ .

**4.**  $d_1 > 0$ ,  $d_2 < 0$ ,  $d_3 \geq 0$ ,  $\max \{d_1 + d_2 + d_3, -d_2\} = -d_2$ . Требуется доказать, что  $-6d_2 \geq |d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3| \Leftrightarrow d_1 + 3d_2 + d_3 \leq 0$ . По условию  $d_1 + d_2 + d_3 < -d_2 \Leftrightarrow d_1 + 2d_2 + d_3 < 0$ . Тогда и подавно  $d_1 + 3d_2 + d_3 \leq 0$ .

**5.**  $d_1 > 0$ ,  $d_2 < 0$ ,  $d_3 < 0$ ,  $\max \{d_1 + d_2 + d_3, -d_2\} = d_1 + d_2 + d_3$ . Требуется доказать, что  $6(d_1 + d_2 + d_3) \geq |d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3| \Leftrightarrow 2d_1 + 3d_2 + 3d_3 \geq 0$ . По условию  $d_1 + 2d_2 + d_3 \geq 0$  и  $-d_2 + d_3 \geq 0$ . Тогда  $2d_1 + 3d_2 + 3d_3 = (2d_1 + 4d_2 + 2d_3) + (-d_2 + d_3) \geq 0$ .

**6.**  $d_1 > 0$ ,  $d_2 < 0$ ,  $d_3 < 0$ ,  $\max \{d_1 + d_2 + d_3, -d_2\} = -d_2$ ,  $d_1 + d_2 + d_3 \geq 0$ . Требуется доказать, что  $-6d_2 \geq |d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3| \Leftrightarrow d_1 + 3d_2 \leq 0$ . По условию  $d_1 + 2d_2 + d_3 \geq 0$  и  $d_2 - d_3 \leq 0$ . Тогда  $d_1 + 3d_2 = (d_1 + 2d_2 + d_3) + (d_2 - d_3) \leq 0$ .

**7.**  $d_1 > 0$ ,  $d_2 < 0$ ,  $d_3 < 0$ ,  $\max \{d_1 + d_2 + d_3, -d_2\} = -d_2$ ,  $d_1 + d_2 + d_3 \leq 0$ . Требуется доказать, что  $-6d_2 \geq |d_1 + d_2 + d_3| + |d_1| + |d_2| + |d_3| \Leftrightarrow 2d_2 - d_3 \leq 0$ . Последнее неравенство очевидно.

Неравенство (10), а вместе с ним и теорема, доказаны.

## Литература

- [1] Walsh J. L. A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math., 45, 1923, P. 5–24.
- [2] Локоть В., Мартынов О. Операторы проектирования в конечномерных пространствах. – Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing. – 245 с.

УДК 517.518.82

### О НЕКОТОРЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ, НУЖНЫХ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА АНАЛОГОВ ТЕОРЕМЫ ВОРОНОВСКОЙ

Петросова М. А.

Московский педагогический государственный университет  
Москва

e-mail: petrosova05@mail.ru

**Petrosova M. A. Some of the expressions for the central moments needed for the proof of Voronovskaya theorem analogues.** We point out the special combinatorial relations useful in case of convergence estimates for Bernstein polynomials on an arbitrary interval. Analogues of Voronovskaya theorem for the symmetric interval  $[-1, 1]$  are reduced.

Указаны специальные комбинаторные соотношения, полезные при оценке сходимости полиномов Бернштейна на произвольном отрезке. Приведены аналоги теоремы Вороновской на симметричном отрезке  $[-1, 1]$ .

При исследовании различных вопросов, связанных с полиномами Бернштейна, часто используют некоторые специальные выражения, называемые **центральными моментами** (см. [1], [2]). При переносе конструкции со стандартного отрезка  $[0, 1]$  на другой отрезок вещественной оси многие формулы, связанные с центральными моментами, видоизменяются, и вычисления сильно усложняются. В связи с этим может быть полезен следующий общий подход, намеченный в данном сообщении.

Обобщённым центральным моментом  $S_n^{(p)} = S_n^{(p)}(s, t, \alpha, \beta)$  с параметрами

$$n \in \mathbb{N}, \quad p \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

называется выражение

$$S_n^{(p)} = \frac{1}{\alpha^n} \sum_{k=0}^n \left( \alpha \frac{k}{n} - \beta \right)^p C_n^k s^k t^{n-k}. \quad (1)$$

Для различных вычислений, связанных с обобщёнными моментами (1), полезно следующее рекуррентное соотношение

$$S_n^{(p+1)} = (\alpha - \beta) S_n^{(p)} + \frac{(-1)^{p+1} t}{n^p} \sum_{m=0}^p (-1)^m C_p^m (n-1)^m \beta^{p-m} S_{n-1}^{(m)}. \quad (2)$$

При  $n = 1$  формула (2) понимается как

$$S_1^{(p+1)} = (\alpha - \beta) S_1^{(p)} + (-1)^{p+1} \beta^p t.$$

Найденное рекуррентное соотношение (2) можно использовать для произвольного отрезка, выбирая значения параметров подходящим образом.

Случаю полиномов Бернштейна на симметричном отрезке  $[-1, 1]$  соответствует набор параметров

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1 + x, \quad s = 1 + x, \quad t = 1 - x. \quad (3)$$

Формула центральных моментов (1) с параметрами (3) принимает вид

$$S_n^{(p)} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left( \frac{2k}{n} - 1 - x \right)^p C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}. \quad (4)$$

Рекуррентное соотношение (2) будет выглядеть так

$$S_n^{(p+1)} = (1-x) \left( S_n^{(p)} + \frac{(-1)^{p+1}}{n^p} \sum_{m=0}^p (-1)^m C_p^m (n-1)^m (1+x)^{p-m} S_{n-1}^{(m)} \right). \quad (5)$$

Пользуясь соотношением (5), можно последовательно вычислять моменты (4), начиная с очевидного значения  $S_n^{(0)} \equiv 1$ . В результате получаем таблицу соотношений:

$$\begin{aligned} S_n^{(0)} &\equiv 1, & S_n^{(1)} &= 0, & S_n^{(2)} &= \frac{1-x^2}{n}, \\ S_n^{(3)} &= -\frac{2x(1-x^2)}{n^2}, & S_n^{(4)} &= \frac{3(1-x^2)^2}{n^2} + \frac{2(3x^2-1)(1-x^2)}{n^3}, \\ S_n^{(5)} &= -\frac{20x(1-x^2)^2}{n^3} - \frac{8x(3x^2-2)(1-x^2)}{n^4}. \end{aligned}$$

Найденные формулы могут применяться при оценке скорости сходимости полиномов Бернштейна

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f \left( \frac{2k}{n} - 1 \right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

на симметричном отрезке  $[-1, 1]$  к своей порождающей функции  $f(x)$ .

Дадим точные формулировки двух основных результатов, восходящих к известной работе Е. В. Вороновской [3] (см. также [4, с. 307–308]).

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C^2[-1, 1]$ . Тогда

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{1-x^2}{2n} \|f''\|, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $\|f''\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f''(x)|$ . В частности,

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} \|f''\|, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

При доказательстве теоремы 1 используются выражения для первых трех моментов  $S_n^{(0)}$ ,  $S_n^{(1)}$ ,  $S_n^{(2)}$ . Более тонкий результат, воспроизводящий основную классическую теорему Вороновской применительно к  $[-1, 1]$ , выглядит так.

**Теорема 2.** Пусть  $f \in C[-1, 1]$ , и пусть в точке  $x_0 \in (-1, 1)$  существует вторая производная  $f''(x_0)$ . Тогда

$$B_n(f, x_0) - f(x_0) = \frac{(1 - x_0^2)}{2n} f''(x_0) + \frac{\alpha_n(x_0)}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $\alpha_n(x_0) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

При доказательстве теоремы 2 используются выражения для центральных моментов  $S_n^{(0)}$ ,  $S_n^{(1)}$ ,  $S_n^{(2)}$ ,  $S_n^{(4)}$ .

Выражаю признательность И. В. Тихонову и В. Б. Шерстюкову за постановку задачи и обсуждение результатов.

## Литература

- [1] Бернштейн С. Н. Добавление к статье Е. В. Вороновской “Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна” // С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений. Т. 2. – Изд-во АН СССР, 1954. – С. 155–158.
- [2] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ, 1990. – 64 с.
- [3] Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. А. 1932. № 4. – С. 79–85.
- [4] DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – x+450 p.

УДК 517.9

## ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ НА ПОЛУОСИ И ИХ СВОЙСТВА

Ситник С. М.<sup>1</sup>, Шишкина Э. Л.<sup>2</sup>

Воронежский институт МВД России<sup>1</sup>,

Воронежский государственный университет<sup>2</sup>

Воронеж

e-mail: mathsms@yandex.ru

**Sitnik S. M., Shishkina E. L. Fractional powers of the Bessel differential operator on a semiaxis.** In this paper we study fractional powers of the Bessel differential operator defined on a semiaxis. Some general properties of such fractional powers of the Bessel differential operator are proved.

В работе рассматриваются дробные степени дифференциального оператора Бесселя, определенные на полуоси. Доказаны некоторые общие свойства таких дробных степеней оператора Бесселя.



Следуя работе [1] (см. также [2]-[4]) мы рассмотрим вещественные степени сингулярного дифференциального оператора Бесселя

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x}D, \quad \nu \geq 0 \quad (1)$$

на вещественной полуоси  $[0, \infty)$ .

Пусть  $\alpha > 0$ ,  $f(x) \in C^{[2\alpha]+1}(0, +\infty)$ . **Дробный интеграл Бесселя на полуоси**  $[0, \infty)$  определим формулой

$$(B_{\nu,-}^{-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_x^{+\infty} \left( \frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left( \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) f(y) dy. \quad (2)$$

В этой работе мы получим для оператора (2) формулу, выражающую его через функции Лежандра; сведём дробный интеграл Бесселя на полуоси к дробному интегралу Лиувилля при  $\nu = 0$ , а также установим связь оператора (2) с дробным интегралом Сайго; установим условия, при которых оператор (2) есть левый обратный к (1); найдём преобразование Меллина оператора (2) и установим полугрупповое свойство для дробного интеграла Бесселя на полуоси.

Используя формулу, связывающую гипергеометрическую функцию Гаусса и функцию Лежандра вида

$${}_2F_1(a, b; 2b; z) = 2^{2b-1} \Gamma \left( b + \frac{1}{2} \right) z^{\frac{1}{2}-b} (1-z)^{\frac{1}{2}(b-a-\frac{1}{2})} P_{a-b-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-b} \left[ \left( 1 - \frac{z}{2} \right) \sqrt{1-z} \right]$$

(см. формулу 15.4.8 на стр. 561 из [5]) мы получим

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left( \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) &= \\ &= 2^{2\alpha-1} \Gamma \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{y^2 - x^2}{y^2} \right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left( \frac{y}{x} \right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-\alpha} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right] \end{aligned}$$

и сможем записать (2) в виде

$$(B_{\nu,-}^{-\alpha} f)(x) = \frac{\Gamma \left( \alpha + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma(2\alpha)} \int_x^b (y^2 - x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left( \frac{y}{x} \right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-\alpha} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right] f(y) dy.$$

Из выражения (1) легко видеть, что при  $\nu = 0$  оператор Бесселя равносильен второй производной. Дробный интеграл Бесселя  $B_{0,-}^{-\alpha}$  будет эквивалентен дробному интегралу Лиувилля, определённом формулой (5.3) стр. 85 из [6]):

$$(B_{0,-}^{-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_x^{\infty} (y-x)^{2\alpha-1} f(y) dy = (I_-^{2\alpha} f)(x).$$

Действительно, имеем

$$(B_{0,-}^{-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_x^{\infty} \left( \frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left( \alpha - \frac{1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) f(y) dy.$$

Используя формулу, которая легко получается из интегрального представления гипергеометрической функции Гаусса

$${}_2F_1\left(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \left[\frac{2y}{x+y}\right]^{2\alpha-1},$$

мы получим

$$(B_{0,-}^{-\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_x^\infty (y-x)^{2\alpha-1} f(y) dy = (I_-^{2\alpha}f)(x).$$

Рассмотрим теперь связь дробного интеграла Бесселя  $B_{\nu,-}^{-\alpha}$  с соответствующим дробным интегралом Сайго. В статье [7] приведен дробный интеграл вида

$$J_x^{\gamma,\beta,\eta}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_x^\infty (t-x)^{\gamma-1} t^{-\gamma-\beta} {}_2F_1\left(\gamma+\beta, -\eta; \gamma; 1 - \frac{x}{t}\right) f(t) dt, \quad (3)$$

где  $\gamma > 0$ ,  $\beta, \theta$  — вещественные числа. Произведем замену переменной  $y^2 = t$  в дробном интеграле Бесселя на полуоси, получим:

$$(B_{\nu,-}^{-\alpha}f)(x) = \frac{1}{2^{2\alpha}\Gamma(2\alpha)} \int_{x^2}^\infty (t-x^2)^{2\alpha-1} t^{-\alpha} {}_2F_1\left(\alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{t}\right) f(\sqrt{t}) dt.$$

Сравнивая полученное выражение с (3), будем иметь

$$\gamma = 2\alpha, \quad \beta = \frac{\nu-1}{2} - \alpha, \quad -\gamma - \beta = -\alpha - \frac{\nu-1}{2}, \quad \eta = -\alpha$$

и

$$(B_{\nu,-}^{-\alpha}f)(x) = \frac{1}{2^{2\alpha}} J_{x^2}^{2\alpha, \frac{\nu-1}{2} - \alpha, -\alpha} \left(x^{\frac{\nu-1}{2}} f(\sqrt{x})\right).$$

Найдем теперь условия при которых оператор  $B_{\nu,-}^{-1}$ , применённый слева, обращает оператор Бесселя  $B_\nu$ . Рассмотрим  $B_{\nu,b-}^{-\alpha}$  при  $\alpha = 1$ :

$$(B_{\nu,-}^{-1}f)(x) = \int_x^\infty \left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right) {}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}, 1; 2; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) f(y) dy.$$

Поскольку для гипергеометрической функции Гаусса справедливо

$${}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}, 1; 2; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{2}{1-\nu} \frac{y^2}{x^2-y^2} \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1\right],$$

то  $B_{\nu,-}^{-1}$  можно записать в виде

$$(B_{\nu,-}^{-1}f)(x) = \frac{1}{\nu-1} \int_x^\infty y \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1\right] f(y) dy.$$

Выясним, при каких условиях оператор  $B_{\nu,-}^{-1}$  будет являться левым обратным к дифференциальному оператору Бесселя. Пусть  $f(x) = B_{\nu}g(x) = g''(x) + \frac{\nu}{x}g'(x)$ , тогда

$$\begin{aligned} (B_{\nu,-}^{-1}f)(x) &= (B_{\nu,-}^{-1}B_{\nu}g)(x) = \frac{1}{\nu-1} \int_x^{\infty} y \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1 \right] \left( g''(y) + \frac{\nu}{y}g'(y) \right) dy = \\ &= \frac{1}{\nu-1} \left[ \int_x^{\infty} y \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1 \right] g''(y) dy + \nu \int_x^{\infty} \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1 \right] g'(y) dy \right]. \end{aligned}$$

Дважды интегрируя по частям первое слагаемое, получим

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} y \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1 \right] g''(y) dy &= y \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1 \right] g'(y) \Big|_{y=x}^{y=\infty} - \int_x^{\infty} (\nu x^{1-\nu} y^{\nu-1} - 1) g'(y) dy = \\ &= y \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1 \right] g'(y) \Big|_{y=x}^{y=\infty} - (\nu x^{1-\nu} y^{\nu-1} - 1) g(y) \Big|_{y=x}^{y=\infty} + \nu(\nu-1)x^{1-\nu} \int_x^{\infty} y^{\nu-2} g(y) dy. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям второе слагаемое, будем иметь

$$\int_x^{\infty} \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1 \right] g'(y) dy = \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^{1-\nu} - 1 \right] g(y) \Big|_{y=x}^{y=\infty} - \frac{\nu-1}{x^{\nu-1}} \int_x^{\infty} y^{\nu-2} g(y) dy.$$

Тогда, очевидно, что при  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$  получим, что

$$(B_{\nu,-}^{-1}B_{\nu}g)(x) = g(x).$$

Найдём теперь дробный интеграл Бесселя на полуоси от степенной функции  $f(x) = x^m$  при  $x > 0$  и  $m + 2\alpha + \nu < 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} B_{\nu,-}^{-\alpha} x^m &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_x^{\infty} \left( \frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left( \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) y^m dy = \\ &= \left\{ \frac{x^2}{y^2} = t, y = xt^{-\frac{1}{2}}, dy = -\frac{1}{2}xt^{-\frac{3}{2}} dt, y = x, t = 1, y = \infty, t = 0 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^1 \left( \frac{x^2t^{-1} - x^2}{2xt^{-\frac{1}{2}}} \right)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left( \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - t \right) (xt^{-\frac{1}{2}})^m xt^{-\frac{3}{2}} dt = \\ &= \frac{x^{2\alpha+m}}{2^{2\alpha}\Gamma(2\alpha)} \int_0^1 t^{-\alpha-\frac{m}{2}-1} (1-t)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left( \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - t \right) dt. \end{aligned}$$

Используя формулу 2.21.1.11 из [8], стр. 265 вида

$$\int_0^z x^{\mu-1} (z-x)^{c-1} {}_2F_1 \left( a, b; c; 1 - \frac{x}{z} \right) dx = z^{c+\mu-1} \Gamma \left[ \begin{matrix} c, & \mu, & c-a-b+\mu \\ c-a+\mu, & c-b+\mu \end{matrix} \right], \quad (4)$$

$$z > 0, \quad \operatorname{Re} c > 0, \quad \operatorname{Re}(c - a - b + \mu) > 0$$

мы будем иметь

$$z = 1, \quad \mu = -\alpha - \frac{m}{2}, \quad a = \alpha + \frac{\nu - 1}{2}, \quad b = \alpha, \quad c = 2\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow c - a - b + \mu = -\frac{\nu - 1}{2} - \alpha - \frac{m}{2} > 0,$$

$$B_{\nu, -}^{-\alpha} x^m = \frac{x^{2\alpha+m}}{2^{2\alpha}\Gamma(2\alpha)} \Gamma \left[ \begin{matrix} 2\alpha, & -\alpha - \frac{m}{2}, & -\frac{\nu-1}{2} - \alpha - \frac{m}{2} \\ \frac{1-\nu-m}{2}, & & -\frac{m}{2} \end{matrix} \right].$$

После упрощения получим

$$B_{\nu, -}^{-\alpha} x^m = x^{2\alpha+m} 2^{-2\alpha} \Gamma \left[ \begin{matrix} -\alpha - \frac{m}{2}, & -\frac{\nu-1}{2} - \alpha - \frac{m}{2} \\ \frac{1-\nu-m}{2}, & -\frac{m}{2} \end{matrix} \right].$$

Получим теперь формулу преобразования Меллина от дробного интеграла Бесселя на полуоси  $B_{\nu, -}^{-\alpha}$ . Преобразование Меллина функции  $f$  определяется формулой

$$Mf(s) = f^*(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx.$$

Имеем

$$\begin{aligned} ((B_{\nu, -}^{-\alpha} f)(x))^*(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} (B_{\nu, -}^{-\alpha} f)(x) dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^{\infty} x^{s-1} dx \int_x^{+\infty} \left( \frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left( \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) f(y) dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^{\infty} f(y) (2y)^{1-2\alpha} dy \int_0^y (y^2 - x^2)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left( \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

Найдем внутренний интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int_0^y (y^2 - x^2)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left( \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) x^{s-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{y^2} (y^2 - x)^{2\alpha-1} {}_2F_1 \left( \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{x}{y^2} \right) x^{\frac{s}{2}-1} dx. \end{aligned}$$

Используя формулу (4), получим

$$z = y^2 > 0, \quad c = 2\alpha > 0, \quad a = \alpha + \frac{\nu-1}{2}, \quad b = \alpha, \quad \alpha = \frac{s}{2}, \\ c - a - b + \alpha = \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} > 0 \Rightarrow s > \nu - 1.$$

Тогда

$$I = \frac{y^{4\alpha+s-2}}{2} \Gamma \left[ \alpha + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right]$$

и

$$\begin{aligned} ((B_{\nu,-}^{-\alpha}f)(x))^*(s) &= \frac{1}{2} \Gamma \left[ \alpha + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] \int_0^{\infty} f(y)(2y)^{1-2\alpha} y^{4\alpha+s-2} dy = \\ &= \frac{1}{2^{2\alpha}} \Gamma \left[ \alpha + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] \int_0^{\infty} f(y)y^{2\alpha+s-1} dy = \\ &= \frac{1}{2^{2\alpha}} \Gamma \left[ \alpha + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] f^*(2\alpha + s). \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что

$$((B_{\nu,-}^{-\alpha}f)(x))^*(s) = \frac{1}{2^{2\alpha}} \Gamma \left[ \alpha + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] f^*(2\alpha + s). \quad (5)$$

Теперь легко показать, что для дробного интеграла Бесселя на полуоси выполняется полугрупповое свойство. Действительно, пусть  $g(y) = (B_{\nu,-}^{-\beta}f)(y)$ . Используя (5), мы получим

$$\begin{aligned} (B_{\nu,-}^{-\alpha}[(B_{\nu,-}^{-\beta}f)(y)](x))^*(s) &= ((B_{\nu,-}^{-\alpha}g)(x))^*(s) = \\ &= \frac{1}{2^{2\alpha}} \Gamma \left[ \alpha + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] g^*(2\alpha + s) = \\ &= \frac{1}{2^{2\alpha}} \Gamma \left[ \alpha + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] (B_{\nu,-}^{-\beta}f)^*(2\alpha + s) = \\ &= \frac{1}{2^{2\alpha}} \Gamma \left[ \alpha + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{2^{2\beta}} \Gamma \left[ \beta + \frac{2\alpha+s}{2}, \frac{2\alpha+s}{2}, \frac{2\alpha+s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] f^*(2\alpha + 2\beta + s). \end{aligned}$$

С другой стороны

$$(B_{\nu,-}^{-(\alpha+\beta)}f)^*(s) = \frac{1}{2^{2(\alpha+\beta)}} \Gamma \left[ \alpha + \beta + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \alpha + \beta + \frac{s}{2} \right] f^*(2\alpha + 2\beta + s).$$

Мы имеем верное равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2\alpha}} \Gamma \left[ \alpha + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] \times \frac{1}{2^{2\beta}} \Gamma \left[ \beta + \frac{2\alpha+s}{2}, \frac{2\alpha+s}{2}, \frac{2\alpha+s}{2} - \frac{\nu-1}{2} \right] = \\ = \frac{1}{2^{2(\alpha+\beta)}} \Gamma \left[ \alpha + \beta + \frac{s}{2}, \frac{s}{2}, \alpha + \beta + \frac{s}{2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо полугрупповое свойство

$$B_{\nu,-}^{-\alpha} B_{\nu,-}^{-\beta} f = B_{\nu,-}^{-(\alpha+\beta)} f. \quad (6)$$

## Литература

- [1] Sprinkhuizen-Kuypers I. G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator // J. Math. Analysis and Applications, 1979. Vol. 72. – P. 674–702.
- [2] Ситник С. М. О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2010. – Т. 12. – № 2. – С. 69–75.
- [3] Ситник С. М. Дробное интегрирование для дифференциального оператора Бесселя // Материалы международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», – Нальчик. 2004. – С. 163–167.
- [4] Shishkina E. L., Sitnik S. M. On fractional powers of Bessel operators // Journal of Inequalities and Special Functions 2017. – Vol. 8. Issue 1. – 19 p. (To appear.)
- [5] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами (под ред. М. Абрамовица и И. Стигана) – М.: Наука. 1979. – 832 с.
- [6] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
- [7] Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. 1977/78. – Vol. 11, – № 2. – P. 135–143.
- [8] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы, 2-е изд., исправл. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.

УДК 517.518.82+519.677

### ЧТО ТАКОЕ АТТРАКТОРЫ НУЛЕЙ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”

Московский педагогический государственный университет

Москва

e-mail: ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, dianacve@inbox.ru

**Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Tsvetkovich D. G. What are attractors of zeros for classical Bernstein polynomials.** The question on the distribution of zeros of Bernstein polynomials in a complex domain is discussed. The exact rules regulating the limiting behavior of zeros in the case of a piecewise linear generating function are given.

Обсуждается вопрос о распределении нулей полиномов Бернштейна в комплексной области. Указаны точные правила, регулирующие предельное поведение нулей в случае кусочно линейной порождающей функции.

Вопрос о поведении нулей последовательности классических полиномов Бернштейна был поставлен сравнительно недавно (см. [1]). Заинтересовавшись проблемой, авторы провели ряд исследований, выявивших интересные закономерности (см. [2]–[4]). В настоящем сообщении мы даем краткое, популярное изложение полученных результатов. Соответствующий понятийный аппарат, терминологию и список ключевых авторов оформим в виде небольшого *глоссария*.

**Аттрактор** — притягивающее множество (от англ. *attract* — привлекать, притягивать). Термин употребляется для обозначения предельного множества, как правило, сложной, но конкретной структуры, к которому стремятся изучаемые объекты при продолжении процесса *ad infinitum*. Понятие аттрактора в основном используется в теории дифференциальных уравнений и динамических систем; в классическом анализе до недавнего времени такой термин встречался редко.

**Иентч** Роберт (Robert Jentzsch, 1890–1918), немецкий математик и поэт. Автор ряда блестящих результатов по анализу и интегральным уравнениям. Погиб молодым на фронтах Первой мировой войны, в битве при Камбре. Подробная биография Иентча приведена в [5]. Главные работы Иентча опубликованы посмертно.

**Теорема Иентча** из теории степенных рядов утверждает, что для степенного ряда с конечным радиусом сходимости  $R > 0$  окружность  $|z| = R$  состоит из предельных точек для нулей, взятых от частичных сумм этого ряда. Опубликована с полным доказательством в работе [6, с. 227]. Другие варианты доказательства можно найти в [7, с. 165–166] и [8, с. 246–249]; некоторые обобщения отмечены в [9, с. 390–392, 396–399] (см. также [10]–[12]). Теорема Иентча часто формулируется в неточном виде, и окончательный результат можно понять лишь из доказательства. Фактически теорема Иентча утверждает, что граница круга сходимости является своеобразным аттрактором для некоторых нулей от частичных сумм степенного ряда.

**Бернштейн** Сергей Натанович (1880–1968), крупнейший российский и советский математик. Автор глубоких и тонких исследований по анализу, дифференциальным уравнениям и теории вероятностей. В заметке [13] ввел полиномы, обладающие замечательными свойствами.

**Полиномы Бернштейна** для функции  $f \in C[0, 1]$  определяют формулой

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Здесь  $z \in \mathbb{C}$ , хотя чаще всего считают, что  $z = x \in [0, 1]$ . Согласно классической теореме Бернштейна [13] полиномы  $B_n(f, x)$  при  $n \rightarrow \infty$  сходятся к порождающей функции  $f(x)$  равномерно на  $[0, 1]$ . Теория полиномов Бернштейна подробно изложена в [14], [15].

**Канторович** Леонид Витальевич (1912–1986), выдающийся советский математик и экономист, один из создателей линейного программирования. Ав-

тор замечательных работ по анализу, теории полуупорядоченных пространств, операторным уравнениям и математической экономике. Лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 года “за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов”. В пионерской работе [16] поставил и изучил вопрос о распространении сходимости полиномов Бернштейна в комплексную плоскость. Работу [16] необычайно высоко оценил С. Н. Бернштейн [17], существенно развивший теорию Канторовича (см. также [18]).

**Лемниската Канторовича** для точки  $c \in (0, 1)$  это кривая вида

$$L_c : \left| \frac{z}{c} \right|^c \left| \frac{1-z}{1-c} \right|^{1-c} = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Подобные кривые участвуют в описании комплексной области сходимости полиномов (1) в случае кусочно аналитической порождающей функции  $f \in C[0, 1]$ . Например, если  $f(x) \equiv \varphi(x)$  на  $[a, b] \subset (0, 1)$  с некоторой целой функцией  $\varphi(z)$ , то полиномы  $B_n(f, z)$  при  $n \rightarrow \infty$  сходятся к  $\varphi(z)$  в области, примыкающей к отрезку  $[a, b]$  и ограниченной лемнискатами  $L_a, L_b$  (подробнее см. [14, гл. IV]).

**Цепочка склеиваний** — регулярное попарное совпадение полиномов (1), возникающее для кусочно линейных порождающих функций вида

$$f(x) = \alpha + \beta x + \sum_{j=1}^r \gamma_j |q_j x - p_j|, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

с постоянными коэффициентами  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и рациональными точками излома

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad \dots, \quad x_r = \frac{p_r}{q_r}, \quad x_1, \dots, x_r \in (0, 1). \quad (4)$$

Дроби (4) считаем несократимыми с общим знаменателем  $q = \text{НОК}(q_1, \dots, q_r)$ . Тогда для полиномов (1) от функции (3) действует следующее *правило склеивания*

$$B_{qm+1}(f, z) = B_{qm}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Полиномы из (5) и образуют соответствующую *цепочку склеиваний*. Они чуть отличаются по свойствам от остальных полиномов последовательности (1). Подробнее про правило склеивания см. [19, с. 143–144]).

Сейчас уже ясно (см. [3], [19]), что кусочно линейные функции в теории полиномов Бернштейна составляют особый класс порождающих функций. Отметим также, что для функции  $f \in C[0, 1]$  вида (3) сходимость полиномов (1) распространяется в комплексную область на компакт, ограниченный фрагментами лемнискат Канторовича, каждая из которых построена для своей точки излома в (4) (см. рис. 1).

**Новиков** Игорь Яковлевич (1958 г. р.), известный советский и российский математик. В работе [1] на примере кусочно линейной функции

$$f(x) = \frac{1}{4} (2 - |4x - 1| + |4x - 3|), \quad x \in [0, 1], \quad (6)$$

показал, что нули полиномов Бернштейна стремятся к некоторому устойчивому предельному множеству, связанному со структурой порождающей функции (6).



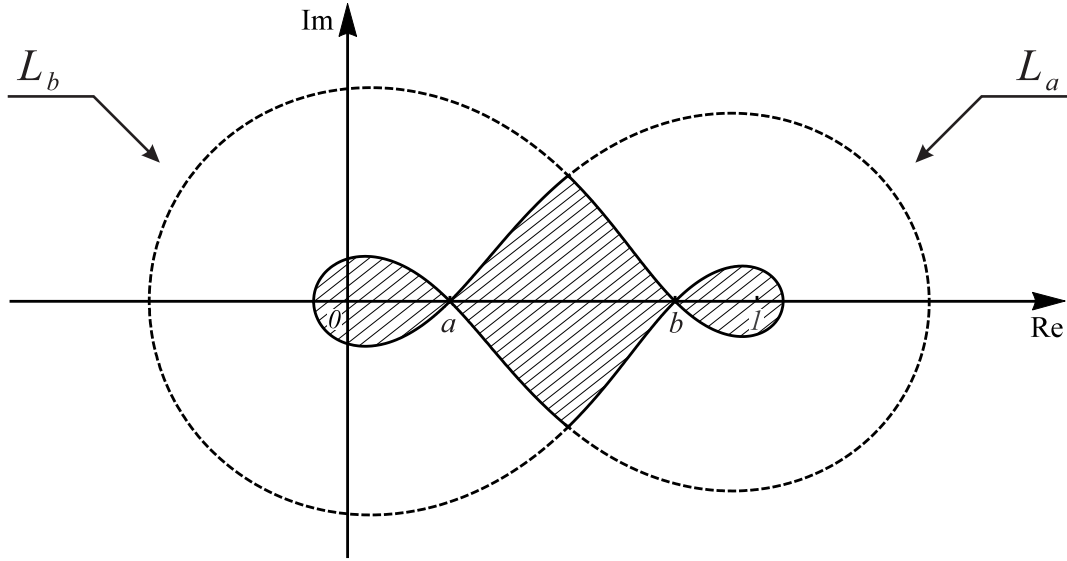


Рис. 2. Штриховкой показана область сходимости полиномов Бернштейна для любой кусочно линейной порождающей функции с изломами в точках  $x_1 = a$  и  $x_2 = b$  из интервала  $(0, 1)$ .

Отметил связь этого эффекта с теоремой Иентча для степенных рядов. Интерес к конкретному примеру (6) возник в связи с некоторыми задачами из теории всплесков.

**Аттрактор нулей полиномов Бернштейна** — предельное множество на комплексной плоскости, к которому стягивается подавляющее большинство нулей последовательности полиномов (1) при  $n \rightarrow \infty$ . Средствами компьютерной математики удастся полностью исследовать и описать аттракторы нулей, возникающие в случае кусочно линейных порождающих функций вида (3). Как правило, такие аттракторы представляют собой некие континуумы в  $\mathbb{C}$ . Состоят из фрагментов лемнискат Канторовича, порожденных имеющимися точками излома, и больших дуг специальных *серединных окружностей* (см.), возникающих на стыках лемнискат. Аттракторы могут еще содержать отдельные изолированные точки той или иной природы. В целом картина с аттракторами нулей для полиномов Бернштейна получается намного более эффектной и сложной, чем для степенных рядов в случае теоремы Иентча.

**Серединная окружность** — кривая вида

$$\left(x - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sigma}{|\sigma^2 - 1|}\right)^2 \quad (7)$$

с параметром

$$\sigma \equiv \left[ \frac{c_2^{c_2} (1 - c_2)^{1-c_2}}{c_1^{c_1} (1 - c_1)^{1-c_1}} \right]^{\frac{1}{c_2 - c_1}} > 0, \quad (8)$$

построенная по двум последовательным точкам  $c_1, c_2 \in (0, 1)$ , где  $c_1 < c_2$ . Уравнение (7) с параметром (8) получается при приравнении левых частей, взятых из уравнений для лемнискат Канторовича  $L_{c_1}, L_{c_2}$ . Найденная окружность проходит через точки пересечения таких лемнискат. Термин “серединная

окружность” возник по аналогии с серединным перпендикуляром  $\operatorname{Re} z = 1/2$ , в который окружность (7) вырождается при  $c_1 + c_2 = 1$ . Возможно, впрочем, что аналогия является несовершенной; термин можно заменить, если найдется более удачный вариант.

**Рассеченный аттрактор** — аттрактор, разделенный на несвязные части сомкнувшейся дугой серединной окружности. Возникает в особых вырожденных случаях — при обращении порождающей функции  $f(x)$  в тождественный нуль на внутреннем интервале отрезка  $[0, 1]$ .

**Изолированная точка аттрактора нулей** (полиномов Бернштейна) расположена отдельно от основной части аттрактора. Появление подобных точек также связано с обращением в нуль самой порождающей функции  $f(x)$  или ее аналитического продолжения. Характер изолированной точки отдельно уточняется.

**Девиантные нули** полиномов Бернштейна — нули, ведущие себя по особым правилам и не сходящиеся к аттрактору нулей. Девиантные нули крайне малочисленны, но их присутствие следует учитывать. Для кусочно линейной порождающей функций вида (3) возникают только у полиномов, не входящих в цепочку склеиваний (5).

**Жук, тело жука, усики** — неформальная лексика, с помощью которой удобно объяснять структуру аттрактора нулей полиномов Бернштейна. “Жук” — весь аттрактор, “тело жука” состоит из фрагментов лемнискат, а его “усики” — из дуг серединных окружностей.

Для лучшего понимания происходящего приведем примеры на две характерные ситуации.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = |5x - 1| + |7x - 3| + |7x - 5|, \quad x \in [0, 1], \quad (9)$$

с изломами в точках

$$x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{7}, \quad x_3 = \frac{5}{7}. \quad (10)$$

Это типичный случай “общего положения”.

Множество нулей полинома  $B_{550}(f, z)$  представлено на рис. 2. Для лучшего восприятия рисунок обрезан по вертикали, и часть “дальних” нулей, расположенных вдоль прямой  $\operatorname{Re} z = 1/2$ , на чертеж не попала. Впрочем, конструкция формирующейся структуры вполне просматривается. Аттрактор нулей — “жук” — состоит из “тела” и “усиков”. Точный вид аттрактора показан на рис. 3.

Основное “тело” аттрактора образовано фрагментами трех лемнискат, порожденных точками излома (10). На стыках лемнискат возникают два “усика”. Первый из них является дугой серединной окружности, а второй состоит из двух вертикальных лучей на прямой  $\operatorname{Re} z = 1/2$ . Такое “выпрямление” второго “усика” связано с симметрией порождающих точек  $x_2 = 3/7$  и  $x_3 = 5/7$ , для которых  $x_2 + x_3 = 1$ .

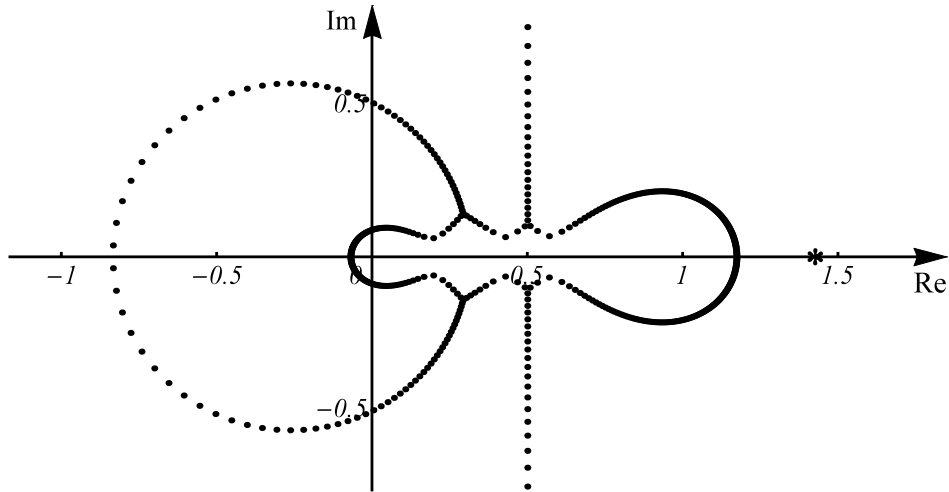


Рис. 3. Основные нули полинома  $B_{550}(f, z)$  для функции (9).

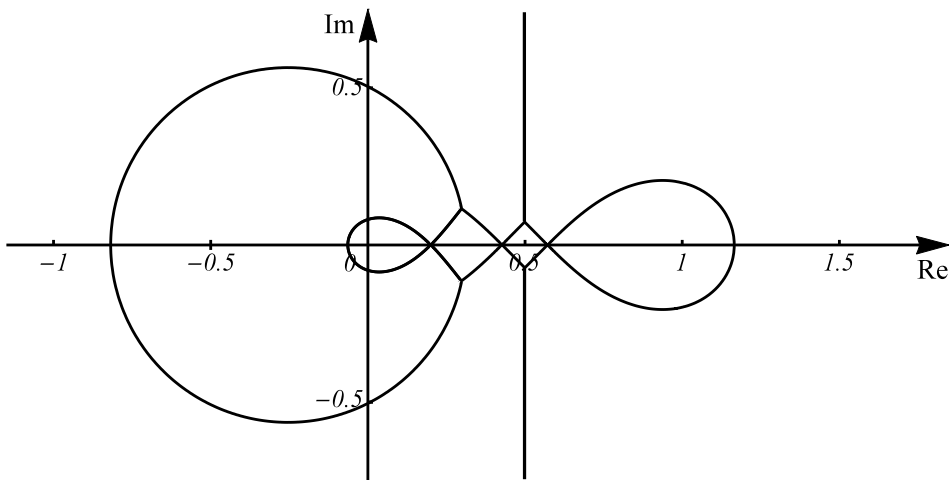


Рис. 4. Аттрактор нулей в примере 1.

Обратим еще внимание на то, что полином  $B_{550}(f, z)$  имеет девиантный вещественный нуль  $z^* \approx 1.42987$  (на рис. 2 он отмечен “звездочкой”). Девиантный нуль возник из-за того, что полином  $B_{550}(f, z)$  не попадает в цепочку склеиваний

$$B_{35m+1}(f, z) = B_{35m}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

построенную для функции (9) по правилу (5). Компьютерный расчет показывает, что полином  $B_{560}(f, z)$  из цепочки (11) подобных девиантных нулей иметь не будет, и все его нули (без исключения) регулярно укладываются вблизи аттрактора.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = 6x - 5 + |7x - 2| + |9x - 4| + |4x - 3|, \quad x \in [0, 1], \quad (12)$$

с изломами в точках

$$x_1 = \frac{2}{7}, \quad x_2 = \frac{4}{9}, \quad x_3 = \frac{3}{4}. \quad (13)$$

В данном примере  $f(x) \equiv 0$  между точками  $x_1 = 2/7$  и  $x_2 = 4/9$  из набора (13). Множество нулей полинома  $B_{756}(f, z)$  представлено на рис. 4.

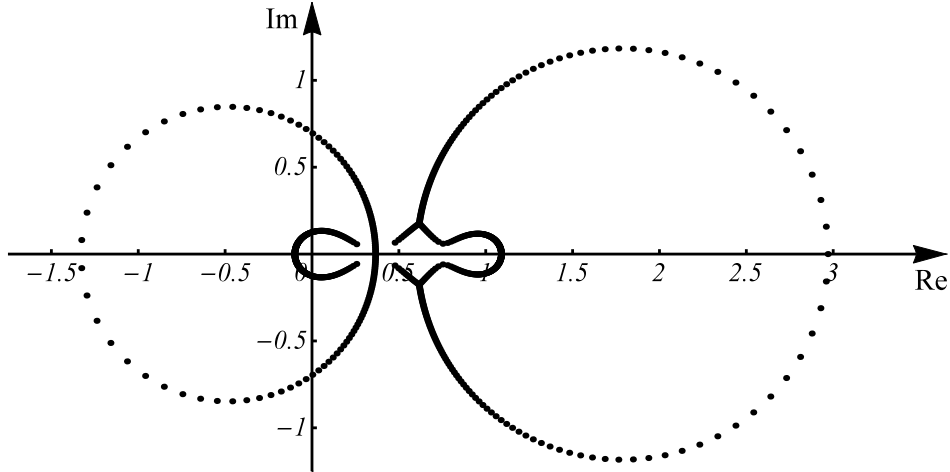


Рис. 5. Нули полинома  $B_{756}(f, z)$  для функции (12).

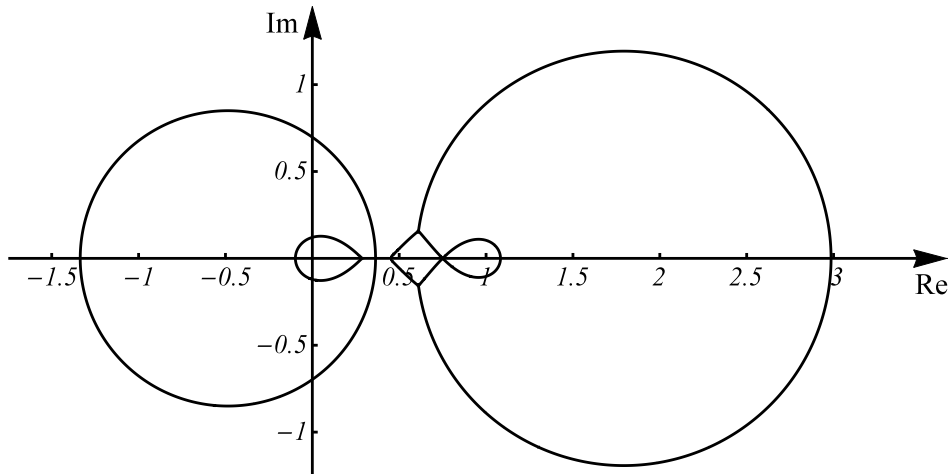


Рис. 6. Рассеченный аттрактор нулей в примере 2.

Возникающий аттрактор нулей показан на рис. 5. Одно отличие от предыдущего примера 1 отметим особо: фрагменты лемнискат, охватывающие интервал  $(2/7, 4/9)$ , в аттрактор уже не включаются, зато соответствующий “усик” замыкается во всю серединную окружность, порожденную точками  $x_1 = 2/7$  и  $x_2 = 4/9$ . Аттрактор оказывается *рассеченным*.

Девиантные нули у полинома  $B_{756}(f, z)$  отсутствуют, поскольку он попадает в цепочку склеиваний

$$B_{252m+1}(f, z) = B_{252m}(f, z), \quad m \in \mathbb{N},$$

построенную для функции (12) по правилу (5).

Проанализировав множество подобных примеров и приняв во внимание некоторые теоретические соображения, мы пришли к убеждению в строгой системности происходящего. Главный наш вывод прост: для полиномов Бернштейна, взятых от любой функции  $f \in C[0, 1]$  вида (3), можно провести исчерпывающее построение аттрактора нулей, ориентируясь на конечный набор из шести правил. Приведем их *синописис* с краткими комментариями. Для упрощения формулировок абсциссу точки излома, выбранную из общего набора (4), будем обозначать через  $c$ , а пару последовательных абсцисс — через  $c_1, c_2$ , нумеруя их независимо от основной нумерации, введенной в (4).

Два базовых правила выглядят так.

**Правило 1.** При наличии у функции  $f(x)$  излома в точке  $x = c \in (0, 1)$  в аттрактор включается соответствующий фрагмент лемнискаты (2). Данный фрагмент проводится из точки  $z = c$  до пересечения с другими лемнискатами, порожденными соседними точками излома. Если точка излома одна, то аттрактор содержит лишь одну лемнискату (2). Если точек излома несколько, то на стыках лемнискат возникают дополнительные части аттрактора (“усики”), которые регулируются следующим правилом.

**Правило 2.** При наличии у функции  $f(x)$  двух последовательных изломов в точках  $x = c_1$  и  $x = c_2$ , где  $c_1, c_2 \in (0, 1)$  и  $c_1 < c_2$ , в аттрактор включается большая (внешняя) дуга серединной окружности (7) с параметром  $\sigma > 0$  из формулы (8). Если  $c_1 + c_2 = 1$ , то  $\sigma = 1$ , и окружность (7) вырождается в прямую  $\operatorname{Re} z = 1/2$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $[0, 1]$ . В таком случае в аттрактор включаются два луча этой прямой, проведенные симметрично “вверх” и “вниз” из точек пересечения соответствующих лемнискат до бесконечности.

Сформулированные правила 1 и 2 отражают главные закономерности, действующие в случае “общего положения”. Специальные поправки надо вносить лишь при обращении в тождественный нуль порождающей функции  $f(x)$  на том или ином участке отрезка  $[0, 1]$ . Приведем соответствующие добавочные правила. Начнем с особого “внутреннего” случая.

**Правило 3.** Пусть  $f(x) \equiv 0$  между двумя изломами в точках  $x = c_1$  и  $x = c_2$  внутри  $(0, 1)$ . Тогда из аттрактора надо исключить те фрагменты лемнискат  $L_{c_1}, L_{c_2}$ , что сверху и снизу “охватывают” промежуток  $(c_1, c_2)$ . При этом дуга с соответствующим “усиком” замыкается в полную серединную окружность (7) с параметром (8). Если  $c_1 + c_2 = 1$ , то в аттрактор (вместо окружности) включается вся вертикальная прямая  $\operatorname{Re} z = 1/2$ .

Именно в условиях правила 3 и возникает рассеченный аттрактор. Его типичный вид был представлен в примере 2 выше. Охарактеризуем теперь вырожденный “граничный” случай.

**Правило 4.** Пусть  $f(x) \equiv 0$  на промежутке  $[0, c]$  с изломом в точке  $x = c \in (0, 1)$ . Тогда для каждого из полиномов (1) группа нулей, “тяготеющая” к левой петле лемнискаты (2), “схлопывается” в один кратный нуль,

расположенный в точке  $z = 0$ . В таком случае из аттрактора нулей надо исключить левую петлю лемнискаты (2), а точку  $z = 0$  следует считать изолированной (кратной) точкой аттрактора. Аналогично, если  $f(x) \equiv 0$  на промежутке  $[c, 1]$  с изломом в точке  $c \in (0, 1)$ , то для каждого из полиномов (1) группа нулей, “тяготеющая” к правой петле лемнискаты (2), “схлопывается” в один кратный нуль, расположенный в точке  $z = 1$ . Соответственно, из аттрактора нулей надо исключить правую петлю лемнискаты (2), а точку  $z = 1$  следует считать изолированной (кратной) точкой аттрактора.

Особые ситуации, отмеченные в правилах 3 и 4, являются неустойчивыми, и при определенных малых возмущениях порождающей функции  $f(x)$  картина возвращается к случаю общего положения.

Возможна, наконец, такая специфическая ситуация, когда в аттракторе нулей появляется изолированная (некратная) точка, никак не связанная с точками излома, а порожденная тем, что сама функция  $f(x)$  или ее естественное продолжение имеет изолированный нуль именно в этой точке из  $\mathbb{R}$ . Нетрудно сообразить, например, что если подобный нуль попал на  $[0, 1]$ , то по соображениям равномерной аппроксимации к нему должны сходиться нули полиномов Бернштейна. Отсюда возникает следующее правило.

**Правило 5.** Пусть функция  $f(x)$  имеет изолированный нуль, расположенный в точке  $x = d \in [0, 1]$ , но не имеет излома в этой точке. Тогда  $z = d$  включается в аттрактор нулей на правах изолированной (некратной) точки.

Сложнее было заметить другой случай — с нулем естественного продолжения функции  $f(x)$  при распространении формулы (3) на всю ось  $\mathbb{R}$ . Проведенные опыты показали удивительную согласованность с теорией Канторовича: важно лишь, чтобы нуль продолжения функции  $f(x)$  попал внутрь области сходимости полиномов Бернштейна. После того, как следующее правило сформулировано, оно становится почти очевидным.

**Правило 6.** Пусть естественное продолжение функции  $f(x)$  имеет изолированный нуль в точке  $x = d \in \mathbb{R}$ , не принадлежащей отрезку  $[0, 1]$ , но попадающей внутрь области сходимости полиномов Бернштейна (1). Тогда точка  $z = d$  включается в аттрактор нулей на правах изолированной (некратной) точки.

На наш взгляд представленный список из шести правил является исчерпывающим, хотя, не исключено, что какие-то тонкие возможности остались незамеченными. Во всяком случае, изложенная картина была проверена компьютерными средствами на большой серии различных функций вида (3). Эффекты, связанные с изолированными точками аттракторов из правил 4–6, легко обосновываются. Для более сложных правил 1–3 подробные аналитические доказательства — дело будущего.

В итоге вырисовывается масштабная программа предстоящих исследований. Укажем несколько перспективных тем, требующих теоретической разработки. Было бы весьма желательно

- дать строгое аналитическое обоснование сформулированных правил построения аттракторов;

- оценить скорость сходимости нулей полиномов Бернштейна к тем или иным частям аттрактора;
- выявить примерные пропорции нулей, тяготеющих к различным фрагментам аттрактора;
- найти и обосновать точные правила, регулирующие поведение девиантных нулей полиномов Бернштейна;
- изучить вопрос о возможности распространения результатов на более общий класс кусочно аналитических порождающих функций.

Дальнейшие исследования в этих направлениях могут существенно обогатить общую теорию распределения нулей для полиномов специального вида.

## Литература

- [1] Новиков И. Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. 2002. Т. 71. Вып. 2. – С. 239–253.
- [2] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Задача о нулях полиномов Бернштейна на модельном примере симметричного модуля // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й междунар. Саратов. зимней школы. Саратов: ООО Издательство “Научная книга”, 2016. С. 271–275.
- [3] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2016. Материалы научной конференции, 11–15 апреля 2016 г. СПб: РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. – С. 139–145.
- [4] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Компьютерная классификация аттракторов для нулей полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII международной научной конференции. Выпуск 17. Смоленск: СмолГУ, 2016. С. 224–227.
- [5] Duren P., Herbig A.-K., Khavinson D. Robert Jentzsch, mathematician and poet // The Mathematical Intelligencer. 2008. Vol. 30. Is. 3. P. 18–24.
- [6] Jentzsch R. Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen // Acta Math. 1918. Vol. 41. – P. 219–251.
- [7] Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. – М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 240 с.
- [8] Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 463 с.
- [9] Rahman Q.I., Schmeisser G. Analytic Theory of Polynomials. – Oxford: Clarendon Press, 2002. – xiv+742 p.
- [10] Izumi S. On the Distribution of the Zero Points of Sections of a Power Series // Japanese Journal of Math. 1927. Vol. 4. – P. 29–32.
- [11] Коробейник Ю. Ф. О некоторых свойствах функциональных рядов // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15. Вып. 4(94). – С. 149–156.

- [12] Лебедева Е. А. Об одном обобщении теоремы Р. Йенча // Матем. заметки. 2010. Т. 88. Вып. 5. – С. 753–758.
- [13] Бернштейн С. Н. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités // Сообщения Харьковскаго Математическаго Общества. 1912. Т. 13. № 1. – С. 1–2.
- [14] Lorentz G. G. Bernstein polynomials. – Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. – x+130 p.
- [15] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. – 64 с.
- [16] Канторович Л. В. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Известия АН СССР. Сер. VII. Отделение матем. и естеств. наук. 1931. № 8. – С. 1103–1115.
- [17] Бернштейн С. Н. О сходимости многочленов  $\sum_0^n C_n^m f(\frac{m}{n})x^m(1-x)^{n-m}$  в комплексной области // Известия АН СССР. Сер. матем. 1943. Т. 7. № 2. – С. 49–88.
- [18] Виденский В. С. Работы Л. В. Канторовича о полиномах С. Н. Бернштейна // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2013. Вып. 2. – С. 50–53.
- [19] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. – С. 126–175.



# Актуальные проблемы математического образования

УДК 378.519.2

## ИНТЕГРАЦИЯ МООК В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС ПО ИНФОРМАТИКЕ НА ОСНОВЕ УЧЕБНЫХ ДОРОЖНЫХ КАРТ

Андреева Н. М., Пак Н. И.  
ФГАОУ ВО Сибирский федеральный университет,  
ФГБОУ ВО КГПУ им. В. П. Астафьева  
Красноярск  
e-mail: and-n-m@mail.ru  
e-mail: nik@kspul.ru

**Andreeva N. M., Pak N. I. Integration of MOOC into educational process in computer science on the base of the learning roadmaps.** The key features of MOOC are presented in the paper. Two ways to integrate MOOC into educational process in computer science on the basis of the learning roadmaps are offered here. In one of the ways MOOC is used as an interactive educational resource. In the second — implements an alternative method for training.

**Keywords:** massive open online courses (MOOC), open educational resources, learning management system “MOODLE”.

Рассмотрены ключевые особенности МООК. Предложены два способа интеграции МООК в учебный процесс по информатике с использованием учебных дорожных карт. В одном из них МООК используется в качестве интерактивного учебного пособия. В другом — реализует вариативный способ освоения учебного материала.

**Ключевые слова:** массовые открытые образовательные курсы (МООК), открытые образовательные ресурсы, система управления обучением “MOODLE”.

В Концепции развития математического образования в Российской Федерации отмечается, что одной из базовых задач является “обеспечение наличия общедоступных информационных ресурсов, необходимых для реализации учебных программ математического образования, в том числе в электронном формате, инструментов деятельности обучающихся и педагогов, применение современных технологий образовательного процесса” [1].

Массовые открытые образовательные курсы (МООК) в рамках Национальной платформы открытого образования разрабатываются в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов Российской Федерации [2].

Необходимость и возможность использования МООК в учебном процессе вузов обеспечивается следующими факторами. Во-первых, они сочетают возможности дистанционного и онлайн-обучения при наличии целостных электронных учебно-методических комплексов по дисциплине. Учебный материал разбит на короткие отрезки, представлен презентациями и сопровождается аудио-, видеозаписями. Обучение базируется на самостоятельном приобретении

знаний в процессе пошагового усвоения материала. Во-вторых, отличительной чертой MOOK является то, что большая роль в процессе обучения отводится интерактивному общению студентов и преподавателей на форумах. Взаимная оценка работ и их обсуждение относятся к важнейшим методам обучения MOOK [3].

Представляется, что весьма привлекательным является случай, когда ресурсы MOOK могут применяться в традиционном учебном процессе, в частности по информатике. Однако здесь возникает много организационных и методических трудностей, которые следует преодолевать за счет создания специальной информационной предметной среды. В этой среде необходимо предусмотреть механизм органичного включения элементов MOOK во все удобные виды самостоятельной работы студентов. Подобным механизмом может служить технология учебных дорожных карт [4, 5]. При этом MOOK используется, во-первых, в качестве дополнительного контента интерактивного курса и, во-вторых, в качестве альтернативного способа освоения отдельного модуля учебной программы дисциплины (рис. 1).

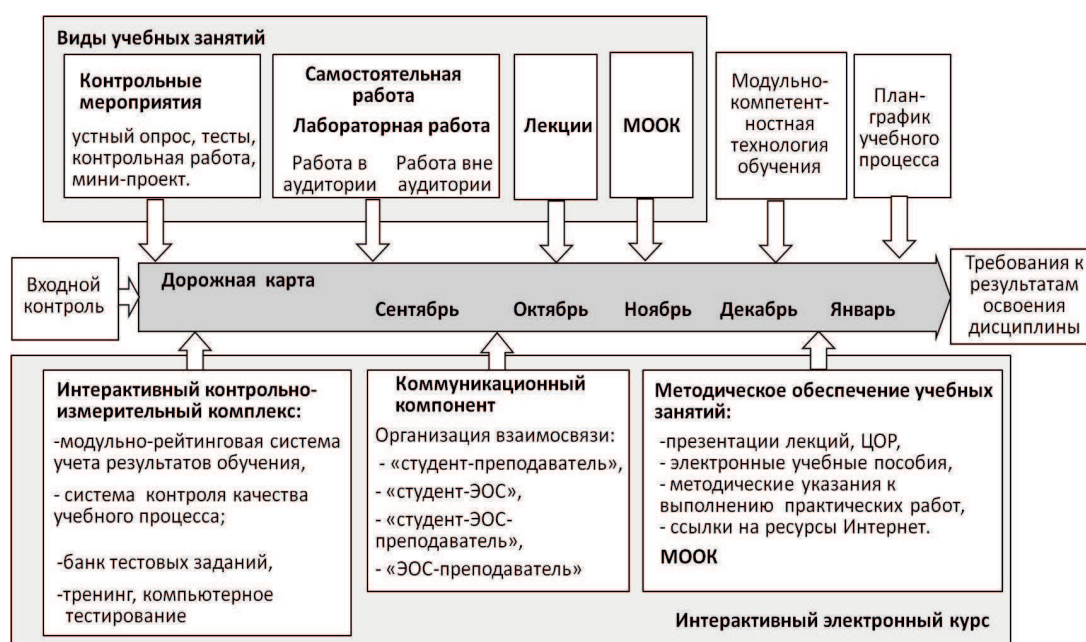


Рис. 1. Элементарная структура информационной предметной среды, реализующей методическую систему обучения под управлением дорожных карт

В первом случае MOOK применяются как интерактивные учебные пособия по отдельным разделам информатики, без обязательных требований к контролю результатов их освоения. Сроки изучения материала студент определяет самостоятельно в соответствии со своей дорожной картой. Студентам рекомендованы дистанционные курсы Национального открытого университета "ИНТУИТ", для которых не установлены жесткие сроки освоения, доступные в режиме 24/7. Например:

- "Базы данных", автор — Владимир Швецов, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,

- “Введение в теорию программирования. Объектно-ориентированный подход”, автор — Сергей Зыков, Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”.

Во втором случае студент включает МООК в свою дорожную карту. Результаты освоения МООК учитываются в промежуточной аттестации. Примерами служат МООК, доступные по проекту МОН РФ “Российская национальная платформа открытого образования”:

- “Математическая логика”, авторы: Ю. Г. Карпов и И. В. Шошмина, ФГАОУ ВО “Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого”,
- “Линейная алгебра”, автор: И. А. Хованская, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”.

Внедрение МООК в учебный процесс по информатике повышает уровень самообразовательной деятельности студента. Оценка чужих работ и их обсуждение позволяет студенту более объективно оценить свои знания. Участие в интерактивных форумах повышает мотивацию студента. Обратная связь обеспечивает сравнительную оценку действующего учебного процесса по дисциплине. Преподаватель получает информацию о замеченных несовершенствах учебного процесса.

## Литература

- [1] Распоряжение Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. “Об утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации”.
- [2] Открытое образование. Курсы ведущих вузов России [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://openedu.ru/> (Дата обращения: 31.01.2017).
- [3] Титова С. В. МООК в российском образовании // Высшее образование в России. 2015. № 12. С. 145–151.
- [4] Андреева Н. М., Пак Н. И. О роли дорожных карт при электронном обучении информатике студентов классических университетов // Открытое образование. 2015. № 3. С. 101–109.
- [5] Дорошенко Е. Г., Пак Н. И., Хегай Л. Б. Учебные дорожные карты как средство личностно-ориентированного обучения // Образование и наука. 2015. № 8. С. 97–111.

## ОБ ИЗУЧЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ШКОЛЕ

Делюкова Я. В.

Дальневосточный федеральный университет

Школа педагогики, г. Уссурийск

e-mail: yanadelyukova@mail.ru

**Delyukova Ya. V. On the study of probability in school.** The article deals with the methods of studying the probability of random events in the school course of mathematics. The author focuses on the use of geometric probability.

**Keywords:** probabilistic-statistical line; calculation of probabilities; geometric probability.

В статье рассматриваются вопросы, касающиеся методики изучения вероятностей случайных событий в школьном курсе математики. Автор акцентирует внимание на применении геометрических вероятностей.

**Ключевые слова:** вероятностно-статистическая линия; вычисление вероятности; геометрические вероятности.

Вот уже более 10 лет темы вероятностно-статистической линии изучаются в школьном курсе математики как обязательные. Этот факт стал возможен благодаря положительному экспериментальному опыту внедрения стохастики в отечественную школу и активному десятилетнему обсуждению этого вопроса в педагогической среде.

В пользу включения вероятностно-статистической линии в школьный курс приводятся следующие доводы:

– изучать теорию вероятностей невозможно без обращения к личному опыту школьников, а поэтому изучение стохастической линии способствует проявлению интереса к математике;

– знание основ теории вероятностей и статистики способствуют адекватному восприятию экономической, социальной информации в быстромеменяющемся современном мире;

– Е. А. Бунимович, опираясь на исследования психологов, а также опыт своей работы, приводит данные о том, что наиболее благоприятным для формирования вероятностных представлений является возраст, который примерно соответствует V–VII классам российской школы [1];

– универсальность вероятностных законов – изучение теории вероятностей способствует формированию естественнонаучных представлений об окружающем мире, что сказывается на развитии личности школьника, независимо от того чем он будет заниматься в будущем;

– многолетний положительный опыт других стран, где преподавание основ теории вероятностей, статистики, комбинаторики ведётся с начальной школы.

Конечно, и до 2004 года элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей изучались на факультативных, кружковых занятиях со школьниками. На сегодняшний день все допущенные к использованию учебники матема-

тики содержат вероятностно-статистическую линию, а задачи с вероятностным содержанием представлены в заданиях ОГЭ, ЕГЭ.

Задачи на нахождение вероятностей в заданиях ОГЭ – это, как правило, задачи на непосредственное применение классического определения вероятности. В условии любой задачи на вычисления вероятности по классической схеме всегда подразумевается некоторый эксперимент, который надо осмыслить, продумать варианты его осуществления, а уже после этого можно приступать к подсчету элементарных исходов эксперимента, следя за тем, чтобы исходы были равновероятными. Далее следует подсчитать число тех исходов, при которых произойдет интересующее событие. Игнорирование одного из этапов решения задачи, из-за нехватки времени или по другим причинам, приводит к тому, что школьники попросту манипулируют числовыми данными задачи, подставляя их в формулу, исходя из соображений, что ответ не должен превосходить единицы, а сталкиваясь с более сложными задачами, не справляются с ними, теряя интерес.

Рассмотрим с этой точки зрения две задачи.

Школьникам 10–11 классов – участникам Летней физико-математической школы при Дальневосточном федеральном университете в городе Уссурийске – была предложена следующая задача.

На соревнованиях выступают команды – по одной из каждой из заявленных школ. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность, что команда школы номер 15 будет выступать после команды школы 44, команда школы 12 будет выступать после команды школы номер 15, но перед командой школы номер 1?

Мнения школьников разделились. Часть школьников посчитала, что для решения задачи не достаточно данных, так как в условии не сказано, сколько школ приняли участия в соревнованиях. Некоторые школьники сравнительно быстро назвали верный ответ – вероятность интересующего события  $P = 1/24 \approx 0,04$ . Однако, при этом, полагалось, что кроме команд названных школ, других участников можно вообще не принимать в расчёт. Таким образом, четыре команды можно переставлять между собой 24 способами, и только один способ благоприятен. Такие рассуждения не согласуются с классическим определением вероятности, и, строго говоря, нельзя считать правильными. Испытание состоит в том, что случайным образом определяется порядок выступления несколько команд (обозначим их число  $k$ ,  $k \geq 4$ ), число всевозможных элементарных исходов испытания  $k!$  ( $k! \neq 24$  при  $k \neq 4$ ), а число благоприятных исходов вовсе не равно одному.

Здесь интересно отметить, что в другой раз, в другой группе школьников, учащиеся самостоятельно пришла к заключению, что ответ действительно не зависит от числа  $k$ , в ходе решения аналогичной задачи: на полке в случайном порядке расставлено  $k$  книг, среди которых четыре тома произведений одного автора. Найти вероятность, что эти тома расположены в порядке возрастания их номеров слева на право (но не обязательно рядом). При этом проводились вполне строгие рассуждения. Событие  $A$ , вероятность которого требуется вычислить, состоит в том, что четыре тома будут расположены в порядке убывания номеров (но не обязательно друг за другом). Для подсчёта числа благоприятных исходов предлагалось сначала поставить на полку четыре

тома в указанном порядке, после этого расположить оставшиеся  $(k - 4)$  книги. Первую из оставшихся книг можно расположить 5 способами, вторую – 6, ...,  $(k - 4)$ -ю –  $k$  способами, далее было найдено  $m = 5 \times 6 \times \dots \times (k - 4)$ , и, наконец,  $P(A) = 1/24$ .

Вероятностно-статистическая линия представлена в школьных учебниках таким образом, что сначала излагается статистический подход к понятию вероятности, основанный на здравом смысле и жизненном опыте, затем изучается классическая вероятностная схема, и излагается геометрический подход к определению вероятности. На наш взгляд, геометрическому определению вероятности отведено не заслуженно мало места в курсе школьной математики. Отметим некоторые преимущества использования этого определения.

Во-первых, задачи на геометрические вероятности, позволяют установить связь между темами вероятностно-статистической линии и темами курса геометрии. На курсах повышения квалификации учителей математики не раз приходилось слышать мнение учителей о том, что темы вероятностно-статистической линии представлены обособленно от других тем и учителям приходится изыскивать возможность связать другие темы алгебры и геометрии с элементами теории вероятностей и комбинаторики.

Во-вторых, это определение даёт геометрическую интерпретацию самого понятия “вероятность”.

В-третьих, можно привести большое число разнообразных задач, не имеющих никакого отношения к геометрии, которые решаются только с использованием геометрических вероятностей.

Приведём здесь только несколько примеров задач на применение геометрического определения вероятности, решая которые можно организовать повторение свойств изученных функций, преобразований графиков функций, свойств модуля, графического способа решения неравенства с двумя переменными, вычислений площадей.

**Задача.** К празднику Винни-Пух получил 1000 грамм мёда, Кролик – 300 грамм, а Пятачок – 100 грамм мёда. В некоторый случайный момент времени Винни-Пух обнаружил, что его мёд закончился, и предложил друзьям игру. Если в этот момент у Пятачка мёда больше чем у Кролика, то выигрывает Пятачок, если у Кролика мёда больше чем три раза по столько, сколько у Пятачка, то выигрывает Кролик. Во всех остальных случаях выигрывает Винни-Пух. Какова вероятность, что выигрывает Винни-Пух?

**Задача** [2, с. 99]. Коля и Оля договорились встретиться в Центральном парке. Пришедший первым ждёт другого в течение 30 минут, после чего уходит. Какова вероятность, что они встретятся?

Эту классическую задачу о встрече уместно дополнить следующей задачей.

**Задача.** В условиях эксперимента, описанного в предыдущей задаче найти вероятность того, что Коля ждал Олю обусловленное время, но встреча не состоялась. Найти вероятность того, что Оле не пришлось ждать Колю. Найти вероятность, что встреча состоялась, но при этом Коле пришлось ждать Олю не больше четверти часа.

**Задача.** Значения  $k$  и  $b$  равновозможны в квадрате  $|k| \leq 2$ ,  $|b| \leq 2$ . Найти вероятность, что абсцисса точки пересечения прямой  $y = kx + b$  с осью

*Ox* больше 1?

**Задача.** Значения  $b$  и  $c$  равновозможны в квадрате  $|b| \leq 1$ ,  $|c| \leq 1$ . Найти вероятность, что квадратный трёхчлен  $x^2 + 2bx + c$  не имеет корней. Найти вероятность того, что корни квадратного трёхчлена  $x^2 + 2bx + c$  неположительны.

В заключение отметим, что накопленный опыт преподавания элементов теории вероятностей, комбинаторики свидетельствует о доступности этого материала и интересе, который он вызывает у школьников.

## Литература

- [1] Бунимович Е. А. Вероятно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики // Математика в школе, 2002. № 4. – С. 52–58.
- [2] Бунимович Е. А., Булычев В. А. Вероятность и статистика. 5–9 кл.: Пособие для общеобразоват. учеб. заведений. – М.: Дрофа, 2002. – 160 с.

УДК 517.9

## ИНТЕГРАЦИОННЫЙ АСПЕКТ ФОРМИРОВАНИЯ ТЕРМИНОСИСТЕМЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ

Гарминович Н. А., Логинов А. В.

Мичуринский государственный аграрный университет

Мичуринск

e-mail: krasaverenei@mail.ru

**Garminovich N. A., Loginov A. V. Integration aspect of formation of the terminosystem in training algebra.** The article demonstrates the integration ties between the disciplines of the natural science and humanities cycles in the study of the concept of isomorphism in the course “Algebra”, conducted for students of mathematics at the Pedagogical Institute. Interdisciplinary synthesis serves as an organizational form of the formation and development of terminological literacy.

**Keywords:** Isomorphism, system, field, algebraic structure, interrogative sentence, integration, methodical method.

В статье демонстрируются интеграционные связи дисциплин естественно-научного и гуманитарного циклов при изучении понятия изоморфизм в курсе “Алгебра”, проводимого для студентов-математиков педагогического института. Межпредметный синтез служит организационной формой формирования и развития терминологической грамотности.

**Ключевые слова:** Изоморфизм, система, поле, алгебраическая структура, вопросительное предложение, интеграция, методический прием.

Современная научная терминология обусловлена тесными интеграционными связями не только смежных отраслей науки, но и дисциплин, лежащих в разных сферах применения. Различия, проявляющиеся между естественно-научным и гуманитарным направлением, оказываются не такими явными, если мы обратимся к рассмотрению терминологической системы. Употребление одних и тех же терминов и понятий в обширной сфере человеческой деятельности

определяется принципом антропоцентризма: в центре миропонимания стоит человек, и все явления трактуются через призму его восприятия. Отсюда и стремление представить всеобщую научную систему универсальной, что проявляется и в употреблении одних и тех же научных терминов в различных дисциплинах. Имея конкретную область применения (будь то математика, психология или лингвистика), они “обрастают” нюансами, но базовое понимание остается общим для всех. И это является тем аспектом, который способствует формированию не только математической или лингвистической грамотности, но и философского мировоззрения в целом.

Мы хотели бы показать, как, с одной стороны, нематематическое понимание термина “работает” на формирование математической грамотности у студентов, владение терминологией, а с другой, продемонстрировать методический приём в преподавании математических (и не только) дисциплин.

В педагогическом институте студенты-математики овладевают терминологией, которую используют не только математические науки. Таковыми являются понятия “система”, “структура”, “поле”, “изоморфизм”. О понятии “поле” в математике и языке мы писали в нашей статье [6, с. 150–156]. Хотелось бы рассмотреть подобным образом понимание и соотношение термина “изоморфизм”.

Как показывают наблюдения, в разных науках базовое понимание совпадает, а различие обусловлено особенностями организации той или иной системы – математической или языковой.

Изоморфизм (от древнегреч. ἴσος – “равный, одинаковый, подобный” и μορφή – “форма”) понимается как “соответствие между объектами, выражающее тождество их форм или структур (iso-morphism)” [9, с. 11].

То, что понятие изоморфизма действительно выражает одинаковость всех рассматриваемых свойств множеств, можно сформулировать в виде следующего положения: если множества  $M$  и  $M'$  изоморфны относительно некоторой системы отношений  $S$ , то любое свойство множества  $M$ , сформулированное в терминах отношений системы  $S$  (и, значит, и отношений, определяемых через отношения системы  $S$ ), переносится на множество  $M'$ , и обратно.

В математике под изоморфизмом понимают очень общее понятие, которое определяется по-разному в различных разделах этой дисциплины. Это понятие можно следующим образом: между элементами некоторых систем существует взаимное однозначное соответствие – биекция (т. е. каждому элементу одной системы соответствует один-единственный элемент другой системы и, наоборот), при этом структура связей между элементами двух систем одинакова. Исторически строго математическое понятие изоморфизма появилось в алгебре, что ознаменовало рождение абстрактной алгебры [4, с. 232].

Объекты, между которыми существует изоморфизм, являются в определённом смысле “одинаково устроенными” и называются изоморфными.

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  – поля. Поле  $F_1$  называется изоморфным полю  $F_2$ , если существует взаимно однозначное отображение  $f : F_1 \rightarrow F_2$ , при котором сумме и произведению любых элементов  $F_1$  соответствуют сумма и произведение соответствующих элементов  $F_2$ , т. е. для любых  $a, b$  из  $F_1$  выполняется:

1.  $f(a) + f(b) = f(a + b)$ ,
2.  $f(a) \cdot f(b) = f(a \cdot b)$ .

Изоморфизм всегда задаёт отношение эквивалентности на классе любых



структур.

**Пример.** Поставим в соответствие комплексному числу  $(a + bi)$  матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен нулю, если все её элементы равны нулю.  $f(0) = f(0 + 0 \cdot i) = \mathbb{O}$ , где  $\mathbb{O}$  – нулевая матрица, определитель которой равен нулю.

Множество таких матриц замкнуто относительно операций сложения и умножения матриц, содержит нулевую и единичную матрицы, а также вместе с каждой матрицей  $A$  матрицу  $-A$  и вместе с каждой ненулевой матрицей обратную к ней матрицу. Это значит, что множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , с операциями сложения и умножения матриц образует поле. Обозначим его  $M_2^{(a,b)}$ . Поле комплексных чисел изоморфно полю матриц  $M_2^{(a,b)}$ .

Любое  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $R$  изоморфно пространству  $\mathbb{R}_n$ . Изоморфными можно считать решение систем линейных уравнений с 2 или 3 неизвестными и уравнения на плоскости, взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве. Поэтому методически удобно при изучении векторных пространств обращаться к наглядным геометрическим примерам – координатной плоскости  $\mathbb{R}_2$  и пространству  $\mathbb{R}_3$  [5, с. 172–175].

Нарушение соответствия с отношением одного к одному (1:1) между элементами двух и более комплексов либо алгебр и между их суммами или произведениями эквивалентных элементов другого ряда приводит к нарушению принципа изоморфизма. Например, если взаимно однозначное соответствие  $R \iff R$ , устанавливается формулой  $b = a^3$ , ( $a = \sqrt[3]{b}$ ), то  $(2a)^3 = 8a^3 = 8b$ . Значит  $2a \iff 8b$ , что противоречит условию  $\lambda a \iff \lambda b$  для  $\lambda = 2$ . Данное соответствие не является изоморфизмом, потому что не сохраняет операции.

Рассмотрим понимание изоморфизма в языке. Понятие “изоморфизм”, введенное в теорию русского языкознания Ф. И. Буслаевым, является одним из системообразующих факторов: изоморфизм связывает языковые единицы по вертикали, что служит базовой основой для создания функционально-семантических полей, образуемых единицами разных уровней языковой системы.

Представим реализацию принципа изоморфизма на примере организации вопросительного высказывания. Чтобы “получилась” синтаксическая единица, мы используем единицы различных языковых уровней.

На фонетическом уровне средством создания вопросительности является интонация, чьи смыслообразительные возможности “наиболее ярко проявляются при сравнении высказываний с одинаковым синтаксическим строением и лексическим составом или высказываний с разным синтаксическим строением, но с одинаковым звуковым составом словоформ” [8, с. 97]. Именно интонация позволяет в коммуникативной ситуации отличить один тип высказывания от другого.

На морфологическом уровне вопросительное значение выражено различными классами слов, как знаменательными, так и служебными.

Во-первых, вопросительными местоимениями, которые “предполагают существование объекта с некоторыми свойствами и сигнализируют о том, что

говорящий, не будучи в состоянии идентифицировать или охарактеризовать искомым объект, побуждает адресата помочь ему в этом” [7, с. 11].

Вопросительное местоименное слово является основным компонентом структурной схемы вопросительного предложения, точнее, коммуникативного типа, определяющего его информативное содержание.

По мнению Л. Ф. Бердник, вопросительное значение местоименных слов “заложено в самой форме и не обусловлено контекстом, поэтому оно обнаруживается в самом широком и разнообразном контексте; и в минимальном, и без него. Основное значение вопросительной формы не только функционирует в речи, но и входит в язык как систему” [1, с. 30].

Во-вторых, вопросительными частицами, без которых практически не обходится ни одна вопросительная ситуация. Их вопросительная сила такова, что, не имея самостоятельного лексического и грамматического значения, в сочетании с особой вопросительной ритмомелодикой они способны организовывать самостоятельные коммуникативно-достаточные высказывания.

В-третьих, глаголами с семантикой “запрос информации”, которые являются одними из самых востребованных лексем при оформлении коммуникативного акта. Вопросительность глаголов речи неоднородна по степени своей выраженности и представляет собой понятие высшего уровня обобщения.

Фонетические и морфологические единицы участвуют в организации основной коммуникативной единицы – предложения.

В следующем примере мы обнаруживаем вопросительные средства всех трёх разновидностей:

*Глебов спросил: (1)*

*– За что? (2)*

*– Как за что? (3) (Ю. Трифонов. Дом на набережной).*

Не вызывает сомнения, что в данном текстовом фрагменте функционируют вопросительные предложения (2, 3), а предложение (1), неся в своей структуре глагол-сказуемое с вопросительной семантикой, выступает маркером всей коммуникативной ситуации.

Однако функциональная направленность вопросительного высказывания выходит за пределы запроса информации и охватывает опосредованные реляционные представления: побуждение, выражение реакции и т. д.

Выражение ВП невопросительных значений по своей сути является нарушением принципа изоморфизма: функционально-семантическая направленность не соответствует формальному выражению.

Это обусловлено конкретной коммуникативной ситуацией, которая учитывает прагматические составляющие речевого акта и собственно языковые возможности адресанта.

Особенностью русской речи является то, что “цель высказывания не определяет тип предложения, используемого для этой цели” [2, с. 258], а правила отбора языковых средств и построения речевых единиц в разных типовых ситуациях общения с разной коммуникативной интенцией обусловлены коммуникативно-прагматическими нормами абстракции. Они присутствуют в сознании коммуникантов имплицитно и обнаруживаются, как правило, в ситуациях их нарушения.

Изменение функциональной направленности высказывания может быть

различным. В одном случае затрагивается структурно-семантическая организация предложения: при некоторых условиях предложение, оформленное как вопросительное, становится эмоциональным откликом на то или иное положение дел, т. е. собственно восклицательным:

– Ты этого Данилу раньше видела? – спросила барыня Пелагею.

– **Где мне его видеть?** Первый раз сегодня вижу, Аксинья откуда-то привела ... Черта окаянного. **И откуда он взялся на мою голову!** (А. П. Чехов. *Кухарка женится*).

Местоимения *где* и *откуда* “теряют” свое вопросительное значение, так как ситуация речи определяет переход высказываний, в которых они употребляются, из разряда вопросов в разряд ответов: первое из них синонимично высказыванию с отрицанием: *Нет, не видела*, а второе выступает как эмоциональная реакция.

Чаще изменение происходит в плане содержания, а вопросительная структура предложения сохраняется, приобретая “не свойственное ей значение утверждения, т. е. значение, присущее повествовательному предложению” [3, с. 94]:

– *Откуда вы знаете, как меня зовут?*

– *Помилуйте, Иван Николаевич, кто же вас не знает?* – здесь иностранец вытащил из кармана вчерашний номер «Литературной газеты», и Иван Николаевич увидел на первой странице свое изображение, а под ним свои собственные стихи (М. А. Булгаков. *Мастер и Маргарита*, 1, 1).

Риторический вопрос служит типичным примером расхождения содержания высказывания и интенции адресанта. Адресат может воспринимать высказывание как запрос и реагировать на него в форме ответа. Однако по замыслу говорящего в его фразе не мыслится никакой запрос, а сообщается определенное мнение позитивного характера.

Подытоживая, подчеркнем, что наша задача состояла не в том, чтобы дать развернутое и глубокое рассмотрение принципа изоморфизма, а в том, чтобы продемонстрировать студентам интеграционные связи различных дисциплин, а также сформировать у них представление о том или ином термине, в частности, и развить терминологическую грамотность, в общем.

## Литература

- [1] Бердник Л. Ф. Коммуникативные типы русских предложений. – Пермь, 1982. – 79 с.
- [2] Булыгина Т. В., Шмелев А. Д. Языковая концептуализация мира. – М., 1997. – 575 с.
- [3] Валимова Г. В. Функциональные типы вопросительных предложений в современном русском языке. – Ростов на Дону, 1967. – 331 с.
- [4] Вечтомов Е. М. Философия математики. – Киров: Радуга–ПРЕСС, 2013. – 316 с.
- [5] Гарминович Н. А. О применении кейс-метода в преподавании математики // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2008. Материалы научной кон-

- ференции, 14–19 апреля 2008. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2008. – С. 172–175.
- [6] Гарминович Н. А., Логинов А. В. Бинарная лекция в курсе “НОШКМ” как реализация междисциплинарных связей // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2016. Материалы LXIX международной научно-практической конференции, 11–15 апреля 2016 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. – С. 150–156.
- [7] Крылов С. А. О семантике местоименных слов и выражений // Русские местоимения: семантика и грамматика. – Владимир, 1989. – С. 5–12.
- [8] Русская грамматика. – Т. 1. – М.: Наука, 1980.
- [9] Свентицкий А. Л. Краткий психологический словарь. – М.: Проспект, 2015. – 512 с.

## НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА, ВПИСАННОГО В ДАННЫЙ

Кузнецова М. С., Рукшин С. Е.  
Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена  
Санкт-Петербург  
e-mail: vliuser@gmail.com

**Kuznetsova M. S., Rukshin S. E. Several theorems on the triangle inscribed in another triangle.** We prove several inequalities and identities concerning the area and the radii of the inscribed circle of the triangle inscribed into another triangle.

Мы докажем некоторые неравенства и тождества, связанные с площадью и радиусом вписанной окружности треугольника, вписанного в данный треугольник.

В этой статье мы рассмотрим несколько теорем о треугольниках, вписанных в данный.

В качестве параметров исходного треугольника зафиксируем  $p$  – полупериметр и  $R, r$  – радиусы описанной и вписанной окружностей, которые, как мы покажем позже, однозначно задают треугольник.

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:  $a, b, c$  – стороны треугольника  $ABC$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  – его углы,  $S$  – его площадь.

Кроме тривиального случая, когда вписанный треугольник  $DEF$  срединный (точки  $D, E$  и  $F$  – середины  $AB, BC, CA$  соответственно), мы рассмотрим следующие ситуации:

(1)  $\triangle DEF$  – ортоцентрический:  $D, E, F$  – основания высот, опущенных на стороны  $AB, BC, CA$ .

(2)  $\triangle DEF$  – тангенциальный треугольник: стороны  $DE, EF$  и  $DF$  являются касательными к окружности, описанной около исходного треугольника.

(3)  $\triangle DEF$  – правильный треугольник, вписанный в данный так, что точки  $D, E, F$  находятся на сторонах  $AB, BC, CA$ .

Сначала выведем тождества, симметрические относительно косинусов углов треугольника, и формулы суммы синусов двойных углов и суммы квадратов сторон треугольника.

**Симметрические тождества для элементов треугольника.** Прежде всего мы запишем равенство, выражающее зависимость функций углов треугольника и параметров  $R, p, r$ , преобразуем его, заменяя тригонометрические функции на  $\cos \alpha$ , и придём к кубическому уравнению относительно косинусов углов треугольника. Далее убедимся, что корни этого уравнения однозначно соответствуют значениям косинусов – для этого рассмотрим отдельно случаи равнобедренного и правильного треугольника. Применяв теорему Виета к кубическому уравнению, получим основные симметрические тождества для косинусов углов треугольника.

Нетрудно проверить справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} a &= 2R \sin \alpha \\ p - a &= r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Складывая почленно, получаем  $2R \sin \alpha + r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = p$ . Подставим  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$ , где  $\alpha \in (0; \pi)$ . Равенство  $p = 2R \sin \alpha + r \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$  возведём в квадрат и преобразуем:

$$\begin{aligned} p^2 &= 4r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cdot \left( \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)^2 + 2 \cdot 2R \sin \alpha \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \\ &= 4R^2(1 - \cos^2 \alpha) + r^2 \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} + 4Rr \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \\ &= 4R^2 - 4R^2 \cos^2 \alpha + r^2(1 + \cos \alpha) \cdot \frac{1}{1 - \cos \alpha} + 4Rr(1 + \cos \alpha), \end{aligned}$$

умножим на  $1 - \cos \alpha$ , сгруппируем по степеням  $\cos \alpha$ , обозначим  $\cos \alpha = x$  и запишем кубическое уравнение:

$$4R^2 x^3 - (4R^2 + 4Rr)x^2 + (p^2 - 4R^2 + r^2)x - (p^2 - 4R^2 - r^2 - 4Rr) = 0. \quad (*)$$

Из рассуждений выше следует, что косинусы углов треугольника являются корнями этого уравнения. Тогда, если треугольник разносторонний, можно, пользуясь теоремой Виета, записать следующие тождества:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 1 + \frac{r}{R}, \\ \cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma \cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma &= \frac{p^2 - 4R^2 + r^2}{4R^2}, \\ \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \frac{p^2 - 4R^2 - r^2 - 4Rr}{4R^2}, \end{aligned}$$

Предположим, треугольник с радиусом описанной окружности  $R$ , вписанной  $r$  и полупериметром  $p$ , – равнобедренный с углами  $\alpha, \alpha, \beta$ . Тогда

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \quad r = \frac{b\sqrt{2a - b}}{\sqrt{2a + b}},$$

где  $a$  – боковая сторона,  $b$  – основание. Утверждается, что в этом случае корни уравнения (\*) –  $\cos \alpha$ ,  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$ .

Действительно,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  – корни, пусть третий корень равен  $t$ . По теореме Виета

$$\cos \alpha + \cos \beta + t = 1 + \frac{r}{R}.$$

Заметим, что  $\cos \alpha = \frac{b}{2a}$ ,  $\cos \beta = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + 1$ , тогда

$$t = 1 + \frac{b\sqrt{2a-b}}{\sqrt{2a+b}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{2a-b}\sqrt{2a+b}} - \frac{b}{2a} + 2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - 1 = \frac{b}{2a} = \cos \alpha.$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что если треугольник равно-сторонний с радиусами  $R, r$  и полупериметром  $p$ , то  $\cos 60^\circ$  – корень уравнения (\*) кратности три.

Имея основные симметрические тождества, мы, согласно известной теореме алгебры, можем записать равенство, в котором в левой части стоит произвольный симметрический многочлен от косинусов углов треугольника, а в правой – выражение, зависящее только от  $R, p, r$ . Мы так же можем получать тождества, симметрические относительно других троек элементов треугольника. Для демонстрации этого принципа докажем следствия:

**Следствие 1.**  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{1}{2R^2} (6R^2 + r^2 - p^2 + 4Rr).$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 - \\ &- 2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma \cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma) = 1 + \frac{2r}{R} + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2p^2 + r^2}{4R^2} + 2 = \\ &= \frac{2R^2 + 4Rr + 2r^2 - p^2 - r^2 + 4R^2}{2R^2} = \frac{1}{2R^2} (6R^2 + r^2 - p^2 + 4Rr). \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Используя равенство  $2R \sin \alpha + r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = p$  и проводя аналогичные рассуждения, можем получить тождества для синусов углов:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \frac{p}{R}, \\ \sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma &= \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}, \\ \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &= \frac{pr}{2R^2}. \end{aligned}$$

**Следствие 2.**  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$  и  $abc = 4Rpr$ .

*Доказательство:* Согласно теореме синусов  $a = 2R \sin \alpha$ . Используем тождества, приведенные в замечании 1:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = p, \\ ab + bc + ca &= 4R^2(\sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma) = p^2 + r^2 + 4Rr, \\ abc &= 8R^3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 4Rpr. \end{aligned}$$

Тогда  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$

**Следствие 3.**  $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \frac{2pr}{R^2}$ .

*Доказательство:* Учитывая, что  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  и тождества для синусов, имеем

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(360^\circ - (2\alpha + 2\beta)) = \\ &= 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = \\ &= 2 \sin(\alpha + \beta) (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = 2 \sin \gamma \cdot 2 \sin \alpha \sin \beta = \frac{2pr}{R^2}. \end{aligned}$$

Рассуждение, приводящее к тождествам для косинусов углов, и кубическое уравнение (\*) позволяют доказать важную теорему.

**Теорема 1.** Если  $R, r, p$  одного треугольника равны радиусу описанной, вписанной окружностей и полупериметру другого треугольника, то такие треугольники равны.

*Доказательство:* Пусть задан треугольник  $ABC$  с параметрами  $R, p, r$ . Рассмотрим другой треугольник с такими параметрами. Решение уравнения (\*) даёт нам косинусы углов треугольника, а значит, и сами углы. Равенство  $a = 2R \sin \alpha$  определяет сторону треугольника, так же определяются две другие стороны, т. е. треугольник равен  $\triangle ABC$ .

**Площади тангенциального и ортотреугольника.** Очевидно, что площадь серединного треугольника выражается формулой:

$$S_m = \frac{1}{4}pr,$$

так как отрезки  $DE, FE, FD$  разбивают треугольник  $ABC$  на четыре равных треугольника.

**Теорема 2.** Площадь ортоцентрического треугольника:

$$S_0 = \frac{pr}{2R^2} (p^2 - (2R + r)^2).$$

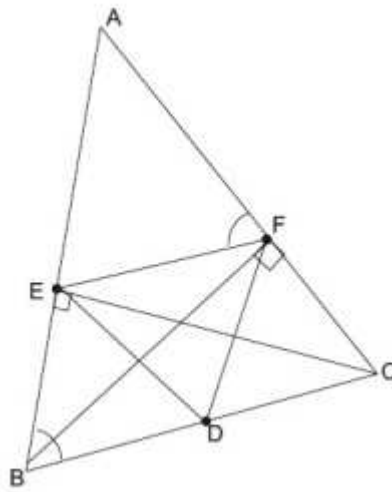


Рис. 1.  $DEF$  – ортоцентрический

*Доказательство:* Чтобы найти площадь ортотреугольника, из площади  $\triangle ABC$  вычтем площадь треугольников, отсекаемых ортотреугольником:  $S_{DEF} = S - (S_a + S_b + S_c)$ , где  $S_a, S_b$  и  $S_c$  – площади треугольников  $F EA$ ,  $F DC$ ,  $E DC$ . Так как  $\triangle EFA \sim \triangle ABC$ , с коэффициентом подобия  $\cos \alpha$ , имеем  $S_a = S \cos^2 \alpha$ , и аналогичные равенства для  $S_b$  и  $S_c$ .

$$S_{DEF} = S - S \cos^2 \alpha - S \cos^2 \beta - S \cos^2 \gamma = pr(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma).$$

Тогда, используя полученные тождества для косинусов,

$$S_{DEF} = \frac{pr}{2R^2} (p^2 - (2R + r)^2).$$

Чтобы найти площадь тангенциального треугольника, нам потребуются вспомогательные утверждения, связанные с ортотреугольником.

**Лемма 1.** Радиус окружности, вписанной в ортотреугольник:

$$r_0 = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{2R}.$$

*Доказательство:* Так как  $\triangle DEB \sim \triangle ABC$  с коэффициентом подобия  $\cos \beta$ , применив следствие 3 (о сумме синусов двойных углов), можем найти полупериметр ортоцентрического треугольника:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{2} (a_0 + b_0 + c_0) = \frac{1}{2} (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} (2R \sin \alpha \cos \alpha + 2R \sin \beta \cos \beta + 2R \sin \gamma \cos \gamma) = \\ &= \frac{R}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = \frac{R}{2} \cdot \frac{2pr}{R^2} = \frac{pr}{R}. \end{aligned}$$

Найдём  $r_0$  из равенства  $r_0 = \frac{S_0}{p_0}$ . Имеем

$$r_0 = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{2R}.$$

**Теорема 3.** Площадь тангенциального треугольника:

$$S_t = \frac{2pR^2r}{p^2 - (2R + r)^2}.$$

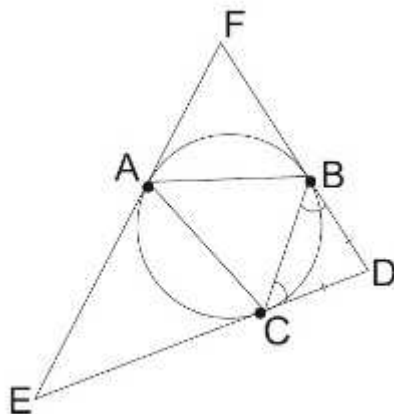


Рис. 2.  $DEF$  – тангенциальный



*Доказательство:* Пусть окружность, описанная около  $ABC$  касается сторон  $DF$ ,  $FC$  и  $ED$  в точках  $B, A, C$  соответственно. Радиус окружности, вписанной в тангенциальный треугольник  $r_t = R$ . Далее, заметим, что  $\angle DBC = \angle DCB = \angle BAC = \alpha$ , тогда  $\angle FDE = 180^\circ - 2\alpha$ , аналогично,  $\angle DEF = 180^\circ - 2\beta$  и  $\angle EFD = 180^\circ - 2\gamma$ , т. е. тангенциальный треугольник подобен ортотреугольнику по двум углам. Найдём коэффициент подобия, как отношение радиусов вписанных окружностей:

$$k = \frac{r_t}{r_0} = \frac{2R^2}{p^2 - (2R + r)^2}.$$

Отношение площадей ортоцентрического и тангенциального равно  $k^2$ , откуда

$$S_t = k^2 S_0 = \frac{4R^4}{(p^2 - (2R + r)^2)^2} \cdot \frac{pr((p^2 - (2R + r)^2))}{2R^2} = \frac{2pR^2r}{p^2 - (2R + r)^2}.$$

**Замечание 2.** В качестве следствия теорем 1 и 2 получаем известный факт: площадь данного треугольника является средним пропорциональным между площадями ортоцентрического и тангенциального треугольника  $S^2 = S_t S_0$ .

### Площадь наименьшего правильного треугольника.

**Теорема 4.** Площадь правильного треугольника  $DEF$ , вписанного в данный, удовлетворяет неравенству:

$$S_{DEF} \geq \frac{p^2 r^2 \sqrt{3}}{p^2 - r^2 - 4Rr + 2pr\sqrt{3}}.$$

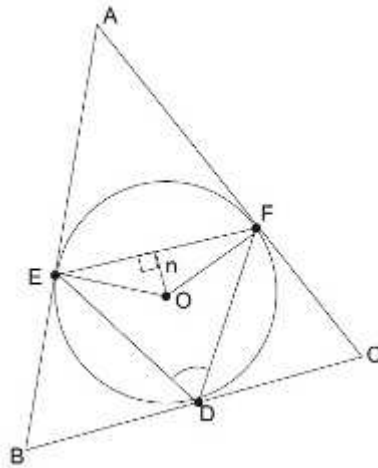


Рис. 3.  $DEF$  – правильный треугольник

*Доказательство:* Пусть  $\triangle DEF$  – правильный вписанный треугольник. Обозначим длину его стороны  $d$ , отрезок  $BD = x$ , угол  $BED = \varphi$ , остальные обозначения оставим прежними. Тогда  $DC = a - x$ ,  $\angle AEF = 120^\circ - \varphi$ , а угол  $\angle CFD = 60^\circ + \alpha - \varphi$ .

Применим теорему синусов к треугольникам  $FBD$  и  $DCE$ :

$$\frac{d}{\sin \beta} = \frac{x}{\sin \varphi}; \quad \frac{d}{\sin \gamma} = \frac{a - x}{\sin(60^\circ + \alpha - \varphi)}.$$

Исключив  $d$ , получим равенство:

$$\frac{x \sin(60^\circ + \alpha - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{(a - x) \sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Применив формулу синуса разности углов к выражению  $\sin((60^\circ + \alpha) - \varphi)$  и разделив почленно на  $\sin \varphi$ , получаем

$$x(\sin(60^\circ + \alpha) \operatorname{ctg} \varphi - \cos(60^\circ + \alpha)) = \frac{(a - x) \sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Выразим  $\operatorname{ctg} \varphi$  из последнего равенства:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{(a - x) \sin \gamma}{x \sin \beta \sin(60^\circ + \alpha)} + \operatorname{ctg}(60^\circ + \alpha).$$

Сторона правильного треугольника  $d = \frac{x \sin \beta}{\sin \varphi}$ , т. е.

$$d^2 = \frac{x^2 \sin^2 \beta}{\sin^2 \varphi} = x^2 \sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi).$$

Подставив значение  $\operatorname{ctg} \varphi$  и заменив  $1 + \operatorname{ctg}^2(60^\circ + \alpha)$  на дробь  $\frac{1}{\sin^2(60^\circ + \alpha)}$ , получим

$$\frac{d^2}{x^2 \sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2(60^\circ + \alpha)} + \frac{(a - x)^2 \sin^2 \gamma}{x^2 \sin^2 \beta \sin^2(60^\circ + \alpha)} + \frac{2(a - x) \sin \gamma \cos(60^\circ + \alpha)}{x \sin \beta \sin^2(60^\circ + \alpha)}.$$

После умножения на  $x^2 \sin^2 \beta$  и приведения к общему знаменателю  $\sin^2(60^\circ + \alpha)$  имеем:

$$d^2 = \frac{x^2 \sin^2 \beta + (a - x)^2 \sin^2 \gamma + 2x(a - x) \sin \beta \sin \gamma \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin^2(60^\circ + \alpha)}.$$

Раскроем скобки и сгруппируем по степеням  $x$ . Получим, что коэффициенты при  $x^2$ ,  $x$  соответственно равны

$$\frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin^2(60^\circ + \alpha)}, \quad \frac{2a(\sin^2 \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos(60^\circ + \alpha))}{\sin^2(60^\circ + \alpha)},$$

а свободный член равен  $\frac{a^2 \sin^2 \gamma}{\sin^2(60^\circ + \alpha)}$ .

При этом нетрудно заметить, что старший коэффициент положителен, так как числитель является суммой положительных слагаемых, а именно

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(60^\circ + \alpha) &= \\ &= (\sin \beta - \sin \gamma)^2 + 2 \sin \beta \sin \gamma (1 - \cos(60^\circ + \alpha)) = \\ &= (\sin \beta - \sin \gamma)^2 + 4 \sin \beta \sin \gamma \sin^2(30^\circ + \alpha/2). \end{aligned}$$

Значит, квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение

$$d^2 \geq \frac{a^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(60^\circ + \alpha)}.$$

По теореме синусов для данного треугольника  $ABC$ :  $a = 2R \sin \alpha$ , т. е.

$$d^2 \geq \frac{4R^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(60^\circ + \alpha)}.$$

Пользуясь тождествами для синусов, заменяем произведение  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{pr}{2R^2}$ ,

$$d^2 \geq \frac{p^2 r^2}{R^2 (\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(60^\circ + \alpha))}.$$

Преобразуем знаменатель, используя тождества, симметрические относительно сторон треугольника.

$$\begin{aligned} R^2 (\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(60^\circ + \alpha)) &= \\ &= R^2 \frac{b^2}{4R^2} + R^2 \frac{c^2}{4R^2} - 2R^2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \left( \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - bc(\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha)) = \frac{1}{4} \left( b^2 + c^2 - bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + bc \cdot \sqrt{3} \frac{a}{2R} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2} + \frac{4Rpr\sqrt{3}}{2R} \right) = \frac{1}{4} (p^2 - r^2 - 4Rr + 2pr\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Тогда сторона правильного треугольника:

$$d^2 \geq \frac{4p^2 r^2}{p^2 - r^2 - 4Rr + 2pr\sqrt{3}}.$$

Но так как площадь правильного треугольника  $S_{DEF} = \frac{d^2 \sqrt{3}}{4}$ , имеем:

$$S_{DEF} \geq \frac{p^2 r^2 \sqrt{3}}{p^2 - r^2 - 4Rr + 2pr\sqrt{3}}.$$

**Сумма радиусов окружностей, вписанных в 4 треугольника.** Теми же методами удалось решить задачу о сумме радиусов окружностей, вписанных в четыре треугольника:  $DEF, AFE, BFD, CED$ .

Величины треугольника с вершиной  $A$  будем записывать с индексом  $a$ , при  $B$  – с индексом  $b$ , при  $C$  – с индексом  $c$ , для треугольника  $DEF$  зафиксируем индекс  $0$ . Выразим сумму  $r_a + r_b + r_c + r_0$  через  $p, R, r$ .

Очевидно, что если  $\triangle DEF$  – серединный, то  $r_a + r_b + r_c + r_0 = 2r$ .

Действительно, если точки  $D, E, F$  – середины сторон, то все четыре треугольника равны (по трём сторонам) и подобны исходному  $\triangle ABC$  с коэффициентом  $1/2$ . Потому

$$r_a + r_b + r_c + r_0 = 4 \cdot \frac{1}{2} r = 2r,$$

**Теорема 5.**  $D, E, F$  – основания высот, опущенных на стороны  $AB, BC, CA$ , тогда

$$r_a + r_b + r_c + r_0 = \frac{1}{2R} (p^2 + r^2 - 2Rr - 4R^2).$$

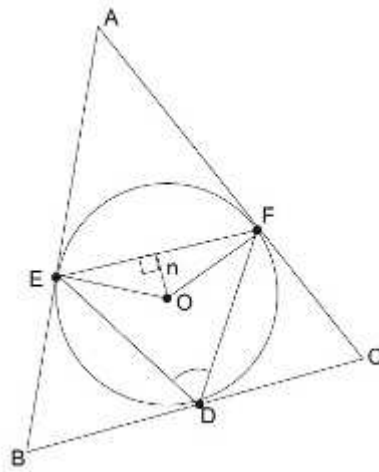


Рис. 4. Расстояния до сторон

*Доказательство:* Мы уже замечали, что  $\triangle DEB \sim \triangle ABC$  с коэффициентом подобия  $\cos \beta$ , но тогда  $r_b = r \cos \beta$ , аналогично для других треугольников. В сумме получаем:

$$r_a + r_b + r_c = r(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = \frac{r(R + r)}{R}.$$

Радиус окружности, вписанной в треугольник  $DEF$  (ортоцентрический треугольник), мы нашли в лемме 1. Остаётся сложить результаты  $r_a + r_b + r_c$  и  $r_0$ , чтобы получить требуемое.

Для решения задачи в случае, когда  $D, E, F$  – точки касания сторон  $\triangle ABC$  и вписанной окружности ( $\triangle ABC$  будет тангенциальным для  $\triangle DEF$ ), заметим, что радиус окружности, вписанной в любой из отсекаемых треугольников равен высоте сегмента, отсекаемого от описанной окружности треугольника  $DEF$  одной из его сторон. Высота сегмента выражается разностью радиуса описанной окружности  $\triangle DEF$  и расстоянием от центра окружности до соответствующей стороны. Сумма последних – симметрическое выражение, которое находится с помощью тождеств для косинусов углов.

**Теорема 6.**  $D, E, F$  – точки касания сторон  $\triangle ABC$  и вписанной окружности, тогда  $r_a + r_b + r_c + r_0 = 2r$ .

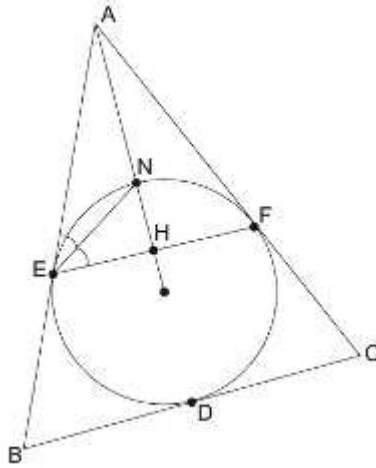


Рис. 5.  $D, E, F$  – точки касания

*Доказательство:* Рассмотрим окружность, описанную около  $\triangle DEF$  – она же вписанная в  $\triangle ABC$ . Найдём площадь треугольника, образованного вершинами  $D, F$  и центром окружности  $O$  двумя способами:

$$S_{DOF} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot OF \cdot \sin 2\angle DEF = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\angle DEF,$$

(или  $\frac{1}{2} r^2 \sin(2\pi - 2\angle DEF)$  – для тупого угла) с другой стороны, это половина произведения расстояния от центра окружности до стороны ( $n$ ) на длину стороны.

$$S_{DOF} = \frac{1}{2} \cdot n_{DF} = nr \sin \angle DEF.$$

Далее будем рассматривать случай остроугольного треугольника (остальные случаи аналогично).

Имеем  $r^2 \sin 2\angle DEF = nr \sin \angle DEF$ ,  $2r^2 \sin \angle DEF \cos \angle DEF = 2nr \sin \angle DEF$ , откуда  $\cos \angle DEF = \frac{n}{r}$ . Тогда

$$n_{DF} + n_{FE} + n_{ED} = r(\cos \angle DEF + \cos \angle EFD + \cos \angle FDE).$$

В скобках выражение, симметрическое относительно косинусов углов ортоцентрического треугольника, радиусом описанной около  $DEF$  окружности служит  $r$  – радиус вписанной в треугольник  $ABC$ ,  $r_0$  обозначаем радиус окружности, вписанной в  $DEF$ . Таким образом:

$$n_{DF} + n_{FE} + n_{ED} = r \left( 1 + \frac{r_0}{r} \right) = r + r_0.$$

Так как  $D, E, F$  – точки касания сторон  $\triangle ABC$  и вписанной окружности,  $\triangle BEF$  – равнобедренный, обозначим  $H$  середину  $FE$  и заметим,  $A, H$  и инцентр треугольника  $DEF$  лежат на одной прямой, на которой так же лежит середина дуги  $\widehat{FE}$  – обозначим её  $N$ .  $\angle NFE$  и  $\angle AFN$ , измеряются половинами соответствующих дуг, т. е.  $\angle NFE = \frac{1}{2} \widehat{NE} = \frac{1}{2} \widehat{FN} = \angle AFN$ , т. е. точка  $N$  лежит на биссектрисе угла  $AFE$ , аналогичными рассуждениями приходим к тому, что точка  $N$  на биссектрисе  $\angle AEF$ . Значит, середина дуги  $\widehat{FE}$  – центр

вписанной окружности  $\triangle FAE$ , тогда  $NH$  радиус вписанной в этот треугольник окружности. Тогда, применяя равенства вида  $NH = r - n_{FE}$ , получаем:

$$r_a + r_b + r_c + r_0 = 3r - (n_{DF} + n_{FE} + n_{ED}) + r_0 = 3r - r - r_0 + r_0 = 2r.$$

Интересно, что в двух случаях сумма радиусов равна  $2r$ . Можно показать, что в случае ортоцентрического треугольника сумма радиусов меньше  $2r$ , тогда и только тогда, когда треугольник  $ABC$  не является правильным. Предъявим конструкцию, когда сумма радиусов больше  $2r$ .

Опишем треугольник  $ABC$  и расположение точек  $D, E, F$ , при которых сумма радиусов вписанных окружностей равна высоте  $h$  треугольника  $ABC$ , т. е. больше удвоенного радиуса вписанной окружности  $\triangle ABC$ .

**Теорема 7.** Если треугольник  $ABC$  равнобедренный ( $AB = BC$ ),  $\angle B = 120^\circ$ ,  $BD \perp AC$  и  $DF \perp BC, DE \perp AB$ , то  $r_a + r_b + r_c + r_0 = h$ .

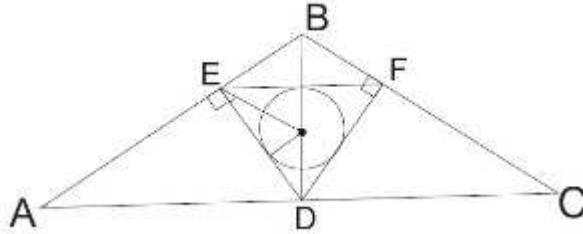


Рис. 6. Сумма радиусов равна высоте

*Доказательство:* Из прямоугольного треугольника  $ADE$  угол  $A = 30^\circ$ , учитывая, что  $AE = \sqrt{3}h$ ,  $h$  – высота треугольника  $ABC$ , получаем

$$r_a = r_c = \frac{1}{2}(AD + DE - AE) = \frac{AE}{4}(\sqrt{3} + 1 - 2) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}AE = \frac{h(3 - \sqrt{3})}{4}.$$

Далее, выражая отрезки через высоту  $h$ :

$$r_b = \frac{DF}{2} \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{h\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4}.$$

Наконец, радиус окружности, вписанной в треугольник  $DEF$ :

$$r_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}DE = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{h\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4}.$$

Получаем, что  $r_a + r_b + r_c + r_0 = h$ .

## МОДЕЛИ-ПОЛИАДЫ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Мельников Ю. Б.<sup>1</sup>, Мельникова Н. В.<sup>2</sup>

Уральский государственный экономический университет<sup>1</sup>

Уральский федеральный университет<sup>2</sup>

Екатеринбург

e-mail: UriiMelnikov58@gmail.com

**Melnikov Yu. B., Melnikova N. V. Models-polyads and their application to the teaching of mathematics.** We consider certain complex models describing the same features of the prototype in terms of different theories. We demonstrate examples of mathematical structures presented in the form of model-polyads and consider some of the issues of teaching mathematics using the model-polyads.

Рассматриваются определенные комплексы моделей, описывающих одни и те же особенности прототипа в терминах различных теорий. Приведены примеры математических структур, представленных в виде моделей-полиад и рассмотрены некоторые вопросы обучения математике с использованием моделей-полиад.

Обычно модель некоторого прототипа отождествляется с его образом (см. рис. 1а). По нашему мнению это неправомерно и нецелесообразно. Например, нельзя однозначно сказать, является ли уравнение  $y' = 2x - y$  моделью некоторого процесса, пока не описана интерпретация переменных  $x, y, y'$ , не обосновано выполнение равенства, пока нет способа интерпретации информации с языка, на котором представлен прототип на язык дифференциальных уравнений других формул и обратной интерпретации. Поэтому мы считаем, что модель должна включать в себя как образ, так и систему обмена информацией — интерфейс обмена информацией между прототипом и образом (см. рис. 1б).

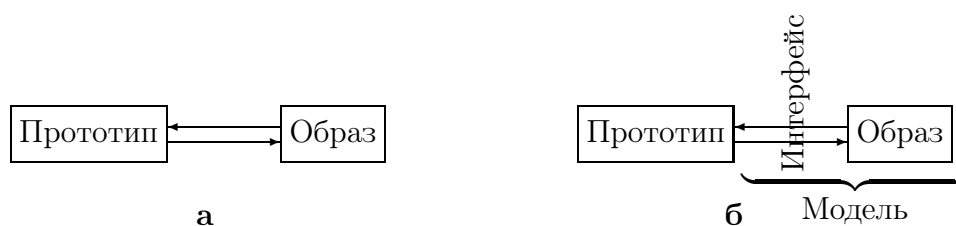


Рис. 1. Иллюстрация к понятию «модель».

Обычно объекты описываются системой моделей, многие из которых отражают различные аспекты прототипа. Деятельность промышленного предприятия описывается моделями экономическими, технологическими, логистическими, управленческими и другими. Но в данной работе мы рассмотрим ситуацию, когда несколько моделей описывают одни и те же особенности прототипа (см.

рис. 2а). В этом случае обычно между Образом<sub>1</sub> и Образом<sub>2</sub> формируется интерфейс для непосредственной передачи информации (см. рис. 2б), т. е., например, движение информации Образ<sub>1</sub> → Прототип и Прототип → Образ<sub>2</sub> «замыкается» на непосредственное преобразование Образ<sub>1</sub> → Образ<sub>2</sub>. В этом случае мы говорим о транзитивном моделировании Образа<sub>1</sub> средствами Образа<sub>2</sub>.

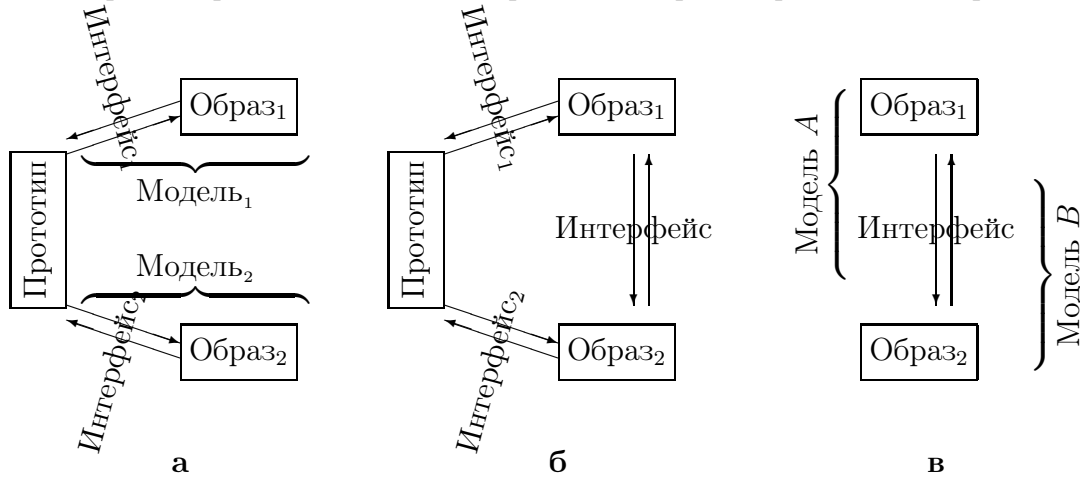


Рис. 2. Иллюстрация к понятию «модель-диада».

Например, рассмотрим две модели свободных векторов плоскости: координатную и векторно-символическую. В последней мы оперируем с выражениями  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$  и т. п. Рассмотрим утверждение  $\vec{r} = 2\vec{p} + \vec{q}$ , где  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  изображены на рис. 3а. Интерфейс перевода этого утверждения на «векторно-геометрический» язык включает в себя следующий план:

- 1) все три вектора отложить от некоторой точки  $O$ ;
- 2) направленный отрезок, полученный откладыванием вектора  $\vec{p}$  удлинить в два раза (оставив начало в точке  $O$ );
- 3) построить соответствующий параллелограмм;
- 4) убедиться, что направленный отрезок  $OR$ , полученный откладыванием  $\vec{r}$  от точки  $O$ , является диагональю этого параллелограмма.

Интерфейс преобразования полученной «картинки» в утверждение на «языке координат» приводит к следующему плану (см. рис. 3в):

- 1) ввести систему координат с центром в точке  $O$ ;
- 2) найти координаты точек  $P, Q, R$ ;
- 3) записать выражение для координат:  $2(3; -1) + (-2; 3) = (4; 1)$ .

Интерфейс, обеспечивающий непосредственный перевод утверждения  $\vec{r} = 2\vec{p} + \vec{q}$  на язык координат основан на замене в формуле  $2\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$  векторов на их разложения по базисным ортам (см. рис. 3г):

$$4\vec{i} + \vec{j} = 2(3\vec{i} - \vec{j}) + (-2\vec{i} + 3\vec{j}) = (2 \cdot 3 - 2)\vec{i} + (2 \cdot (-1) + 3)\vec{j},$$

откуда и получаем для первой координаты, сравнивая коэффициенты перед  $\vec{i}$  в левой и правой частях этого равенства, а для второй координаты сравнивая коэффициенты перед  $\vec{j}$  в левой и правой частях этого равенства, получаем

$$2(3; -1) + (-2; 3) = (4; 1).$$



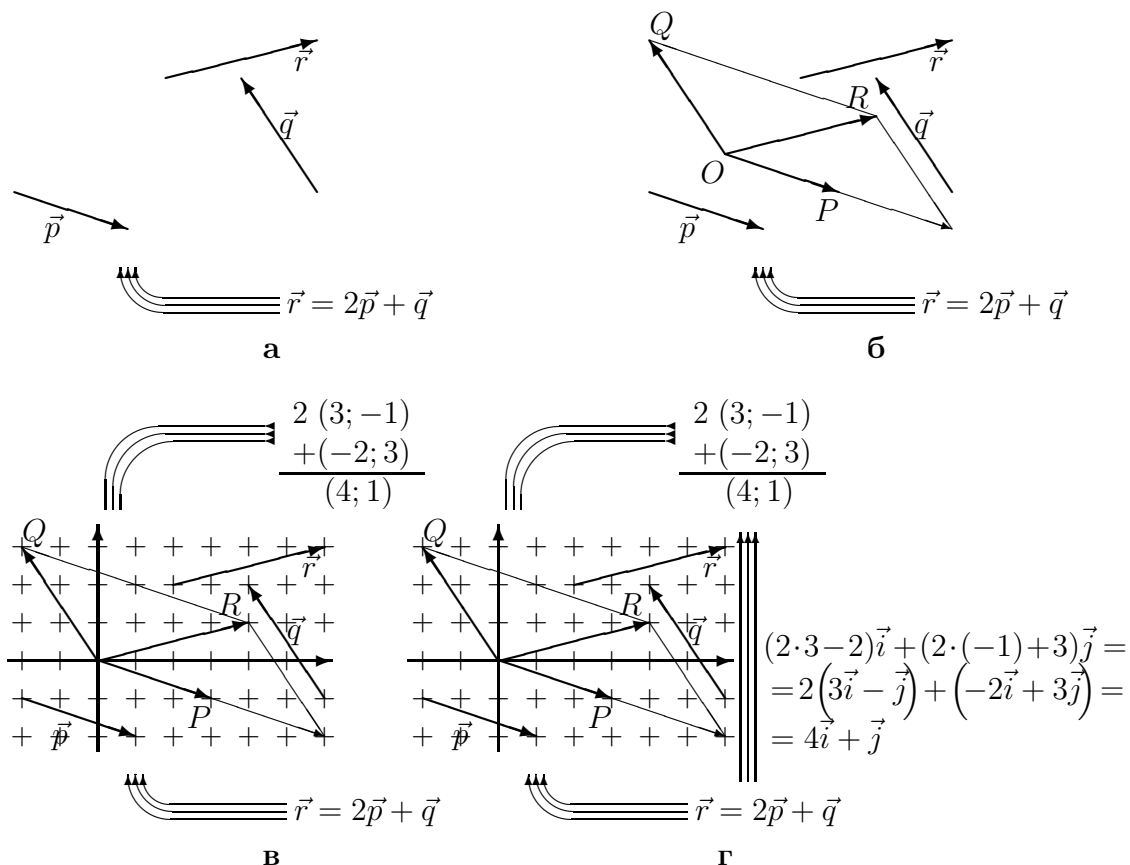


Рис. 3. Иллюстрация к понятию «транзитивное моделирование».

Возвращаясь к рис. 2 следует отметить, что в результате установления интерфейса между образами (см. рис. 2б), либо прототип исключается из рассмотрения, в результате чего возникает пара моделей «Модель А» и «Модель В» объединённых общим интерфейсом (см. рис. 2в), либо прототип и его образы рассматриваются как модели друг друга, т. е. возникает три модели:

$$\begin{array}{c}
 \text{Модель}_{01} \qquad \qquad \qquad \text{Модель}_{02} \\
 \underbrace{\text{Прототип} \quad \text{Интерфейс}_1 \quad \text{Образ}_1}_{\text{Модель}_{10}} \quad \underbrace{\text{Прототип} \quad \text{Интерфейс}_2 \quad \text{Образ}_2}_{\text{Модель}_{20}} \\
 \qquad \qquad \qquad \underbrace{\text{Образ}_1 \quad \text{Интерфейс} \quad \text{Образ}_2}_{\text{Модель}_{21}} \qquad \qquad \qquad (1)
 \end{array}$$

Эту систему из трех моделей мы называем **моделью-триадой** в случае, когда интерфейсы обеспечивают достаточно адекватный обмен информацией. Пару «пересекающихся» моделей (1) при достаточно адекватном интерфейсе мы называем **моделью-диадой**. В случае большего числа компонент мы говорим о модели-квададе и, в общем случае, о модели-полиаде.

Ясно, что ответ на вопрос, является ли, например, пара моделей (1) моделью-диадой определяется тем, как именно определены характеристики адекватности. Как показал анализ, обычно неадекватность обмена информацией можно трактовать как неверный выбор характеристики адекватности.

Например, алгебру комплексных чисел нередко рассматривают как модель-квадриаду. Её компонентами являются: 1) алгебра упорядоченных пар действительных чисел с покомпонентным сложением и умножением, заданным формулой  $(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$ ; 2) алгебра многочленов от переменной  $i$  (в радиоэлектронике – от переменной  $j$ ) с дополнительным определяющим соотношением  $i^2 = -1$ ; 3) алгебра комплексной плоскости с полярной системой координат и специфическим умножением векторов (модуль произведения есть произведение модулей, а аргумент<sup>1</sup> – суммой аргументов множителей); 4) алгебра матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

Явное представление объектов в виде моделей-полиад обладает следующими преимуществами. 1. Как показывает опыт, упрощается восприятие учебного материала студентами за счет его естественного структурирования. 2. Облегчается применение аппарата различных математических теорий в рамках одного исследования или решения задачи. 3. Упрощается обучение формализации информации за счет явного выделения типовых форм представления объектов в терминах математических теорий, модели которых входят в состав соответствующих моделей-полиад. 4. Представление математических объектов в виде моделей-полиад позволяет в рамках одного исследования использовать возможности и преимущества понятийного и аналитического аппаратов различных теорий. 5. Модели-полиады упрощают контроль адекватности моделей, поскольку каждый компонент модели-полиады может рассматриваться как и как оцениваемая, и как эталонная модель.

Изучение студентами математических конструкций, явно представленных в виде моделей-полиад, имеет ряд особенностей<sup>2</sup>. 1. Успешной оказалась практика обучения, основанная на первоначальном изучении компонент модели-полиады с последующим целенаправленным формированием умения использовать интерфейс между ними для передачи информации между компонентами модели-полиады. 2. Любой компонент  $A$  модели-полиады с интерфейсом обмена информацией с другим компонентом  $B$  модели-полиады можно рассматривать как модель объекта  $B$ . Поэтому изучение математических объектов, представленных в форме модели-полиады, представляет богатые возможности для обучения моделированию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-06-00240.

---

<sup>1</sup> Т. е. ориентированный угол между вектором и полярной осью.

<sup>2</sup> Мельников Ю. Б. Алгебра и теория чисел:

<http://lib.usue.ru/resource/free/12/MelnikovAlgebra4/index.html>

Мельников Ю. Б. Математический анализ:

<http://lib.usue.ru/resource/free/15/MelnikovAlgebra6/index.html>

## ОБУЧЕНИЕ ОСУЩЕСТВЛЕНИЮ ПРОЕКТНОЙ И ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ С ПОЗИЦИЙ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Мельников Ю. Б., Соловьянов В. Б., Ширпужев С. В.  
Уральский государственный экономический университет  
Екатеринбург  
e-mail: UriiMelnikov58@gmail.com

**Melnikov Yu. B., Solovyanov V. B., Shirpujev S. V. Training the project implementation and the research activity in the study of mathematics from the point of view of modeling theory.** We consider the features of the research and design activities, and the differences between them on the basis of the author modeling theory and of the adequacy theory.

Рассматриваются особенности исследовательской и проектной деятельности и различия между ними на основе авторской теории моделирования и теории адекватности.

Важность обучения исследовательской и проектной деятельности очевидна, проблемы, возникающие в связи с этим, активно обсуждаются в методической научно-методической литературе. Рассматриваются вопросы классификации и функций исследовательской и проектной деятельности [1, 2], разные аспекты обучения исследовательской и проектной деятельности [3]–[18]. В последнее время обучение исследовательской и проектной деятельности рассматривается с позиций компетентностного подхода [16].

Отметим, что четкое размежевание проектной и исследовательской деятельности оказывается нетривиальной задачей, тем более, что эти виды деятельности практически всегда сочетаются друг с другом. Это привело к появлению таких «гибридов» как «исследовательский проект» [19].

Рассмотрим две задачи «школьного уровня».

**Задача 1.** *Найти равнобедренный треугольник с основанием  $3\text{ м}$ , в который вписана окружность метрового радиуса.*

**Задача 2.** *Исследовать равнобедренные треугольники.*

Интуитивно ясно, что вторая задача является исследовательской. Видимо, большинство согласится с тем, что решение задачи 1 будет результатом деятельности проектного характера: надо «спроектировать», «создать» требуемый треугольник. Установим разницу между проектной и исследовательской деятельностью с помощью теории моделирования [20] и теории адекватности [21].

Оценка качества модели определяется сравнением образа (обычно отождествляемого с моделью, что, по нашему мнению, не вполне верно) с некоторой эталонной моделью (см. рис. 1).

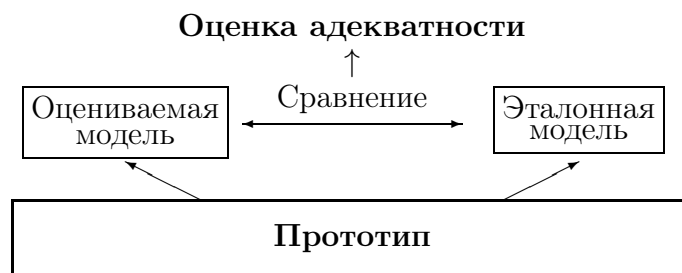


Рис. 1. Иллюстрация к понятию «адекватность модели».

Отметим несколько важных моментов, связанных с нашей трактовкой понятия «адекватность модели». Во-первых, здесь термин «эталонный» не имеет отношения к понятиям «хороший», «высококачественный» и т. п., это просто модель, взятая за образец для сравнения. Во-вторых, результатом сравнения является значение некоторой **характеристики адекватности**, т. е. функции, определенной на множестве упорядоченных пар

(оцениваемая модель; эталонная модель),

другие аксиомы приведены в [21]. В-третьих, эталонная модель почти никогда не совпадает с прототипом. Если эталонная модель и соответствующая характеристика адекватности отражает только форму представления результата, то эта характеристика называется **характеристикой корректности**. Например, такая ситуация складывается в случае, когда эталонная модель представлена грамматикой соответствующего языка, а характеристика адекватности предназначена для оценки соответствия *представления* оцениваемой модели соответствующим грамматическим правилам. В случае, когда эталонная модель и соответствующая характеристика адекватности предназначены для оценки отражения сущностных особенностей прототипа, характеристика адекватности называется характеристикой достоверности (см. рис. 2).

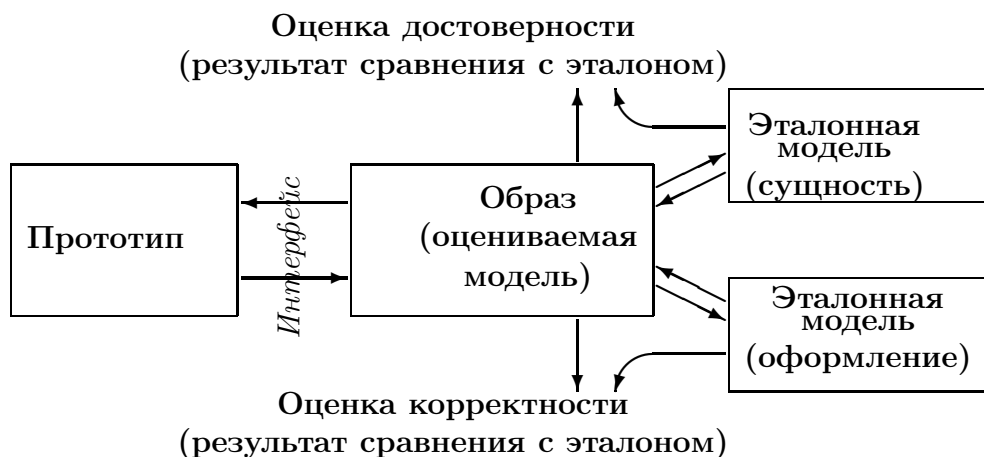


Рис. 2. Адекватность, корректность, достоверность.

В задаче 1 адекватность результата деятельности оценивается с помощью характеристик адекватности, с помощью которых оценивается отражение сущностных особенностей прототипа: характеристики объекта: длина основания и радиус вписанной окружности, наличие требуемого отношения: окружность касается всех сторон треугольника и др.

При оценивании адекватности результата деятельности по решению задачи 2 будет учитываться корректность формулировок полученных теорем и

определений, корректность доказательств (т. е. соблюдение правил проведения доказательств). Никакие требования сущностного характера (допустим, «вы должны были доказать, что длина боковой стороны в 3 раза больше радиуса») в задаче изначально не выдвигались.

Таким образом, главным отличием проектной деятельности от исследовательской является характер эталонных моделей и соответствующих характеристик адекватности. Для *проектной деятельности эталонные модели и характеристики адекватности предназначены для оценки достоверности*, а у *исследовательской деятельности эталонные модели и характеристики адекватности предназначены для оценки корректности*.

Целью и проектной, и исследовательской деятельности является построение модели: создание проекта автомобиля, здания, выявления свойств и т. д. Даже в случае, когда результат проектной и исследовательской деятельности «как бы совпадают», сам характер этой деятельности может различаться. Например, к построению поля комплексных чисел приводит каждая из двух следующих постановок цели.

**Цель 1.** Построить поле  $\mathbb{C}$ , обобщающее поле  $\mathbb{R}$  действительных чисел чтобы а) все многочлены над  $\mathbb{C}$  имели корни; б) вычисления, проводимые в  $\mathbb{C}$  с действительными числами, давали бы тот же результат, что и в  $\mathbb{R}$ .

**Цель 2.** Выяснить, существует ли такое поле  $\mathbb{C}$ , обобщающее поле  $\mathbb{R}$  действительных чисел, чтобы а) все многочлены над  $\mathbb{C}$  имели корни; б) определённые тождества, верные для чисел из  $\mathbb{R}$ , оставались бы верными и на  $\mathbb{C}$ .

Ясно, что достижение **Цели 1** должно быть результатом проектной деятельности, а **Цели 2** — результатом исследовательской деятельности. В самом деле, оценка уровня достижения **Цели 1** будет проводиться посредством процедур, отражающих сущность оцениваемого объекта: совпадают ли результаты применения операций алгебр  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ , применяемых к объектам из  $\mathbb{R}$ . Для достижения **Цели 2**, вообще говоря, не требуется явное построение поля  $\mathbb{C}$ . В принципе, можно достичь **Цели 2**, например, с помощью противоречия с предположением об отсутствии такого поля. При этом контроль достижения **Цели 2** будет проводиться с помощью анализа корректности доказательств и корректности формулировок математических утверждений.

Таким образом, цель можно трактовать как систему эталонных моделей результата деятельности, причём каждой эталонной модели соответствует «по умолчанию» одна или несколько характеристик адекватности. С этой точки зрения в состав **Цели 1** входят эталонные модели, предназначенные для оценки достоверности модели, а в состав **Цели 2** — эталонные модели, предназначенные для оценки корректности модели.

Выявленное различие между проектной и исследовательской деятельностью, во-первых, позволило осуществить декомпозицию соответствующих стратегий рутинной исследовательской [22] и проектной [23] деятельности. Во-вторых, это позволяет за счёт варьирования остановки задачи во время учебных занятий целенаправленно формировать компетенции как проектной, так и исследовательской деятельности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-06-00240.

## Литература

- [1] Фролова Ю. Н. Учебно-исследовательская деятельность в школах и вузах как технологическая основа образовательного процесса // Сибирский педагогический журнал. – 2010. – № 1. – С. 50–59.
- [2] Рассказова Ж. В. Исследовательская деятельность учащихся в условиях общеобразовательной школы: функция и виды // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2012. – № 6. – С. 246–248.
- [3] Белова Т. Г. Исследовательская и проектная деятельность учащихся в современном образовании // Известия российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. – 2008. – № 76-2. – С. 30–35.
- [4] Белоусова Т. Н., Мазниченко М. А. Исследования и проекты: что снижает мотивацию школьников к познанию // Народное образование. – 2010. – № 8. – С. 169–175.
- [5] Бережная И. Ф. Проектная деятельность студентов в процессе профессиональной подготовки // Среднее профессиональное образование. – 2013. – № 9. – С. 24–26.
- [6] Биштова Э. А. Научно-исследовательская деятельность как фактор профессионального развития студента // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. – 2008. – № 49. – С. 253–257.
- [7] Глотова Г. А., Хамитова П. А. Представления школьников о связи их будущей профессии с проектами и исследованиями // Психология и педагогика: методика и проблемы практического применения. – 2016. – № 51. – С. 35–40.
- [8] Емельянова Н. В. Проектная деятельность студентов в учебном процессе // Высшее образование сегодня. – 2011. – № 3. – С. 82–84.
- [9] Лазарев В. С. Проектная деятельность в школе: неиспользуемые возможности // Вопросы образования. – 2015. – № 3. – С. 292–307.
- [10] Люткин Н. Научно-исследовательская деятельность студентов // Высшее образование в России. – 2005. – № 3. – С. 122–124.
- [11] Нырклов А. Научно-исследовательская деятельность // Высшее образование в России. – 2005. – № 1. – С. 85–88.
- [12] Панибратенко М. В. Влияние исследовательско-проектной деятельности на становление творческого стиля профессиональной деятельности // Актуальные вопросы профессионального образования. – 2005. – № 4. – С. 34–37.
- [13] Поздеева С. И., Кузнецова Т. В. Проектная деятельность в практике учителя начальной школы // Вестник Томского государственного педагогического университета. – 2006. – № 10(61). – С. 65–68.
- [14] Попова Е. В. Проектная деятельность в экологическом образовании и воспитании // Начальная школа. – 2014. – № 11. – С. 50–52.
- [15] Чванова М. С., Малышева Н. В., Киселева И. А. и др. Проектная деятельность студентов и школьников на основе кластерного подхода // Вестник Тамбовского университета. Серия: гуманитарные науки. – 2009. – № 9(77). – С. 240–253.
- [16] Шашкина М. Б., Багачук А. В. Формирование готовности к исследовательской деятельности у будущих учителей математики в педагогическом

- вузе. [Электронный ресурс] – Электрон. дан. – Краснояр. гос. пед. ун-т им. В. П. Астафьева. – Красноярск, 2013. – 239 с.
- [17] Фешина Е. В. Воспитательные функции информационной подготовки и их использование в проектной деятельности студентов // Педагогический опыт: теория, методика, практика. – 2016. – № 1(6). – С. 118–121.
- [18] Якушева Н. М. Поисково-исследовательская деятельность в школе как правильно организовать поисково-исследовательскую деятельность в школе? // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. – 2010. – № 2. – С. 34–38.
- [19] Швец И. М., Романова Е. Б., Веселов А. П., Прахов Н. Д. Исследовательский проект: подготовка, оформление, презентация. Учебное пособие для студентов биологического факультета ННГУ при подготовке к государственной аттестации. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 114 с.
- [20] Мельников Ю. Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей. – Екатеринбург: Уральское издательство, 2004. – 384 с.
- [21] Мельников Ю. Б., Ваганова Г. В., Матвеева Е. П. Об определении и оценке адекватности модели // Образование и наука, № 10, 2007, – С. 3–11.
- [22] Мельников Ю. Б., Поторочина К. С. Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и «предматематической» деятельности // Ярославский педагогический вестник, 2010, № 3: Физико-математические и естественные науки. – С. 19–24.
- [23] Мельников Ю. Б., Хрипунов И. В., Чоповда В. С. Алгебраический подход к стратегиям проектной деятельности // Известия УрГЭУ, 2014. – № 2 (53). – С. 115–123.

### **О НЕКОТОРЫХ ПРОЛЕМАХ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ, ЧАСТЬ 3: О ДИАЛЕКТИКЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ И МЕТОДА РЕШЕНИЯ**

Рукшин С. Е., Суслина М. Е.

Санкт-Петербургский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: e-mail: vliuser@gmail.com

**Rukshin S. E., Suslina M. E. About some aspects of training solving non-standard problems, part 3: about dialectics of the problem and the idea of solution.** Authors discuss different methods of teaching students solving non-standard mathematical problems.

В статье рассматриваются некоторые проблемы и методы обучения студентов решению нестандартных математических задач.

В этой заметке мы хотим продолжить разговор о методике обучении школьников и студентов решению трудных задач, начатый авторами в статьях [1, 2]. На этот раз речь пойдёт о диалектике метода решения и условия задачи. Совсем недавно одному из авторов коллега пожаловался на то, что в классе школы с углублённым изучением математики никто из учащихся не смог решить следующую задачу:

**Задача.** При каких натуральных  $n$  значение выражения  $n^4 + 4$  будет простым числом?

**Решение.**  $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$ . Так как оба множителя положительны, то число может быть простым только в том случае, когда меньший из них равен 1, а больший равен самому числу  $n^4 + 4$ . Тогда  $n^2 - 2n + 2 = 1$ , откуда  $n = 1$ . Тогда  $n^4 + 4 = 5$  – простое.

**Ответ:** только при  $n = 1$ .

Недоумение учителя было вызвано тем, что класс только что, буквально неделю назад успешно закончил изучение темы «Разложение на множители» и написал итоговую контрольную работу по этой теме. Разумеется, все научились и раскладывать на множители многочлен  $x^4 + 4$ . Как же так? Все технические навыки, необходимые для решения задачи, успешно усвоены всем классом, а простейшую задачу на их применение не смог решить ни один ученик... Неужели, как предположил учитель, весь класс за неделю умудрился забыть изученную тему?! Конечно же, нет!

Почему же это произошло? Гарантирует ли твердое знание определений и понятий, которые используются в условии и решении задачи плюс успешное владение инструментарием успех в решении задачи?

Оказывается, далеко не всегда. Дело в том, что в программе, как правило, заложено изучение темы или технических приёмов (разложение на множители, применение теоремы косинусов, дифференцирование, нахождение первообразных и т. д.) в «чистом» виде. Затем постепенно усложняются задачи «внутри» этой темы или отрабатываются уже приобретенные навыки на более сложных технических задачах. Потом, если хватает учебного времени, мы переходим к задачам, сочетающим использование изучаемого инструмента вместе с другими методами. И, наконец, следуют задачи, в которых исходная формулировка уже не является подсказкой к использованию именно этого нужного инструмента, этой формулы, только что пройденной теоремы и т. д. Именно на этом этапе и произошло событие, столь поразившее нашего коллегу. Количество аналогичных примеров практически для каждого раздела курса алгебры, геометрии или анализа без труда может пополнить любой опытный преподаватель.

Ограничимся для пояснения уже затронутой темой «Разложение многочленов на множители и формулы сокращенного умножения» и сопоставим в виде таблицы задания, взятые из различных учебных пособий. Первый столбец состоит из задач, взятых из материалов уроков и домашних заданий в течение непосредственного изучения темы и, как правило, не вызывающих затруднений. Второй – из задач, в которых требуется применить те же самые формулы и преобразования в задачах, формулировка которых не содержит прямой ссылки на разложение на множители или применение формул.



	<i>Задачи, изучавшиеся в процессе непосредственного освоения темы</i>	<i>Задачи, выдававшиеся после изучения темы</i>
1	Разложите на множители многочлен $x^4 + 4$	Докажите, что число $n^4 + 4$ составное при всех натуральных значениях $n > 1$
2	Разложите на множители $x^3 - y^3$	Решите в целых числах уравнение $x^3 = y^3 + 91$
3	Разложите на множители $x^2 - y^2 + 8x + 16$	Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 + 8x + 8 = 0$
4	Представьте многочлен $25x^2 + 25y^2 - 30x - 40y + 25$ в виде суммы квадратов двух многочленов	Решите уравнение $5(x^2 + y^2 + 1) = 6x + 8y$
5	Запишите многочлен $5x^2 + 12xy + 9y^2 + 6x + 34$ в виде суммы трёх квадратов многочленов	Докажите, что при любых целых значениях переменных число $5x^2 + 12xy + 9y^2 + 6x + 34$ можно представить в виде суммы квадратов трёх целых чисел
6	Запишите многочлен $5x^2 + 12xy + 9y^2 + 6x + 34$ в виде суммы трёх квадратов многочленов	Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = 5x^2 + 12xy + 9y^2 + 6x + 34$
7	Найдите сумму геометрической прогрессии $1 + 100 + 100^2 + \dots + 100^n$	Докажите, что число $101\dots101$ ( $k$ нулей, $k + 1$ единица) является составным при любом натуральном значении $k > 1$
8	Докажите тождество: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$	Каждое из двух натуральных чисел представимо в виде суммы двух точных квадратов. Докажите, что их произведение также представимо в виде суммы двух точных квадратов

Разница очевидна: в первом столбике алгебраические преобразования выступают в качестве цели, а во втором – те же самые преобразования становятся средством решения задачи. Мы сталкиваемся с тем, что фактически одна и та же задача может выступать и как цель, и как средство обучения, и как инструмент для решения других задач. И в этих трех ипостасях её трудность и обучающее значение резко меняются. Именно это объясняет причины истории, с которой мы начали эту статью. Из того, что к концу изучения темы «Разложение на множители и формулы сокращенного умножения» ученик может разложить на множители многочлен любого разумного уровня сложности, из того, что он знает как это сделать и у него для решения этой задачи даже есть несколько способов, совершенно не следует, что он воспользуется ими, когда задание сформулировано по-другому. Стоит вынуть успешного ученика или студента из «зоны комфорта» и уверенности в своем умении раскладывать на множители, как он тут же теряется.

Аналогичные примеры знакомы преподавателям кафедр алгебры и теории чисел университетов и педагогических вузов, а также тем, кто готовит школьников к участию в олимпиадах высокого уровня, где одним из традиционно трудных разделов являются «Диофантовы уравнения». Оказывается, что в этой теме задачи объединены по принципу похожести условий, а вовсе не по

близости и похожести методов решения. А методы решения могут оказаться самыми различными – поиск подходящего модуля, применение классических неравенств или сравнение скорости роста функций, подходящие подстановки или другие алгебраические преобразования, метод бесконечного спуска или метод математической индукции ...

Оказывается, структурировать задачник, состоящий из одних и тех же задач, можно двумя принципиально различными способами, соответствующими диалектике взаимоотношения задачи–цели и задачи–средства обучения, объединяя задачи в разделы либо по принципу схожести условий, либо по основной идее, методу, техническим приемам решения. И, в зависимости от этого, задача меняет трудность. Это соответствует разнице в приоритетах метода решения или факта, который мы пытаемся доказать. Для опытного преподавателя любой из этих задачников не становится догмой: он давно научился искусству переструктурировать задачник одного типа на основании принципов объединения задач в задачник другого типа, для того, чтобы обучать решать задачи, аналогичные приведенным во втором столбике таблицы.

Стандартный способ прохождения учебных программ и методика контроля за усвоением измеряют лишь уровень владения конкретным инструментом. Но не учат выбирать инструмент для решения конкретных задач. Представьте себе, что Вас научили отличать друг от друга десертный нож, нож для мяса, для сыра, десертный нож, нож для фруктов и нож для устриц, посветили в тонкости использования вилок для салата, рыбы, мяса, тунца, устриц и мидий, лимона, рассказали об особенностях формы и происхождения. Но все это не приведет к успеху, если знаток столовых приборов не может отличить за обедом салат от второго блюда и десерта. Если этому человеку не знакомо блюдо под названием тартар, его не спасут знания столового прибора и он окажется в равном положении с тем, кто первый раз видит все разложенные перед ним предметы. Ему придется действовать наугад, так как он не знает, что перед ним: холодное, горячее, закуска или десерт. Так же происходит и при решении математических задач.

Именно поэтому зачастую отличник не становится победителем олимпиад, а победители и призеры олимпиад зачастую – далеко не лучшие ученики в классе. Описанная на «бытовом» языке ситуация лучше всего объясняет, почему во многих случаях отличник (который может, как нам кажется, мгновенно выполнить самое сложное упражнение из задачника) уступает рядовому троечнику в борьбе с математическим «тартаром». Более того, зачастую троечник превосходит своего успешного соученика, которому в силу знания многих тонкостей приходится дольше выбирать инструмент для борьбы с задачей.

Понятно, что для успешного овладения искусством решения задач нужно научить разбираться не только в вилках и блюдах по-отдельности, но и в том, как устанавливать соответствие между набором математических «блюд» и инструментами математического «столового прибора». Технически понятно – нужно показать набор блюд к каждому прибору из столового сервиза. И указать прибор к каждому блюду. На практике, увы, дело обстоит много сложнее. Для этого нужны отсутствующие у преподавателя временные ресурсы и те самые блюда для показа. В массовых учебниках их нет. Так как цель учебника и задачника «научить пользоваться вилкой». И параграф всецело

этому посвящён. Ещё сложнее найти задачи для демонстрации использования конкретного приема, так как мы ограничены конкретным набором знаний на данный момент. И «вилка» (кстати, какая?) в этом блюде может быть не единственным необходимым предметом ...

В качестве способов решения этой педагогической задачи можно предложить разные методы.

Рассмотрим уже упомянутую идею объединения задач не по принципу похожести условий, а по основной идее решения. Это дает возможность применить усвоенный метод в разных областях. С одной стороны, ученик получает возможность удостовериться лично в востребованности метода, с другой стороны познакомиться с различными фактами и уйти от привычных однообразных формулировок задач. Увидеть, что метод не только работает как в простых одноходовых задачах, но и успешно применяется в доказательстве классических теорем и решении олимпиадных задач различного уровня сложности. Есть наглядная возможность продемонстрировать ученикам, что математика едина и нет никакого пугающего разделения на учебные задачи, задачи контрольных работ и задачи школьных или студенческих олимпиад.

Объединение задач по методам решения является подсказкой и позволяет на первых порах не тратить время на поиск метода, а учиться пользоваться им. Но при этом время, сэкономленное на поиске метода, возможно и должно потратить на более сложные задачи.

Использование серий задач, объединенных по методу решения – это и хороший инструмент не только для активного усвоения метода, но и способ подтолкнуть ученика к самостоятельной исследовательской работе.

Он получает один мощный инструмент для борьбы с разными типами задач, и гораздо больше шансов на то, чтобы получить удовольствие от процесса решения. Такой подход дает школьнику и студенту ответ на важный для мотивации вопрос, а зачем уметь раскладывать на множители, решать квадратное уравнение, и зачем нужны изученные им методы решения. Приятно осознавать, что кроме контрольной работы по теме его знания могут быть востребованы за пределами изученной темы, что их еще где-либо можно применить. Появляется мотивация следующих шагов и знакомства с новыми методами.

И, наконец, отметим, что чрезвычайно важно чередовать подходы решения задач на одну тему для отработки навыка и инструментария с сериями разнородных задач на один метод, не подсказанный заранее условием задачи. Изученная теорема, идея, технический приём не должны оставаться одиноким деревом или оазисом посреди пустыни. Пришли – удивились – посмотрели – изучили – свыклись, что так бывает, и снова ни одного цветущего дерева и оазиса на пути ... Не в этом ли таится одна из причин нелюбви школьников к математике и страха перед практикумом по решению задач?

## Литература

- [1] Рукшин С. Е., Суслина М. Е. О некоторых проблемах обучения решению нестандартных задач // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования, материалы научной конференции «Герценовские чтения–2014». – СПб.: РГПУ, 2014. – С. 195–199.

- [2] Рукшин С. Е., Суслина М. Е. О некоторых проблемах обучения решению нестандартных задач, часть 2: о задачах на доказательство и пропедевтике геометрии // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования, материалы научной конференции «Герценовские чтения–2016». – СПб.: РГПУ, 2016. – С. 187–193.

## ЦЕЛИ ИЗУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ СТУДЕНТАМИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Якубсон М. Я.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена  
Санкт-Петербург  
e-mail: michaeljackubson@mail.ru

**Yakubson M. Ya. Purposes of studying proofs of some theorems by students of technical universities.** Purposes of studying proofs of some theorems by students of technical universities are discussed.

Обсуждаются цели изучения доказательств некоторых теорем при обучении математике студентов технических вузов.

«Со времен греков говорить “математика” – значит говорить доказательство» [1]. Поэтому вопрос о том, зачем нужно рассказывать студентам доказательства теорем, может показаться странным. Однако то, что кажется естественным на матмехе большого Университета или на математическом факультете РГПУ им. А. И. Герцена, вызывает вопросы в техническом вузе или военной академии. Очевидно, цели дедуктивного изложения математики существенно различаются в зависимости от вида учебного заведения.

В классическом университете науки излагаются соответственно своей внутренней логике. Внутренняя логика построения математики начиная с Евклида строится на основании аксиоматического метода. Математика в каком-то смысле дитя античной демократии – каждый, кто изучает эту науку, имеет право, не доверяя авторитетам, сам пройти по лестнице, идущей от аксиом к теоремам. Доказательства в математике – способ проверки и установления истины. С другой стороны, на профильном факультете классического университета обучаются будущие специалисты-математики. Предполагается, что в будущем они будут искать новое математическое знание, поэтому знакомство с доказательствами теорем, созданными великими математиками, является для будущих математиков профессиональной тренировкой.

Для будущих учителей, которых мы готовим в педвузе, дедуктивное построение курса не менее важно. Им предстоит обучать математике в рамках общего образования. Для того, чтобы дать школьнику представление о математике как стройной системе следующих друг из друга теорем, которые логически доказаны, поэтому абсолютно истинны, студент должен сам изучить такой курс. Как считает В. А. Успенский, «Доказательство – это рассуждение,

которое убеждает того, кто его воспринял, настолько, что он делается готовым убеждать других с помощью этого же рассуждения» [2].

Итак, когда мы преподаём бакалаврам-математикам в педвузе, мы стараемся доказать все утверждения, содержащиеся в какой-либо математической дисциплине или курсе. Если какие-то теоремы остаются недоказанными, причина обычно в том, что доказательство требует каких-нибудь знаний, отсутствующих у студентов на тот момент, когда теорема уже необходима. Например, Основная теорема алгебры формулируется в курсе алгебры существенно раньше, чем она доказывается в курсе математического анализа.

Иная ситуация складывается, когда мы преподаём математику будущим инженерам, гражданским или военным. Они достаточно активно используют математику в качестве инструмента решения прикладных задач. Объём курса, а также другие ценностные установки студентов, делают построение полностью дедуктивного курса невозможным и ненужным. Разумеется, мы говорим, что в математике все должно быть доказано, но доказываем только некоторые не очень многочисленные предложения. Возникает вопрос – как выбирать, что доказывать, что нет. Мне кажется, основной критерий такой – доказательство должно сделать теорему более понятной.

Рассмотрим несколько примеров. В курсе математического анализа для университетов и педвузов важную роль играет теорема Больцано–Коши. В учебнике [3, с. 175–176] приводятся два различных доказательства этой теоремы, основанные на двух различных идеях. Для математика важны как эти идеи, так и то, что из этой теоремы следуют многочисленные важные и нетривиальные следствия. Сама необходимость доказательства этой теоремы, понимание того, что она неочевидна – признак достаточно высокой математической культуры.

В то же время доказывать эту теорему курсантам военной академии, мне кажется, нецелесообразно. Формулировка теоремы для нематематиков гораздо более ясна, чем свойство вложенных отрезков, используемое при ее доказательстве. Скорее их убедит чертёж, а в том, что непрерывность существенна – контрпример.

Обсудим еще одну ситуацию – свойства пределов и формулы дифференцирования. Свойства пределов звучат естественно, каждый, кто имеет интуитивное понятие о пределе, в них поверит. То же можно сказать и о формулах производной суммы и произведения на число. Они выглядят естественно, поскольку выражают линейность оператора дифференцирования. Легко поверить, что какой-то оператор линеен, гораздо труднее объяснить, что линейны не все операторы. Именно поэтому формулу для производной произведения двух функций надо доказывать обязательно! Именно доказательство показывает, почему это на самом деле так, почему верна формула  $(uv)' = u'v + v'u$ , а не “естественное” равенство  $(uv)' = u'v'$ . Кстати, “естественным” последнее равенство кажется не только плохим студентам, но и великому Лейбницу [4].

Похожие соображения применимы и к теме “Ряды Фурье”. Тонкие вопросы сходимости, естественно, не стоит обсуждать с курсантами (впрочем, и в педвузе они проходят достаточно трудно). В то же время вывод формул Эйлера–Фурье через почленное интегрирование позволяет прояснить ситуацию и даёт возможность провести полезную аналогию с ортогональным

базисом. Кстати, практика показывает, что только при решении большого количества задач на разложение функций в ряд Фурье обучаемые осваивают, наконец, интегрирование по частям.

Это же соображение учитывается и при изучении темы “Операционное исчисление”. Многочисленные формулы изображений основных элементарных функций и теоремы о дифференцировании и интегрировании оригиналов и изображений не похожи ни на что ранее изученное, непонятны и трудно запоминаются. Всё становится гораздо яснее, если вывести эти формулы и теоремы с помощью преобразования Лапласа. Доказательства просты и понятны. Также полезно то, что эти доказательства являются упражнениями в интегрировании, причем интегралы берутся несобственные, что позволяет повторить вычисление пределов на бесконечности.

Сформулируем кратко цели изучения доказательств в техническом, в частности, военном вузе.

1. Доказательство должно прояснять смысл доказываемой теоремы.
2. Наличие некоторых доказательств в курсе показывает естественную для математики дедуктивную структуру этой науки.
3. Доказательства помогают продемонстрировать связь между различными разделами курса, повторить и закрепить изученный материал.

## Литература

- [1] Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир. – 456 с.
- [2] Успенский В. А. Семь размышлений на темы философии математики // Закономерности развития современной математики – М.: Наука, 1987. – С. 106–155.
- [3] Будаев В. Д., Якубсон М. Я. Математический анализ. Функции одной переменной. – СПб.: Лань, 2012. – 544 с.
- [4] Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. – М.: Наука, 1989.

# Актуальные информационные системы и технологии моделирования

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА СТРУКТУРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТАБЛИЦ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ РЕГУЛЯРНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Алибеков М. Р., Астахов Д. В., Каширина Е. В.

Российский государственный педагогический

университет им. А. И. Герцена,

Санкт-Петербург

e-mail: kashirina@ya.ru

**Alibekov M. R., Astakhov D. V., Kashirina E. V. Development of the algorithm to structural dynamic modeling hydro meteorological data tables using regular expressions.** Developed a program that implements the algorithm for generating a regular expression that models the structure of an arbitrary tables presented in text format. The table must have a title and header that are marked by any delimiters. The program is used to convert multi-year archives of text data “Meteorological Monthly” and save these data in a single relational database.

**Keywords:** Regular expressions, conversion of text data, structural model, table recognition, relational database.

Разработана программа, реализующая алгоритм формирования регулярного выражения, моделирующего структуру произвольной таблицы, представленной в текстовом формате. Таблица должна иметь название и заголовок, размеченный любыми разделителями. Программа используется для преобразования многолетних архивов текстовых данных метеорологических ежемесячников и сохранения в единой реляционной базе данных.

**Ключевые слова:** Регулярные выражения, преобразование текстовых данных, структурная модель, распознавание таблиц, реляционная база данных.

Научные исследования в климатологии опираются на анализ временных рядов многолетних метеорологических наблюдений. В лаборатории технической климатологии и опасных явлений Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова существенную часть массива исходных данных составляют материалы метеорологических ежемесячников, в которых данные представлены в виде таблиц различных гидрометеорологических характеристик. Ежемесячники поступают в лабораторию в виде текстовых файлов, содержание которых повторяет структуру и содержание печатных вариантов ежемесячника. Эти файлы невозможно напрямую загрузить ни в электронные таблицы, ни в базу данных автоматизированной системы, что необходимо для накопления многолетних рядов и дальнейшего климатического анализа. К настоящему времени накоплен большой массив таких файлов, содержащих метеорологическую информацию более чем за 20 лет.

Первая попытка автоматизировать процесс преобразования данных метеорологических ежемесячников была осуществлена в 2014 году. Была разработана программа, которая позволяет накапливать в единой базе данных расшифрованные таблицы метеорологических ежемесячников [1]. При распознавании

таблиц используются предварительно составленные и отлаженные регулярные выражения, каждое из которых жестко привязано к структуре той или иной таблицы [2].

В первой версии программы шаблоны в виде регулярных выражений были разработаны только для 10 из 24 известных таблиц. Ещё одна проблема преобразования метеорологических ежемесячников связана с тем, что представление таблиц в исходных текстовых файлах слабо стандартизировано. Применяемые в заголовках таблиц символы-разделители, а также размеры столбцов одной и той же таблицы от файла к файлу могут меняться. Таким образом, всякое изменение в структуре распознаваемых таблиц требовало участия профессионального программиста, способного разработать и отладить модель новой таблицы в виде регулярного выражения. Силами пользующихся программой специалистов-климатологов такую ситуацию исправить невозможно.

Образец таблицы из текстового файла представлен на рисунке 1. Внимательное изучение формата данных, представленных в текстовых файлах, позволило выявить ряд закономерностей:

- все таблицы имеют название, начинающееся словом «Таблица» и следующим за ним числом;
- заголовок таблицы отделен сверху и снизу строками, заполненными одним и тем же символом;
- последняя содержательная строка заголовка таблицы содержит в некоторых позициях символы-разделители, которые отражают структуру данных этой таблицы;
- разделителем может быть любой символ кроме символов, представляющих данные или текст заголовка: буква, цифра, пробел, точка, запятая, минус, знаки ”/” и ”%”;
- структура данных, представленных в теле таблицы, повторяет структуру последней содержательной строки заголовка;
- таблица завершается пустой строкой.

Таблица 2. ВЛАЖНОСТЬ ВОЗДУХА										Месяц	9	Год	2008	Вып.	3				
СТАНЦИЯ	ПАРЦИАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ, гпа	ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВЛАЖНОСТЬ, %	ДЕФИЦИТ НАСЫЩЕНИЯ, гпа	Число дней с	относит. влажн.	Среднее значение	Абс. макс	Дата мин	Дата макс	не бо-нее 30%	не ме-дек	1-я	2-я	3-я	месяц	Абс. макс	Дата	сред.	
1. Эшбек	8.13	12.80	4	5.34	2	83	30	6	0	9	1.90	2.00	1.50	1.80	7.20	6	3.8		
2. Энгозеро	7.89	14.70	4	4.47	25	80	38	3	0	3	2.30	2.10	2.20	2.20	8.50	3	3.3		
3. Калевала	8.09	13.80	4	3.91	26	84	52	25	0	7	1.80	1.80	1.60	1.70	7.20	6	3.7		
4. Ишкозеро	8.35	14.30	4	4.53	26	82	49	30	0	5	2.00	1.90	2.00	2.00	8.30	22	4.1		
5. Колежма	9.10	16.10	4	4.88	14	90	56	3	0	16	1.30	1.00	1.20	1.20	6.00	3	5.4		
6. Реболы	8.49	14.50	4	4.68	26	85	48	8	0	8	2.00	1.60	1.40	1.70	7.60	8	4.3		
7. Сегежа	8.69	14.90	4	4.30	25	86	40	2 25	0	8	1.90	1.20	1.70	1.60	7.00	3	4.7		
8. Паданы	8.70	14.40	4	5.10	25	81	47	2	0	9	2.20	1.80	2.20	2.10	7.70	23	4.6		
9. Медвежьегорск	9.00	15.80	4	4.78	26	85	44	25	0	8	1.90	1.50	1.60	1.70	7.60	24	5.1		
10. Вяртсиля	8.90	15.10	4	4.52	26	85	46	2	0	6	2.00	1.50	2.00	1.80	7.80	23	4.9		
11. Кондопога	9.30	15.90	4	5.52	26	83	44	2	0	7	2.00	1.80	2.00	1.90	8.70	5	5.6		
12. Суоярви	9.00	15.40	4	4.15	26	86	42	25	0	9	1.40	1.30	1.80	1.50	7.40	24 25	5.2		
13. Петрозаводск	8.90	16.50	4	5.23	26	82	43	2	0	10	2.10	1.80	2.30	2.10	8.80	5	5.0		
14. Пудож	9.10	16.20	4	4.56	26	86	51	26	0	7	1.70	1.70	1.50	1.60	7.20	8	5.2		
15. Сортавала	9.20	16.30	3	5.08	26	82	42	2	0	3	2.30	1.90	2.40	2.20	8.60	21	5.4		
16. Валаам	9.30	15.50	3 4	5.20	25	75	47	25	0	6	2.90	3.20	3.20	3.10	7.60	9	5.6		
17. Олонец	9.20	17.60	4	4.61	26	82	40	22	0	6	2.10	2.10	2.40	2.20	12.10	22	5.4		
18. Лесогорский	9.20	16.00	4	4.75	26	81	43	28	0	4	2.50	2.30	2.70	2.50	9.00	22	5.4		
19. Вознесенье	9.50	17.60	4	5.04	26	83	51	24	0	7	2.10	1.90	2.10	2.00	9.00	5	5.9		
20. Выборг	9.80	16.60	4	6.30	28	79	46	28	0	6	2.20	2.60	3.00	2.60	10.30	22	6.3		
21. Лодейное поле	9.90	18.40	4	3.92	26	85	51	22	0	5	2.00	1.80	1.90	1.90	10.80	22	6.5		

Рис. 1. Фрагмент текстового файла с таблицей метеорологических данных.

Наличие общих для всех таблиц закономерностей позволило разработать алгоритм динамического формирования регулярного выражения для произвольной табличной структуры, удовлетворяющей перечисленным выше свойствам. Алгоритм позволяет автоматически моделировать любую таблицу из



текстового файла метеорологического ежемесячника, имеющую заголовок, размеченный любыми разделителями. Алгоритм реализован на языке C++ с использованием библиотеки Qt 5.6.

Обобщённая последовательность действий при распознавании файлов с данными метеорологических ежемесячников представлена на рис. 2.

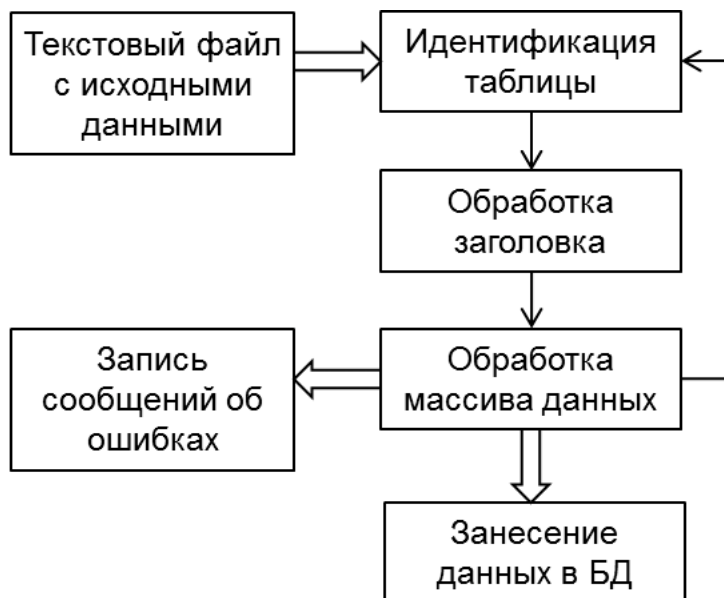


Рис. 2. Обобщённая последовательность действий при распознавании данных.

На вход программы поступает текстовый файл, содержащий данные одного метеорологического ежемесячника в текстовом формате. Идентификация таблицы представляет собой поиск наименования очередной таблицы с помощью некоторого шаблона.

При нахождении строки, соответствующей шаблону наименования, из нее извлекается номер и название таблицы.

Следующий этап в обработке данных – выделение и обработка заголовка идентифицированной на предыдущем шаге таблицы. Этот этап самый значимый, поскольку на нем определяется структура распознаваемой таблицы. Заголовки таблицы состоят из нескольких строк, содержащих символы заголовков столбцов с разделителями. Поскольку наиболее детально структуру таблицы представляет предпоследняя строка, именно она используется для заполнения массива размеров столбцов. В связи с тем, что некоторые узкие таблицы могут быть представлены в две колонки, потребовалась разработка дополнительных механизмов идентификации структуры данных, представленных повторяющимся заголовком.

На этом же этапе происходит автоматическое формирование шаблона `regExpForTable`, предназначенного для распознавания данных в последующих строках таблицы уже на этапе обработки массива данных. Шаблон генерируется на основе распознанных ранее размеров столбцов.

Следующий этап «Обработка массива данных» включает обработку строк таблицы, содержащих данные, сгенерированными на предыдущем этапе регулярными выражениями. При этом данные из строк, соответствующих шаблону, сохраняются в базе данных, управляемой СУБД SQLite. Если обнаружи-

вается строка, данные которой не укладываются в сформированный для данной таблицы шаблон, генерируется сообщение об ошибке в данных с указанием местоположения некорректной строки. Строки, не соответствующие шаблону или вызвавшие сбой программы, сохраняются в специальном файле вместе с указанием их местоположения. Сохранение подробных сообщений о некорректных исходных данных является дополнительной функцией программы, которая дает возможность пользователю легко найти и исправить обнаруженные ошибки, а затем запустить исходный текстовый файл на повторную обработку.

Таким образом, программная реализация предложенного алгоритма позволяет «интеллектуально» отсеивать лишь нужные данные, в противном случае – сообщать о возникновении проблем пользователю. Всего программа использует для разных задач девять постоянных регулярных выражений:

- `notTable` – отсечение строк из содержания, которые попадают под определение строки;
- `tableSearch` – обнаружение таблицы;
- `firstSymbol` – получение первого символа в строке кроме пробелов;
- `notEmptyString` – распознавание строки, в которой есть хотя бы один символ помимо пробела;
- `meaninglessString` – распознавание строк, заполненных прочерками и пробелами;
- `onlySpaces` – распознавание строк, состоящие из пробелов;
- `withoutSpaces` – обрезка пробелов слева и справа от данных;
- `findRanges` – первой захваченной группой являются все столбцы (кроме последнего) с разделителями; вторая захваченная группа – последний столбец;
- `findSubRanges` – выделение каждого из столбцов по отдельности, дабы можно было измерить диапазон каждого из них, а также их количество.

Из всех, используемых программой регулярных выражений, семь перечисленных ниже генерируется в процессе обработки таблицы.

`OneSymbolString` является шаблоном для обнаружения первой и последней строк заголовка;

`fewHeaders` является шаблоном для случаев, где в одной строке находятся несколько заголовков;

`countHeaders` используется для поиска отдельных заголовков в строке, получения их позиций и длины;

`findHeader` используется для обрезки строки с несколькими заголовками перед получением диапазонов столбцов. Изначальный вариант строки дублирует столбцы несколько раз, чего необходимо избежать;

`regExpForTable` генерируется на основе диапазонов столбцов. Используется для разделения строк на конечные данные;

`oneTablePerString` используется в строках с несколькими заголовками для отсечения данных одного заголовка от данных других заголовков.

Для удобства пользователей был создан многофункциональный интерфейс, позволяющий не только преобразовывать текстовые файлы метеорологических ежемесячников и загружать их в реляционную базу данных, но также и осуществлять простейшие манипуляции с базой данных, включая выгрузку отобранных массивов метеорологических данных в формат электронных таблиц.

Общая архитектура автоматизированной системы обработки данных метеорологических ежемесячников показана на рис. 3. Программа считывает из текстовых файлов данные метеорологических ежемесячников и после распознавания сохраняет в базе данных. При этом используются спецификации таблиц из файла spec.xml. По запросу пользователя выборка из базы данных сохраняется в формате .xlsx.

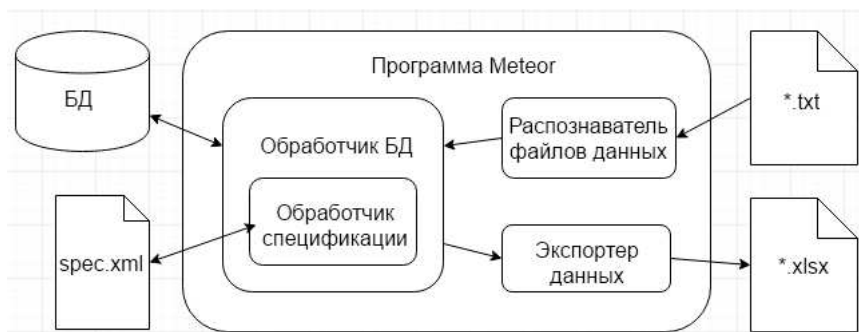


Рис. 3. Архитектура системы обработки данных метеорологических ежемесячников.

Программа реализована на языке C++ с использованием библиотек Qt5.6 и QtXlsx for Qt5, а также СУБД SQLite. На рис. 4 представлены взаимосвязи между классами, реализующими описанные выше функции программы обработки данных метеорологических ежемесячников.

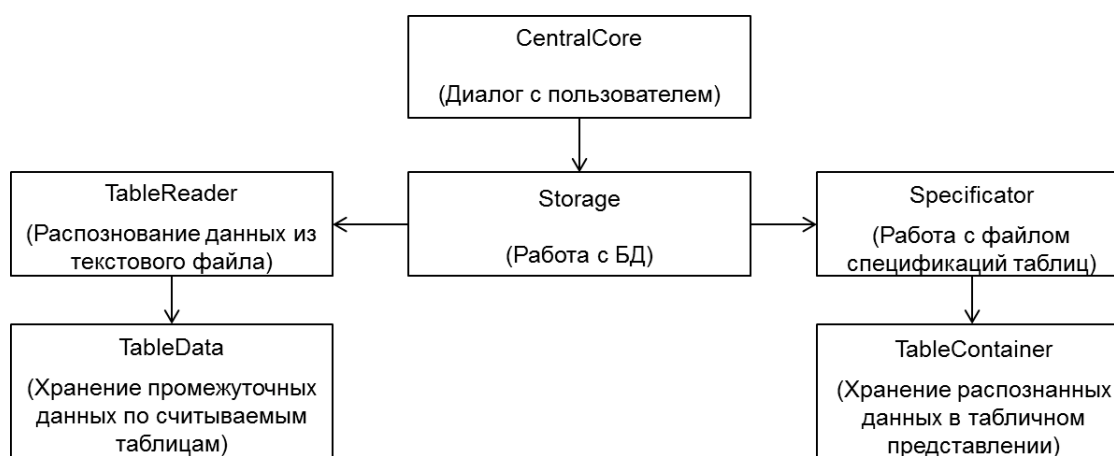


Рис. 4. Диаграмма классов программы обработки данных метеорологических ежемесячников.

Класс Storage предназначен для работы с базой данных. Класс получает считанные данные из TableReader и сохраняет их в базе данных, используя описания столбцов таблицы из Specificator. Так же на основе данных из Specificator осуществляет считывание данных из базы и передает их в класс пользовательского интерфейса

Класс TableReader производит распознавание и считывание данных из текстового файла средствами регулярных выражений.

Класс TableData предоставляет структуру для временного хранения данных по считываемым таблицам.

Класс Specificator предназначен для работы с локальным файлом спецификации. Содержит инструкции для распознавания таблиц базы данных.

Класс TableContainer предоставляет структуру для хранения распознанных данных в табличном представлении.

Класс CentralCore обеспечивает работу пользовательских диалоговых окон:

TableWindow – главное окно пользовательского интерфейса, где представлены основные элементы управления приложением, а также выводятся данные из базы в табличном представлении;

ConnectionDialog – окно подключения к локальной базе данных;

ExportDialog – окно выбора и сохранения таблицы в формате .xlsx;

MessageDialog – окно вывода сообщений или предупреждений любого рода;

RegistrationDialog – окно регистрации новой таблицы.

При появлении новой структуры таблицы пользователю необходимо её зарегистрировать, т. е. в специальной форме задать имена столбцов и выбрать из выпадающего списка обобщенный тип данных для каждого столбца. После этого программа автоматически сформирует моделирующий таблицу шаблон в виде регулярного выражения и после распознавания табличных данных загрузит их в базу.

Программа, реализующая алгоритм структурного динамического моделирования таблиц гидрометеорологических данных, уже более полугодом используется в лаборатории технической климатологии и опасных явлений ГГО им. А. И. Воейкова для пополнения единой реляционной базы данных, необходимой для всесторонних климатических исследований.

В заключение следует отметить, что автоматизированная система распознавания таблиц метеорологических ежемесячников не привязана к конкретным табличным структурам. Необходимо лишь чтобы представление таблиц в текстовых данных соответствовало требованиям, изложенным в начале настоящей статьи. Таким образом, программа может быть использована для распознавания и загрузки в реляционную базу данных любых имеющих заголовки табличных структур в текстовых данных.

## Литература

- [1] Каширина Е. В., Фасолько Д. В. Разработка автоматизированной технологии преобразования метеорологических данных для задач прикладной климатологии // Труды Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова. Вып. 581. – СПб.: Изд. ГГО им. А. И. Воейкова, 2016. – С. 155–164.
- [2] Каширина Е. В., Кадочников Д. Е., Степаненко Ф. Н. Опыт применения регулярных выражений для извлечения табличных данных из документов MS Word // Новые образовательные стратегии в современном информационном пространстве: Сборник научных статей по материалам международной научной конференции 17–28 ноября 2014 года. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 236–240.

## СИСТЕМА ИЗВЛЕЧЕНИЯ ФАКТОВ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕКСТОВЫХ ДАННЫХ

Богатырев М. Ю., Интякова А. В., Самодуров К. Д.

Тульский государственный университет

Тула

e-mail: okkambo@mail.ru

**Bogatyrev M. Y., Intyakova A. V., Samodurov K. D. Fact Extraction System Based on Conceptual Models of Textual Data.** The structure and functionality of the fact extraction system is considered. The system is built with applying two conceptual models: conceptual graphs and formal concept lattices. Fact extracting is performed on the textual corpus with adjustable problem-oriented tagging. Examples of system operation on a textual corpus containing information about bacteria biotopes are presented.

Рассматриваются структура и функциональные возможности системы извлечения фактов из текстов естественного языка. Система построена с применением двух концептуальных моделей: концептуальных графов и решёток формальных понятий. Концептуальные графы отражают логику и структуру предложений текста. Решётка понятий, построенная на множестве концептуальных графов, интерпретируется как система потенциальных фактов различных уровней (тематики), связанных между собой. Извлечение фактов выполняется на текстовом корпусе с настраиваемой проблемно-ориентированной разметкой. Приводятся примеры работы системы на текстовом корпусе, содержащем информацию о биотопах бактерий.

Данная работа относится к направлению, известному как “разработка текстовых данных” – Text Mining [1]. Главной задачей Text Mining является извлечение нетривиальной информации из текстов. Мы используем термин “текст” для обычных, неструктурированных текстов, представляющих собой наборы предложений. Термин “текстовые данные” применяется к структурированным текстам – текстам, хранящимся в базах данных, текстовым корпусам, а также к отдельным лексическим элементам текстов, например, фразам. Также тексты и соответственно, текстовые данные могут быть *тематически специализированными* (юридические, медицинские и т. п.) и *свободными*, т. е. текстами естественного языка.

В настоящее время наблюдается возрастающий интерес исследователей к обработке текстов естественного языка. Это объясняется развитием сети Интернет, в которой естественно-языковые текстовые данные являются основным информационным ресурсом. Кроме того, рост научных публикаций, хранящихся в электронном виде, появление текстовых корпусов с онлайн доступом к ним, онлайн словарей и справочных систем обуславливают необходимость и возможность создания технологий обработки текстов, в которых моделируется их семантика. К подобным технологиям относятся и технологии извлечения фактов из текстов естественного языка.

Центральной проблемой, определяющей каждое предлагаемое решение

задачи извлечения фактов, является определение понятия “факт”. В последнее время в литературе по Text Mining термины “факт” и “событие” либо не различаются, либо трактуются с разных позиций [2]. Например, фраза “Сбербанк купил акции Россельхозбанка” содержит два события: событие “покупка”, и событие “покупка акций”. Участниками данных событий могут быть любые фигуранты, продающие и покупающие акции, и их имена не представлены в модели события, например, вида  $\langle \text{субъект} \rangle - (\text{покупка}) - \langle \text{объект} \rangle$  или в предикатной форме:  $\text{Покупка}(x, y)$ . В данном примере, а также в общем случае событие имеет семантику, определяемую конкретным смыслом предиката. В обзоре [2] факт определён как “статистически значимое отношение”. Модель факта в виде отношения допускает несколько значимых элементов. Однако на первый план в такой трактовке выдвигается не семантика, а статистическая характеристика факта. Поэтому применительно к нашему примеру результат извлечения фактов мог бы выглядеть так: “В данных текстах 45% всех описанных покупок являются покупками акций”. Если фиксировать факт покупки акций, выпущенных Россельхозбанком, именно Сбербанком, то придётся в модели факта учитывать обоих участников сделки. Тогда можно считать факт событием, случившимся в конкретных условиях, – частным случаем события, в предикатной модели которого переменные  $x, y$  приобрели конкретные значения.

В системе, которой посвящена данная работа, факты моделируются отношениями на множествах слов. Данная, весьма общая модель, вполне применима и к событиям. Однако с событиями естественно связывать временные характеристики, например дату, а для фактов их определять не обязательно. В то же время моделирование фактов в виде отношений позволяет выявлять в качестве фактов связи между объектами, представленными тестовыми данными.

Вместе со статистическими методами в задачах разработки текстовых данных применяются также методы концептуального моделирования [3]. Концептуальный подход в моделировании состоит в применении моделей, обладающих определенной семантикой, выражающейся в таких терминах как “концепт”, “концепция”, “понятие”. Рассматриваемая в данной работе система извлечения фактов построена с применением двух концептуальных моделей: концептуальных графов [3] и решёток формальных понятий [4]. Эти модели и метод извлечения фактов рассмотрены нами в работах [5], [6].

Современные системы извлечения событий и фактов из текстов в большинстве своём являются проблемно-ориентированными: они работают на текстах определённой тематики и функциональные возможности таких систем также определяются характером решаемых задач. Типичными примерами таких систем являются системы, описанные в работах [7], [8]. В обоих примерах используются сторонние системы синтаксического и морфологического анализа текстов, к которым обращаются системы извлечения фактов. Решение задачи извлечения фактов выполняется посредством решения двух стандартных задач Text Mining [1]: задачи извлечения именованных сущностей и задачи извлечения отношений между сущностями в тексте. С помощью методов анализа формальных понятий, применяемых в рассматриваемой нами системе, получены новые решения указанных задач, которые расширяют возможности систем извлечения фактов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-07-05507.

**Структура системы.** Элементы структуры разработанной системы показаны на рис. 1. В системе применяются технологии СУБД. База данных системы хранит концептуальные графы, решётки понятий и данные, необходимые для их обработки. К таким данным относятся, например, лексико-синтаксические шаблоны, применяемые при построении концептуальных графов. Система взаимодействует с внешними источниками данных – текстовым корпусом, а также с веб-ресурсами из сети Интернет. Для организации обработки данных и оптимизации поиска в базе данных разработана специальная система индексирования. При построении концептуальных графов в системе применяется морфологический анализатор. Выходные данные морфо анализатора – определяемые с его помощью части речи в предложениях, – используются при обработке лексико-синтаксических шаблонов. Модуль обработки словосочетаний необходим в тех случаях, когда именованная сущность (в данном случае это бактерия) имеет название, состоящее более чем из одного слова. Также данный модуль настраивается на обработку словосочетаний, обозначающих свойства именованных сущностей, например, для бактерий: “грам отрицательная”.

**Функциональные свойства системы.** Общий алгоритм работы системы состоит в следующем [5].

1. На предложениях обрабатываемых текстов строится множество концептуальных графов. Это множество строится с применением стандартного морфологического анализатора и решения задачи разметки семантических ролей.

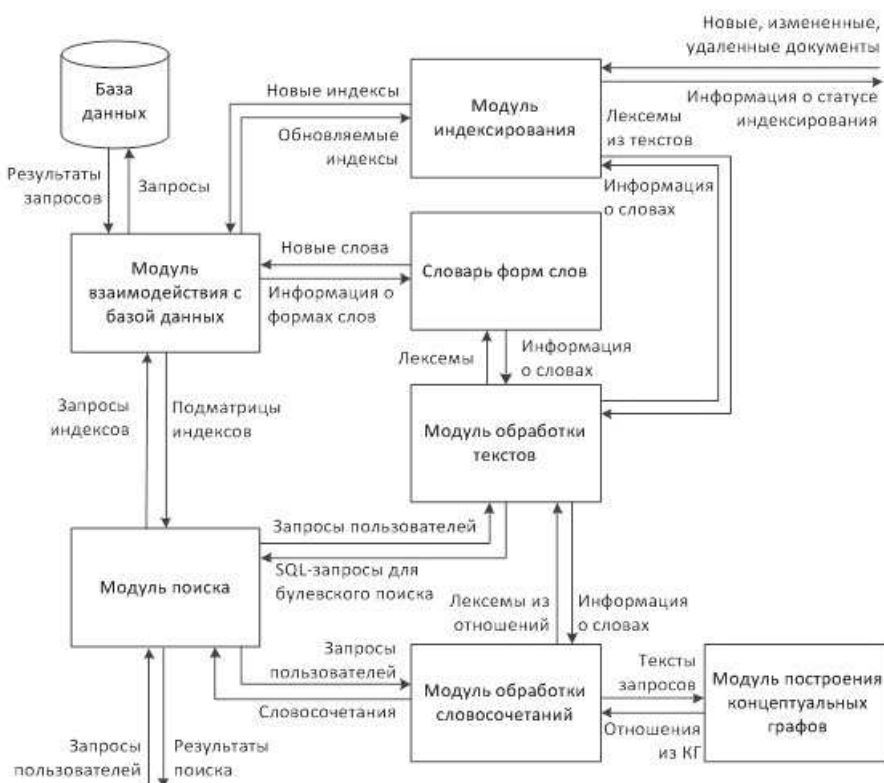


Рис. 1. Элементы структуры системы извлечения фактов

2. На множестве концептуальных графов решается задача их агрегирования. Агрегирование представляет собой замену исходного множества концептуальных графов семантически эквивалентным множеством, содержащем меньшее число графов. Это необходимо для исключения избыточной размерности концептуальных моделей, не связанной с полезной информацией. В качестве средств агрегирования применяются кластеризация и фильтрация концептуальных графов с использованием внешних ресурсов – тезаурусов и словарей.

3. На агрегированном множестве концептуальных графов строится формальный контекст. Формальный контекст представляет собой отношение на множествах объектов и их атрибутов и задаётся матрицей. Построение формального контекста на текстах является самой сложной задачей метода и её решение неоднозначно. Формальный контекст определяет *семантическую выразительность* концептуальной модели – решётки понятий.

4. На формальном контексте выделяются формальные понятия и строится другая концептуальная модель – решётка понятий. Имея решётку понятий, можно выявлять связи между понятиями по принципу “общее – частное”. Понятия – узлы решётки – интерпретируются как множество потенциальных фактов определённого уровня (тематики), связанных с другими фактами.

Извлечение фактов из текстов выполняется с использованием построенного фактографического интерфейса к решётке понятий и программной оболочки, позволяющей управлять диалогом пользователя с системой. Применение технологий СУБД позволяет выполнять поиск фактов при помощи SQL-запросов.

**Эксперименты с системой.** Разработанная система представляет собой открытый проект на платформе Java, в котором важным элементом является настройка данных на тематику работы системы. Соответственно, обе концептуальные модели, применяемые в системе, – концептуальные графы и решётки понятий – строятся с учётом данной тематики. В работе [5] приведены правила, применяемые при построении формальных контекстов на множестве концептуальных графов. Эти правила сводятся к использованию предикатных форм, присутствующих в концептуальных графах, учёту иерархии элементов концептуальных графов и применению внешних тезаурусов для идентификации ключевых лексических элементов в текстах. В системе были выполнены эксперименты по исследованию биотопов бактерий. Биотопом называется область (ареал), занятая определённым биоценозом, например, бактериями. Задача нахождения биотопов бактерий сводится к идентификации названий бактерий, упоминаемых в текстах, и определении связей (отношений) между названиями бактерий и другими сущностями, обозначающими ареал обитания бактерий (почва, вода, внутренние органы людей и животных), а также отношений их к известным заболеваниям людей и животных. Тексты, содержащие информацию о бактериях, составляют корпус, доступный в сети Интернет.

Рассмотрим пример извлечения фактов в системе. На рис. 2 показан фрагмент формального контекста с элементами, относящимися к некоторым свойствам бактерий: Грам-тест, аэробность, форма строения.



	gram-negative	Gram-positive	acid-fast	rod-shaped	spiral	aerobic	anaerobic	non-spore	bacteria
Mycobacterium bovis		X	X	X		X			X
Mycoplasma agalactiae		X							
Bifidobacterium longum		X					X		
Corynebacteria		X							X
Mycobacteria		X	X	X					X
Streptomycetes		X							X
Mycobacterium tuberculosis		X				X			
Clostridium		X					X		X
Clostridium sticklandii		X					X		
Deinococcus radiodurans		X							
Deinococcus deserti	X								
Cupriavidus metallidurans	X							X	
Thermoanaerobacter tengcongensis	X			X			X		
Thermus thermophilus	X					X			
Sinorhizobium meliloti	X					X			
Bdellovibrio bacteriovorus	X			X					
Xylella fastidiosa	X								
Chlamydomonada pneumoniae	X								
Helicobacter hepaticus	X				X				
Legionella pneumophila	X			X		X			

Рис. 2. Фрагмент формального контекста для 20-ти бактерий

Из рис. 2 следует, что все представленные бактерии делятся на два класса: грам-положительные и грам-отрицательные бактерии. Разделение бактерий на классы по другим свойствам не очевидно из контекста. Для выявления фактов разделения бактерий на классы по определённым свойствам используем решётку понятий, построенную на контексте, фрагмент которого показан на рис. 2. На рис. 3, 4 на решётке понятий выделены её фрагменты – виды, которые позволяют извлечь интересные нас факты.

На рисунках диаграммы, представляющие решётки понятий, в светлых прямоугольниках содержат названия бактерий (объекты), а в затемнённых прямоугольниках – их свойства (атрибуты). Диски обозначают формальные понятия – замкнутые подмножества объектов и атрибутов. Двигаясь вниз от фиксированного понятия по линиям, от него идущим, мы получаем понятия, которые наследуют объекты и атрибуты данного понятия, дополняя их собственными объектами и атрибутами. Так, например, на рис. 3-а все понятия, лежащие на выделенных линиях ниже понятия  $\{(Deinococcus radiodurans, Mycoplasma agalactiae), (Gram-positive)\}$ , имеют атрибут *gram-positive*, т. е. являются грам-положительными. Аналогичным свойством для атрибута *gram-negative* обладают понятия, принадлежащие виду (выделенным линиям) на рис. 3-б. Оба вида на рис. 3 имеют общими только *пустое понятие* – вершину решётки и *универсальное понятие* – её нижнюю точку, что демонстрирует факт разделения бактерий на непересекающиеся классы по Грам-тесту.

Таким же образом на рис. 4 показан факт разделения бактерий на непересекающиеся классы по свойству аэробности.

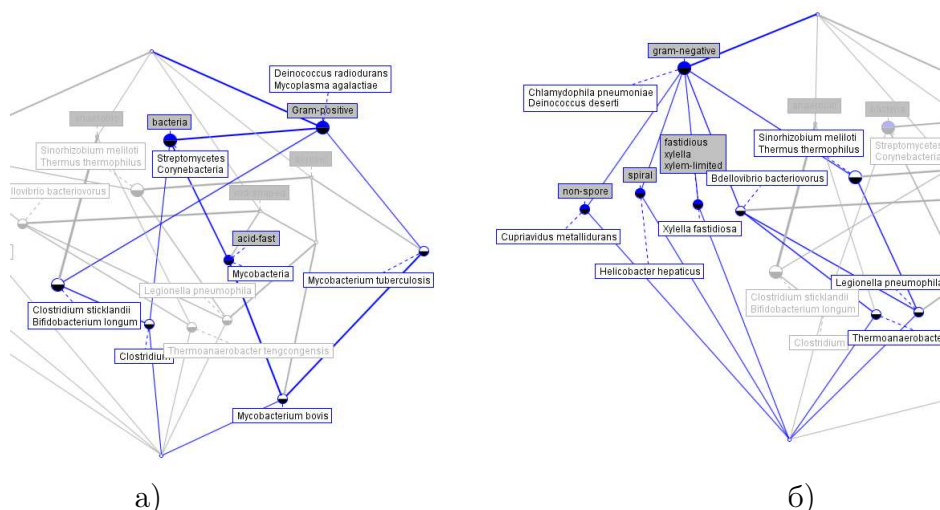


Рис. 3. Виды, отражающие иерархии формальных понятий, содержащих Грам-тест бактерий в качестве атрибутов;  
 а) грам-положительный тест, б) грам-отрицательный

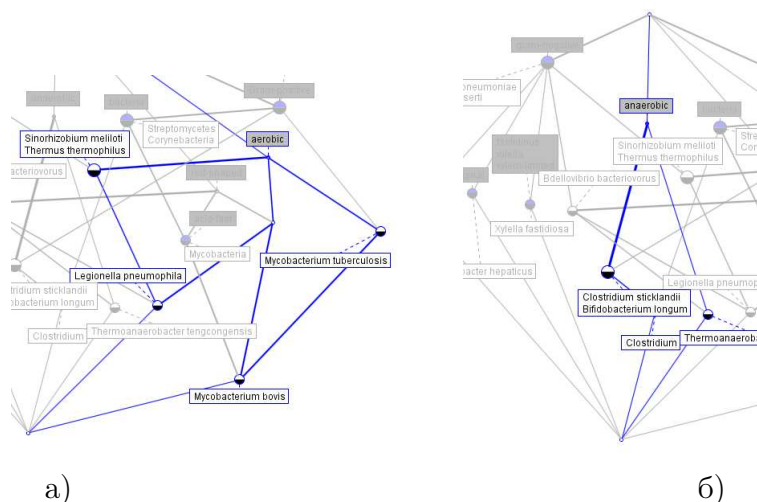


Рис. 4. Виды, отражающие иерархии формальных понятий, содержащих свойства аэробности бактерий в качестве атрибутов.

Однако, на рис. 3 и 4 общие количества бактерий не совпадают: на рис. 3 виды содержат все 20 бактерий (10 на рис. 3-а и 10 на рис. 3-б), а на рис. 4 – только 9 бактерий. Это связано с тем, что соответствующие тексты не содержат сведений об аэробности некоторых бактерий.

**Закключение.** Главным преимуществом разработанной системы извлечения фактов является возможность не только поиска отдельных ключевых слов, но также извлечения понятий, соответствующих используемой в текстовых данных терминологии.

Недостатком системы является необходимость её настройки на тексты определённой тематики. Применение корпусов текстов позволяет использовать их разметку при настройке, что сокращает объем операций, выполняемых с данными.

Развитие функциональных возможностей системы в настоящее время выполняется в следующих направлениях.

1. Применение многомерных формальных контекстов с целью более глубокого отображения семантики текста в моделях. Многомерный контекст позволяет связывать объекты и их атрибуты с условиями, при которых они возникают. Такие условия чаще всего обозначаются в текстах глаголами. В результате предикатная форма в предложении, отражающая логику фрагмента текста, может быть без потерь отображена в концептуальной модели.

2. Исследование симметрий формальных контекстов и развитие метода их декомпозиции, рассмотренного в работе [9]. Очевидно, что требование частичной упорядоченности множеств объектов и атрибутов не является строгим в задачах анализа текстов. Перестановки элементов этих множеств могут сохранять контекст семантически инвариантным, но приводить его к блочно-диагональной форме. Применение данного свойства симметрии формальных контекстов существенно уменьшает вычислительную сложность их обработки, что имеет принципиальное значение для концептуальных моделей высокой размерности.

## Литература

- [1] Kao A., Poteet S. *Natural Language Processing and Text Mining*. – Springer-Verlag. London, 2007.
- [2] Hogenboom F., Frasinca F., Kaymak U., de Jong F., Caron Emiel. A Survey of Event Extraction Methods from Text for Decision Support Systems // *Decision Support Systems*. Vol. 85, P. 12–22, 2016.
- [3] Sowa J. F. *Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine*. – Addison-Wesley. London. 1984.
- [4] Ganter Bernhard, Stumme Gerd, Wille Rudolf. *Formal Concept Analysis: Foundations and Applications, Lecture Notes in Artificial Intelligence, №3626*. – Springer-Verlag. Berlin, 2003.
- [5] Богатырев М. Ю. Извлечение фактов из текстов естественного языка с применением концептуальных графовых моделей // *Известия ТулГУ*, вып. 7 ч. 1, 2016. – С. 198–207.
- [6] Mikhail Bogatyrev. Conceptual Modeling with Formal Concept Analysis on Natural Language Texts. Proceedings of the XVIII International Conference “Data Analytics and Management in Data Intensive Domains” (DAMDID/RCDL’2016), Ershovo, Russia, October 11–14, 2016. – P. 50–57.
- [7] Miwa M., Ananiadou S. Adaptable, high recall, event extraction system with minimal configuration // *BMC Bioinformatics*. 2015;16(10):1–11.
- [8] Ratkovic Z., Golik W., Warnier, P. Event extraction of bacteria biotopes: a knowledge-intensive NLP-based approach // *BMC Bioinformatics* 2012, 13, (Suppl 11): S8, P. 1–11.
- [9] Богатырев М. Ю. Алгебраические модели в технологии извлечения фактов из текстовых данных // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015. Материалы научной конференции*. – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 186–191.

## МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ СПЕКТРОВ КОРРЕЛИРУЮЩИХ НАБЛЮДАЕМЫХ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ

Зуев С. В., Каспаров А. А., Конобеевский Е. С.

Институт ядерных исследований РАН

Москва

e-mail: kasparov200191@gmail.com, konobeev@inr.ru, zuyev@inr.ru

**Kasparov A. A., Konobeevski E. S, Zuyev S. V. A method for optimizing spectra of correlating observables in nuclear reactions.** A computer program which allows carrying out the optimization of spectra of correlating observables in nuclear reactions is described.

Описана компьютерная программа, позволяющая проводить оптимизацию спектров коррелирующих наблюдаемых в ядерных реакциях.

В результате экспериментального исследования могут быть получены зависимости нескольких искомым величин от параметров – например,  $A(a)$  и  $B(b)$ . Если эти величины не связаны какими либо связями, т. е. не коррелируют, например,  $A_i(x) = A_0 \cdot \text{СЛЧИС}()$  и  $B_i(y) = B_0 \cdot \text{СЛЧИС}()$ , где  $\text{СЛЧИС}()$  – случайно выбранное число в интервале  $(0, 1)$ , то двумерная диаграмма  $XY$  не будет содержать каких-либо особенностей, а проекции на оси  $X$  и  $Y$  будут представлять равномерный спектр от 0 до  $A_0$ , и от 0 до  $B_0$ , соответственно. Однако, если величины  $A$  и  $B$  коррелируют, т. е. вероятность получения значения определенных  $A_j$  и  $B_j$  отличается от среднего значения по всему интервалу возможных значений, то на двумерной диаграмме могут появиться определённые выделенные области, а их проекции на оси координат дадут выраженные структуры в спектрах.

Однако, хотя проецируемые области могут быть достаточно хорошо локализованы на двумерных диаграммах, их проекции на оси могут приводить к спектрам с “замытыми” структурами. Математическими методами можно получить оптимизированные одномерные спектры наблюдаемых из двумерных диаграмм коррелирующих переменных. Одним из таких методов оптимизации является поворот осей координат на некоторый угол, так что проекция коррелирующей переменной на одну из осей координат дает одномерный спектр с гораздо более выделенной структурой.

В качестве примера можно рассмотреть исследование ядерной реакции  $n + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^6\text{Li} + n + n$ . Данная реакция может идти через образование в промежуточном состоянии динейтронного состояния с определенной энергией  $n + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^6\text{Li} + {}^2n \rightarrow {}^6\text{Li} + n + n$ , которое затем распадается на два нейтрона. При этом энергия вторичного нейтрона может зависеть как от энергии динейтронного состояния, так и от энергии второго вылетающего нейтрона и от энергии вылетающего ядра  ${}^6\text{Li}$ . На рис. 1а показана двумерная диаграмма  $E_{n1} - E_{n2}$  для всех событий реакции  $n + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^6\text{Li} + n + n$  (темные точки), и для событий реакции, проходящей через промежуточное состояние  ${}^2n$ -системы с энергией

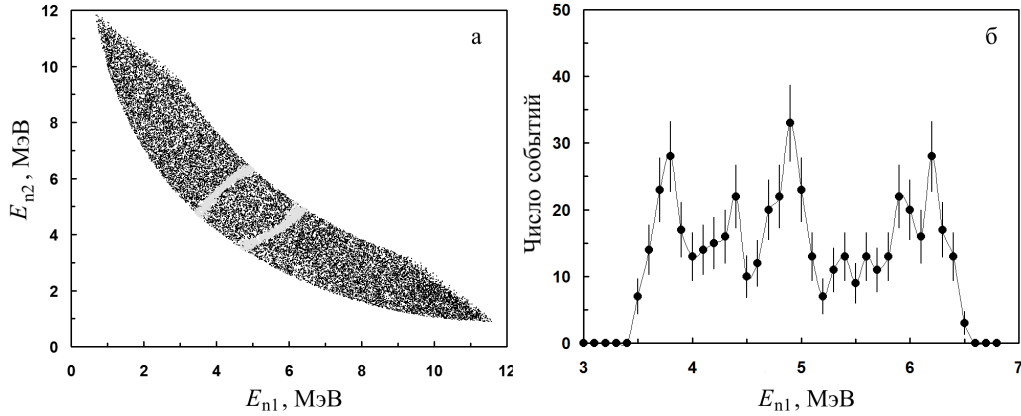


Рис. 1. а – двумерная диаграмма  $E_{n1}-E_{n2}$ . Черным цветом указаны все события для реакции  $n + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^6\text{Li} + n + n$ , серым цветом отмечены события, проходящие через промежуточное состояние с  $\varepsilon_{nn} = 60 \pm 10$  кэВ; б – энергетический спектр нейтронов (проекция на ось  $X$ ) для событий с  $\varepsilon_{nn} = 60 \pm 10$  кэВ.

$60 \pm 10$  кэВ (серые точки). Кинематическое моделирование реакции проводилось с помощью программы, предназначенной для изучения реакций с тремя частицами в конечном состоянии [1].

На двумерной диаграмме видны выделенные области (серые точки), соответствующие событиям, проходящим через промежуточное состояние. Однако энергетические спектры нейтронов, представляющие цель исследования, получаемые как проекции на оси координат, не дают четкой картины (рис. 1б). При этом видно, что обе области на рис. 1а группируются симметрично относительно некоторого центра вращения.

Оптимизация энергетического спектра нейтронов проводится путем поворота осей координат на некоторый угол  $\alpha$  и переходу к новым смешанным переменным:

$$E'_1 = E_1 \cos \alpha - E_2 \sin \alpha, \quad (1)$$

$$E'_2 = E_1 \sin \alpha + E_2 \cos \alpha, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – угол поворота,  $E_1$  и  $E_2$  – кинетические энергии нейтронов до поворота,  $E'_1$  и  $E'_2$  – координаты после поворота (см. рис. 2).

Для поиска оптимального угла поворота была создана вычислительная программа для Microsoft Excel на языке Visual Basic for Applications. В программе подбирается угол поворота осей координат, при котором одномерный спектр в координатах  $E'_1$  (рис. 2б) имеет наилучшее разделение. В ходе подбора были получены спектры для различных углов поворота. Было обнаружено, что пики могут иметь несимметричный вид с “завалом” в область между пиками (рис. 3).

В программе два асимметричных пика спектра  $E'_1$  аппроксимируются суммой четырёх гауссианов вида:

$$y = A \cdot \exp\left(\frac{\ln 0.5 \cdot (x - x_0)^2}{b^2}\right), \quad (3)$$

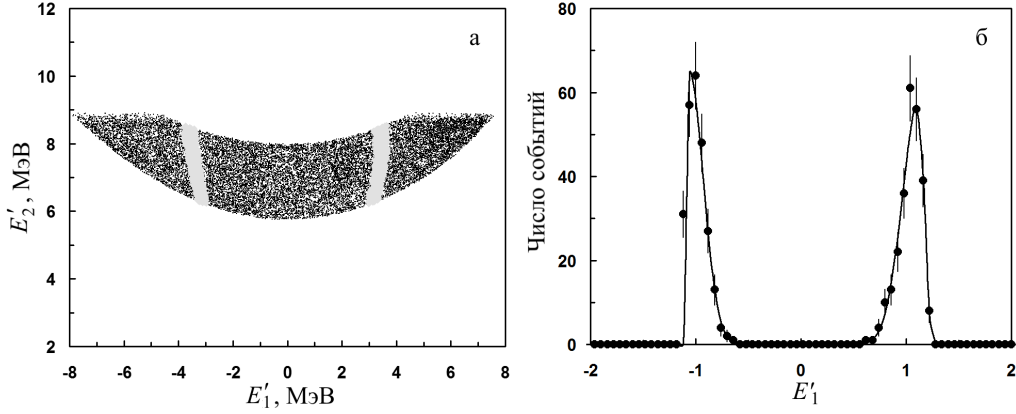


Рис. 2. а – двумерная диаграмма  $E'_1 - E'_2$  после поворота первоначальной диаграммы (рис. 1а) на угол  $45^\circ$ . Обозначения те же, что и на рис. 1а.; б – соответствующий спектр  $E'_1$  для событий с  $\varepsilon_{nn} = 60 \pm 10$  кэВ.

где:  $A$  – максимальная амплитуда,  $x_0$  – положение максимальной амплитуды,  $b$  – полная ширина на половине высоты. При этом первый пик аппроксимируется суммой двух гауссианов вида (3):

$$y_{11} = A_1 \cdot \exp\left(\frac{\ln 0.5 \cdot (x - x_{01})^2}{b_{11}^2}\right), \quad x \leq x_{01}, \quad (4)$$

$$y_{12} = A_1 \cdot \exp\left(\frac{\ln 0.5 \cdot (x - x_{01})^2}{b_{12}^2}\right), \quad x > x_{01}, \quad (5)$$

а второй –

$$y_{21} = A_2 \cdot \exp\left(\frac{\ln 0.5 \cdot (x - x_{02})^2}{b_{21}^2}\right), \quad x \leq x_{02}, \quad (6)$$

$$y_{22} = A_2 \cdot \exp\left(\frac{\ln 0.5 \cdot (x - x_{02})^2}{b_{22}^2}\right), \quad x > x_{02}, \quad (7)$$

где для первого пика выполняется условие  $b_{11} \leq b_{12}$ , а для второго –  $b_{21} \geq b_{22}$ . Здесь также как и для (3):  $A_1$  и  $A_2$  – максимальные амплитуды и  $x_{01}$  и  $x_{02}$  – положения максимальных амплитуд, соответственно, первого и второго пика,  $b_{11}$  и  $b_{12}$  – полная ширина на половине высоты левого и правого гауссиана первого пика, а  $b_{21}$  и  $b_{22}$  – полная ширина на половине высоты левого и правого гауссиана второго пика.

Для каждого угла поворота из заданного диапазона углов проводится процедура фитирования, в процессе которой определяются наилучшие значения параметров  $A$ ,  $x_0$  и ширин  $b$  каждого из гауссианов. В процессе подгонки минимизируется значение  $\chi^2$  определяемое выражением:

$$\chi^2(A, x_0, b) = \sum_x \frac{(f_e(x) - f_m(x))^2}{f_e(x)}, \quad (8)$$

где  $f_e(x)$  – значения экспериментальных точек, а  $f_m(x)$  – значения моделированных точек.

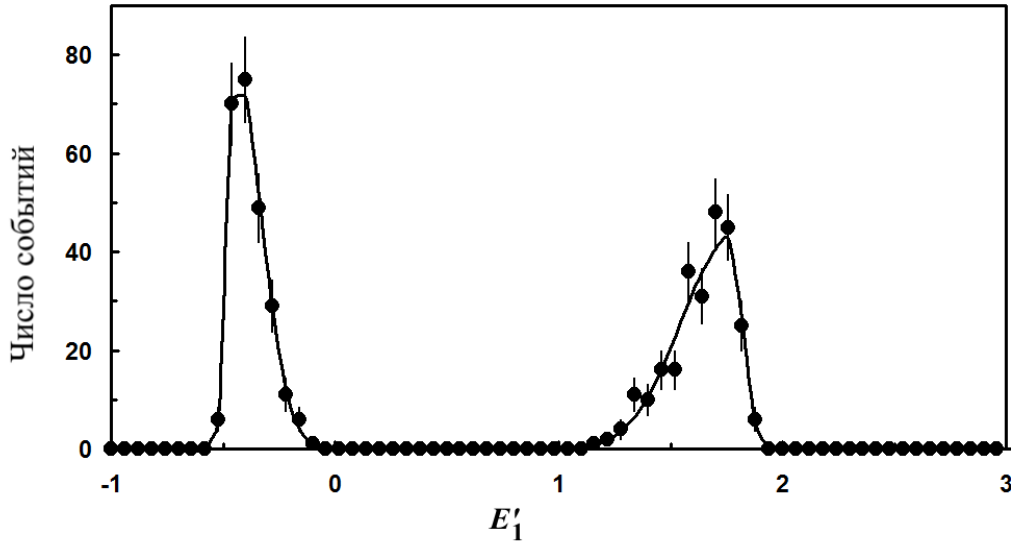


Рис. 3. Спектр для событий с  $\varepsilon_{nn} = 60 \pm 10$  кэВ (точки) и результаты подгонки спектра  $E'_1$  суммой гауссианов (сплошная линия).

Для количественного сравнения качества разделения пиков вычисляется параметр  $FOM$  (*Figure of Merit*) – показатель качества разделения:

$$FOM = \frac{|x_{01} - x_{02}|}{0.5 \cdot (b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22})}. \quad (9)$$

Чем больше величина  $FOM$ , тем лучше разделение пиков. Для поиска наилучшего значения параметра  $FOM$  в программе предусмотрен цикл прохода по заданному интервалу углов вблизи заранее выбранного угла, а также возможность изменять шаг по углу. Результаты работы программы сохраняются в отдельной таблице со значениями углов поворота и соответствующих им значений параметра  $FOM$ ,  $\chi^2$  и параметров  $A$ ,  $x_0$  для каждого пика и значения ширины  $b$  каждого из гауссианов. Строится график зависимости  $FOM$  от угла поворота (рис. 4).

Таким образом, в работе реализована возможность оптимизации спектров коррелирующих наблюдаемых в ядерных реакциях. Анализ полученных данных позволяет определить наилучший угол поворота, при котором обеспечивается максимум  $FOM$  для проекции на соответствующую ось, и соответственно, оптимальная форма спектров коррелирующих наблюдаемых.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-32-00743 мол\_а.

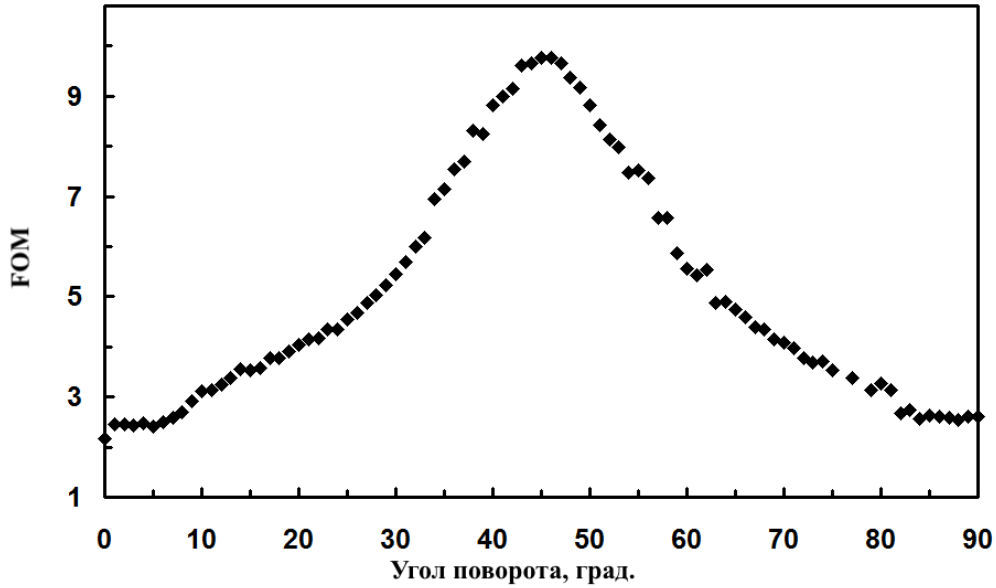


Рис. 4. График зависимости  $FOM$  от угла поворота осей координат для переменной  $E'_1$ .

## Литература

- [1] Конобеевский Е. С., Каспаров А. А., Зуев С. В. Программа моделирования экспериментов по исследованию реакций с тремя частицами в конечном состоянии // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2014. – Т. 78(5). – С. 527–531.

УДК 517.955+004.94

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Подорога А. В., Тихонов И. В.

Московский государственный университет

имени М. В. Ломоносова

Москва

e-mail: anastasiapodoroga@gmail.com, ivtikh@mail.ru

**Podoroga A. V., Tikhonov I. V. Computer simulation of solutions to the quasilinear equation of the traffic flow.** The numerical methods for solving the quasilinear equation of the traffic flow are discussed. A special consequence of the stabilization of traffic flows on the ring road is observed.

Обсуждаются численные методы решения квазилинейного уравнения дорожного движения. Отмечено специальное следствие о стабилизации транспортных потоков на кольцевой автодороге.



При математическом описании процессов дорожного движения широко распространен макроскопический подход, при котором транспортный поток интерпретируют как специфический поток сплошной среды со своими особыми свойствами (см. [1], [2]). Основными характеристиками являются координата  $x$  вдоль дорожного полотна, время  $t$ , плотность потока  $\rho(x, t)$ , скорость потока  $v(x, t)$  и, наконец, интенсивность потока  $q(x, t)$ , означающая усредненное число автомобилей, проходящих через точку  $x$  в момент времени  $t$ .

Величины  $\rho$ ,  $v$ ,  $q$  являются зависимыми — они связаны стандартной формулой

$$q = \rho v. \quad (1)$$

Специфику транспортных задач отражает дополнительное предположение о зависимости скорости потока от его плотности: при увеличении плотности потока машины водители снижают скорость, чтобы обеспечить безопасность движения. Таким образом, скорость является непрерывной, монотонно убывающей функцией плотности:

$$v = V(\rho) \downarrow, \quad 0 < \rho \leq \rho_{\max}. \quad (2)$$

Значение  $\rho = 0$  отвечает нулевой плотности, при стремлении к которой реализуется максимальная возможная скорость  $v_{\max} = V(0+)$ . Значение  $\rho_{\max}$  соответствует максимальной плотности потока “в пробке”, при которой все автомобили стоят, т. е.  $V(\rho_{\max}) = 0$ . Учитывая (1), (2), получаем ключевое соотношение, утверждающее, что интенсивность транспортного потока зависит от его плотности:

$$q = \rho V(\rho) = Q(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}. \quad (3)$$

Зависимость (3) называют *фундаментальной диаграммой* дорожного движения. Функция  $Q(\rho)$  обычно предполагается непрерывной, выпуклой вверх и равной нулю на границе области определения:  $Q(0) = Q(\rho_{\max}) = 0$ .

Для описания движения потока используют естественный аналог уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t), \quad q = q(x, t). \quad (4)$$

Соотношение (4) выражает *закон сохранения* (автомобилей) и с учётом (3) дает квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t), \quad (5)$$

относительно неизвестной функции  $\rho$ . Уравнение (5) применяют при изучении транспортных потоков на протяженных участках шоссе без дополнительных съездов и въездов машин. При заданном начальном распределении плотности возникает задача Коши с условием

$$\rho(x, 0) = \varphi(x). \quad (6)$$

Из общей теории известно (см. [2]–[5]), что гладкое решение задачи (5), (6) может вообще отсутствовать, или же изначально гладкое решение может потерять свою гладкость через конечное время  $t = t(\varphi)$ . Для таких решений характерны

сильные разрывы, называемые *ударными волнами*. Поэтому приходится заменять уравнение (5) его проинтегрированной версией

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x, t) dx = Q(\rho(\alpha, t)) - Q(\rho(\beta, t)), \quad (7)$$

считая, что равенство (7) выполнено для почти всех допустимых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  при почти всех  $t > 0$ . Соответствующую функцию  $\rho(x, t)$  называют *обобщённым решением* квазилинейного уравнения (5). Интегральное тождество (7) используют ещё в случае негладкой фундаментальной диаграммы (3), например, когда функция  $Q(\rho)$  является кусочно линейной на  $[0, \rho_{\max}]$ . Соотношения (5) и (7) также интерпретируют как инфинитезимальные версии закона сохранения.

Компьютерное моделирование разрывных обобщённых решений представляет серьёзные трудности. Для сопоставления разных подходов нами выполнен ряд численных экспериментов, основанных как на известных методах, так и на некоторых новых соображениях. Эксперименты проводились для периодических решений

$$\rho(x + L, t) = \rho(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

с фиксированным значением  $L > 0$ . Предположение (8) соответствует движению замкнутого транспортного потока по кольцевому шоссе длины  $L$ . Данная гипотеза удобна с технической точки зрения (см. также [6], [7]).

Приведем краткий обзор рассмотренных способов численного решения задачи Коши (5), (6) вместе с сопутствующими комментариями.

Использование традиционных **разностных схем** для квазилинейных уравнений вида (5) приводит, как правило, к заметным искажениям формы истинного решения: непрерывные, но негладкие решения со временем неоправданно сглаживаются; если же имеются разрывы, то в их окрестностях возникают сильные осцилляции, противоречащие практическому смыслу задачи. Подобные эффекты наблюдаются, например, при реализации модифицированной разностной схемы “с полушагом”, предложенной в [8, с. 527].

Намного более точным является другой подход, основанный на классическом аналитическом **методе характеристик** (см. [3]–[5], [9]). На фазовой плоскости  $(x, t)$  через каждую точку  $x_0$  оси  $Ox$  проводится прямая линия

$$x(t) = x_0 + Q'(\varphi(x_0))t, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

называемая *характеристикой* уравнения (5). Число  $\varphi(x_0)$  определяется начальным условием (6). Вдоль линии (9) классическое решение уравнения (5) должно сохранять постоянное значение, совпадающее с  $\varphi(x_0)$ . При пересечении двух характеристик классическое решение перестает существовать, и возникает сильный разрыв решения (типа ударной волны) с уравнением  $x = \xi(t)$ . Скорость движения разрыва определяется известным *условием Гюгонио*

$$\xi'(t) = \frac{Q(\rho^+) - Q(\rho^-)}{\rho^+ - \rho^-}, \quad (10)$$

где

$$\rho^+ \equiv \rho(\xi(t) + 0, t), \quad \rho^- \equiv \rho(\xi(t) - 0, t). \quad (11)$$

При практической реализации формул (10), (11) значение  $\rho^+$  вычисляют по данным с правой характеристики, пришедшей на разрыв, а значение  $\rho^-$  — по данным с левой характеристики. Если на плоскости  $(x, t)$  из-за расхождения характеристик возникают “пустые” (незаполненные) области, то их заполняют дополнительным *веером характеристик*, соответствующим *волне разрежения*. Для вычисления значений решения  $\rho(x, t)$  на характеристиках веера используют (в согласии с общей теорией) функцию  $\rho = R(k)$ , обратную к производной

$$k = Q'(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}. \quad (12)$$

Если функция  $Q(\rho)$  является негладкой (кусочно дифференцируемой), то в описанные правила вносят поправки, учитывающие имеющиеся разрывы  $Q'(\rho)$ .

Любопытную описательную модель, основанную на схожих принципах, предложили Лайтхилл и Уизем [9] в своем теоретическом исследовании по теории транспортных потоков. Отталкиваясь от их идей, нам удалось создать компьютерную программу, реализующую все главные закономерности метода характеристик. Сначала на плоскости  $(x, t)$  по заданному начальному условию (6) происходит построение самого поля характеристик с выбранной дискретизацией по переменной  $x$ . Текущий шаг по  $t$  на каждой итерации определяется через минимальное время до очередного пересечения соседних характеристик. При этом сразу учитываются возникающие сильные разрывы и необходимость построения дополнительных *вееров*. Каждой линии образовавшегося поля приписано соответствующее значение плотности  $\rho$ . По полученному массиву данных происходит восстановление решения  $\rho(x, t)$  в любой фиксированный момент  $t \geq 0$ . Точность решения зависит от шага дискретизации по  $x$ .

При таком подходе возникают естественные проблемы. Необходимая точность вычислений чаще всего требует значительного числа характеристик, причем их количество существенно зависит от выбора начального условия (6). Это приводит к вычислительным сложностям с расчётами, использующими большие объемы памяти. Кроме того, при реализации метода для каждой конкретной диаграммы (3) приходится проводить свою теоретическую подготовку по установлению зависимости (12) и ее обращению в виде  $\rho = R(k)$ . Ряд дополнительных поправок надо вносить в случае негладкой (кусочно дифференцируемой) фундаментальной диаграммы (3).

Несмотря на отмеченные сложности, метод характеристик позволяет достаточно точно восстанавливать решения задачи Коши (5), (6) на основе понятного аналитического алгоритма. Отлаженная программа хорошо справляется с проблемой сильных разрывов и не размывает негладкие решения.

Еще один специальный способ для численного решения квазилинейных дифференциальных уравнений дает **метод частиц** (см., например, [10]). Применительно к нашему случаю идея метода частиц состоит в том, чтобы представить эволюцию плотности  $\rho(x, t)$  как движение набора условных частиц

$$П_1, П_2, \dots, П_N, \quad (13)$$

упорядоченно расположенных на оси  $Ox$ . Каждая частица  $\Pi_i$  представляет собой элемент, наделенный координатой  $x_i$ , массой  $m_i$  и протяженностью  $\Delta_i$ . Высота частицы соответствует значению плотности  $\rho_i$ , существующей в точке  $x_i$  в текущий момент времени  $t$ . Справедлива формула  $\rho_i = m_i/\Delta_i$ .

Движение частиц подчиняется определённым правилам. Так, масса  $m_i$  каждой частицы  $\Pi_i$  не меняется с течением времени (закон сохранения массы). Скорость движения определяется соотношением  $v_i = V(\rho_i)$ , обусловленным исходным законом (2). Упорядоченность набора (13) не должна нарушаться: при сближении или разъезжании частиц они соответственно изменяют свои протяженности, и, как следствие, происходит изменение плотности. В итоге в каждый момент времени  $t$  в соответствующей точке  $x_i$  получаем некоторое значение плотности  $\rho_i$ . Само решение  $\rho(x, t)$  строится как линейная интерполяция полученной сеточной функции  $\rho_i = \rho_i(x_i, t)$  (см. рис. 1).

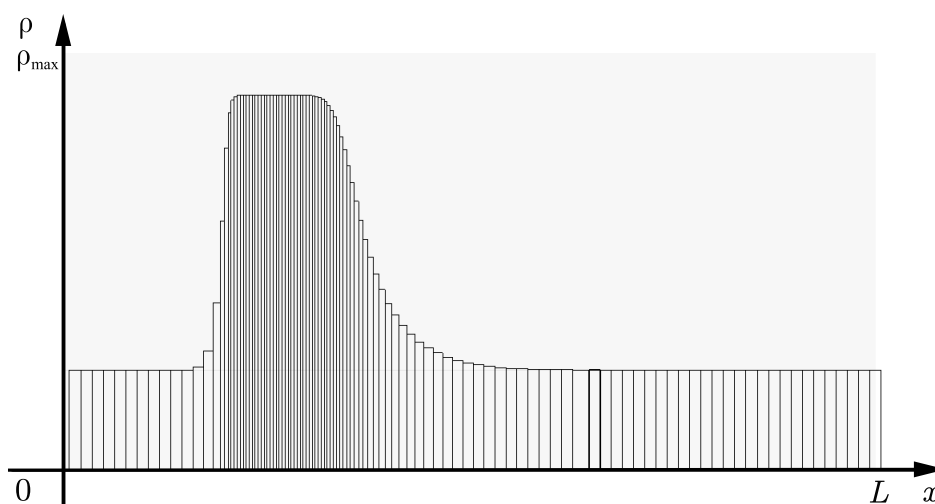


Рис. 1. Скриншот программы, реализующий метод частиц.

Понятно, что идея метода связана с физикой задачи — каждая частица представляют собой условную “группу автомобилей”, расположенную с нужной плотностью на соответствующем участке дороги. Достоинство метода проявляется в строгом выполнении закона сохранения “автомобилей”, а также в том, что для реализации алгоритма достаточно знать основную зависимость  $V(\rho)$ . Сложность состоит в том, что для корректной работы программы требуется специальное согласование шага по временной переменной  $t$  с выбранными параметрами набора (13). Без такого согласования трансформация частиц на некоторых режимах будет противоречить естественным законам эволюции плотности. Например, могут образовываться некорректные сильные уплотнения частиц с большими значениями  $\rho$  сзади группы частиц с меньшей плотностью. Кроме того, при длительной работе программы все равно наблюдается постепенное размывание негладких решений.

В заключение обсудим новый **метод движения разрывов**, который совмещает некоторые идеи метода характеристик и метода частиц.

Введем специальный класс кусочно линейных фундаментальных диа-

грамм, считая, что

$$Q(\rho) = k_j \rho + b_j, \quad \rho_{j-1}^* \leq \rho \leq \rho_j^*, \quad j = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Здесь  $n \geq 2$  — фиксированное линейных участков (или *транспортных фаз*) с границами

$$0 = \rho_0^* < \rho_1^* < \dots < \rho_n^* = \rho_{\max}, \quad Q(0) = Q(\rho_{\max}) = 0. \quad (15)$$

Числовые коэффициенты  $k_1, b_1, \dots, k_n, b_n$  выбраны так, чтобы функция  $Q(\rho)$ , заданная в (14), была непрерывной и выпуклой вверх на  $[0, \rho_{\max}]$ . Подобные фундаментальные диаграммы весьма типичны для теории дорожного движения, например, простейшая диаграмма вида (14) при  $n = 2$  используется в двухфазной модели Нагеля–Шрекенберга (см. [6], [11], [12]).

Ограничимся также удобным классом кусочно постоянных начальных условий (6). Выберем подобную функцию  $\varphi(x) \neq \text{const}$ . Тогда структура обобщенного решения задачи Коши (5), (6) оказывается достаточно простой: функция  $\rho(x, t)$  будет иметь разрывы, между которыми сохраняются постоянные значения. Эти разрывы эволюционируют с течением времени и являются основными объектами следующего алгоритма.

Пусть  $x = \xi_i(t)$  — текущая координата  $i$ -го разрыва функции  $\rho(x, t)$ . Постоянные значения плотности справа и слева от разрыва обозначим соответственно через  $\rho_i^+$  и  $\rho_i^-$ . Пользуясь условием Гюгонио (10), запишем формулу для скорости движения разрыва

$$\xi_i'(t) = \frac{Q(\rho_i^+) - Q(\rho_i^-)}{\rho_i^+ - \rho_i^-}. \quad (16)$$

Скорость (16) остается постоянной, пока данный разрыв сохраняется.

При пересечении двух или нескольких разрывов происходит их объединение в один результирующий разрыв, у которого значение плотности слева соответствует значению плотности слева для самого левого из пересекающихся разрывов, а значение плотности справа — значению плотности справа для самого правого из пересекающихся разрывов. Каждая итерация по времени  $t$  происходит от одного момента пересечения разрывов до другого, следующего момента пересечения разрывов. В результате работы компьютерной программы получается карта разрывов на плоскости  $(x, t)$  (см. рис. 2).

В намеченный план приходится вносить лишь одну поправку, связанную с проблемой *единственности решения* и известным *условием Олейник* [13]. Допустим, например, что в начальный момент времени  $t = 0$  значение постоянной плотности  $\rho_i^+$  справа от  $i$ -го разрыва оказалось меньше значения постоянной плотности  $\rho_i^-$  слева от того же разрыва, причем

$$\rho_{m-1}^* \leq \rho_i^+ < \rho_m^* < \rho_i^- \leq \rho_{m+1}^*$$

со значениями  $\rho_{m-1}^* < \rho_m^* < \rho_{m+1}^*$  из набора (15). Тогда надо заменить исходный разрыв на два разрыва с последовательно убывающими постоянными плотностями  $\rho_i^-, \rho_m^*, \rho_i^+$ . Эти два разрыва эволюционируют из точки  $(\xi_i(0), 0)$  в согласии с условием Гюгонио.

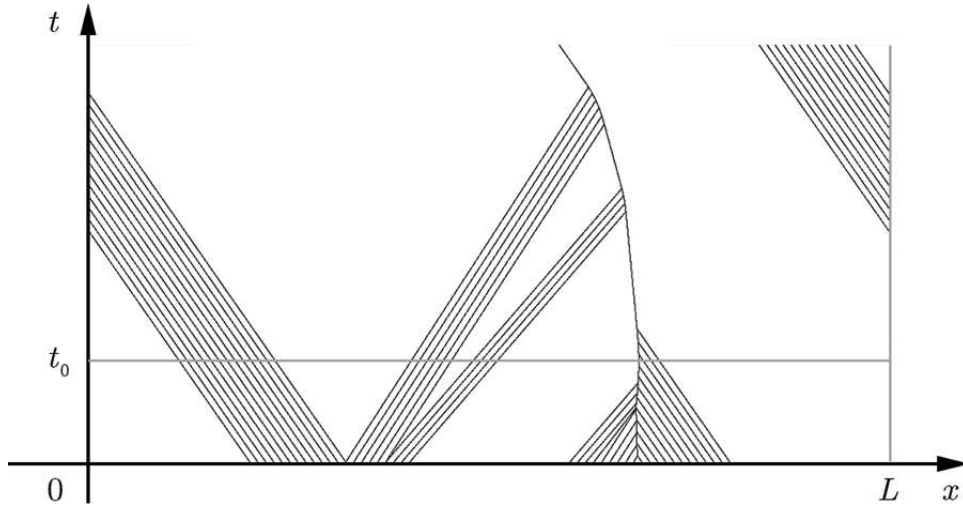


Рис. 2. Карта разрывов на плоскости  $(x, t)$ . Вид решения  $\rho(x, t)$  при  $t = t_0$  представлен на рис. 3.

В более сложном варианте может оказаться, что

$$\rho_{m-1}^* \leq \rho_i^+ < \rho_m^* < \rho_{m+p}^* < \rho_i^- \leq \rho_{m+p+1}^*$$

со значениями  $\rho_{m-1}^* < \rho_m^* < \rho_{m+p}^* < \rho_{m+p+1}^*$  из набора (15). Тогда надо заменить исходный разрыв на  $p+2$  разрыва с последовательно убывающими плотностями

$$\rho_i^-, \rho_{m+p}^*, \dots, \rho_m^*, \rho_i^+,$$

где “многоточие” между  $\rho_{m+p}^*$  и  $\rho_m^*$  означает перечисление всех промежуточных плотностей из набора (15) (если такие есть).

В результате на плоскости  $(x, t)$  возникает *веер разрывов*, исходящий из точки  $(\xi_i(0), 0)$  и сохраняющий кусочно постоянную структуру функции  $\rho(x, t)$ . (Именно здесь, при построении веера, для сохранения кусочно постоянной структуры решения понадобилось требование (14) о кусочно линейной природе фундаментальной диаграммы  $Q(\rho)$ .)

Аналогия с веером характеристик понятна. Специально подчеркнем, что такие конструкции волн разрежения посредством правильно организованных “вееров” диктуются условием Олейник [13] по отбору единственного *энтропийного решения* (см. также [3]–[5]).

В нашем новом методе веер разрывов приходится генерировать только на первой итерации, после которой разрывы лишь объединяются. Общее число первичных разрывов элементарно вычисляется, исходя из заданного начального условия (6) и структуры (14) фундаментальной диаграммы  $Q(\rho)$ . По координатам разрывов и постоянным значениям плотности между ними происходит однозначное восстановление решения  $\rho(x, t)$  при любом желательном  $t = t_0$  (см. рис. 3).

Алгоритм работает быстро и точно, практически не искажая форму истинного решения. Единственный его недостаток связан с ограниченной областью применимости: метод движения разрывов в своем каноническом варианте

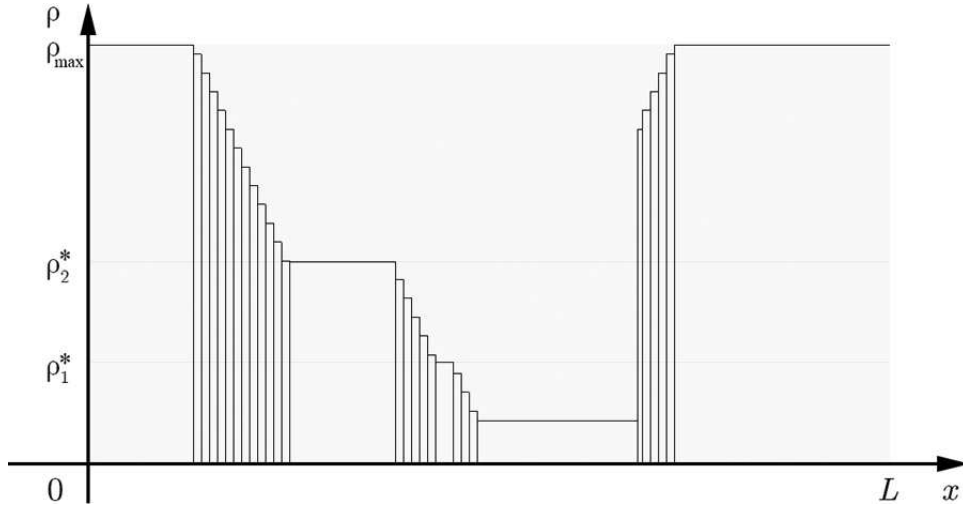


Рис. 3. Скриншот программы, реализующей метод движения разрывов при выборе трехфазной фундаментальной диаграммы  $Q(\rho)$ . Представлен вид решения при  $t = t_0$  для карты разрывов с предыдущего рис. 2. Полностью отсутствует размытие решения, заметное в методе частиц.

подходит лишь для кусочно линейных фундаментальных диаграмм  $Q(\rho)$  и кусочно постоянных начальных функций  $\varphi(x)$ .

Впрочем, при наличии кусочно гладкой диаграммы  $Q(\rho)$  и кусочно непрерывной начальной функции  $\varphi(x)$  можно использовать соображения аппроксимации с заменой: “кусочно гладкая диаграмма  $Q(\rho)$ ”  $\rightarrow$  “кусочно линейная диаграмма  $\tilde{Q}(\rho)$ ” и “кусочно непрерывная функция  $\varphi(x)$ ”  $\rightarrow$  “кусочно постоянная функция  $\tilde{\varphi}(x)$ ” (взяв достаточно частые измельчения). Опыты показывают, что точность решения при такой аппроксимации хорошо сохраняется значительное время  $0 \leq t \leq T$ .

Помимо прочего, кусочно линейные фундаментальные диаграммы обладают важной особенностью: они обеспечивают полную стабилизацию периодических решений за конечное время. Компьютерные эксперименты и наработанный опыт позволяют нам сформулировать следующий результат.

Рассматриваем квазилинейное уравнение (5) с кусочно линейной фундаментальной диаграммой вида (14). Пусть  $\varphi(x)$  — произвольная кусочно непрерывная (не обязательно кусочно постоянная)  $L$ -периодическая функция на  $\mathbb{R}$ , удовлетворяющая условию  $0 \leq \varphi(x) \leq \rho_{\max}$  при  $x \in \mathbb{R}$ . Пусть

$$M = \int_0^L \varphi(x) dx, \quad (17)$$

причём

$$\rho_{j-1}^* L \leq M \leq \rho_j^* L \quad (18)$$

с некоторыми значениями  $\rho_{j-1}^*, \rho_j^*$  из набора (15). Предположим, что  $\rho(x, t)$  — обобщенное  $L$ -периодическое решение задачи Коши (5), (6) для указанной

функции  $\varphi(x)$ , точнее,  $\rho(x, t)$  — то решение, для которого выполнено условие единственности Олейник. Тогда существует такой момент времени  $t^* > 0$ , зависящий лишь от величины  $L > 0$  и параметров диаграммы (14), что

$$\rho(x, t) = f(x + k_j t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq t^*. \quad (19)$$

Здесь  $f = f(s)$  — некоторая кусочно непрерывная  $L$ -периодическая функция на  $\mathbb{R}$ , ограниченная величинами

$$\rho_{j-1}^* \leq f(s) \leq \rho_j^*, \quad s \in \mathbb{R},$$

а коэффициент  $k_j$  взят из формулы (14) с тем же значением  $j$ , что и в (18).

Отмеченный результат требует строгого доказательства средствами теории квазилинейных дифференциальных уравнений, но его практический смысл полностью ясен. В случае кусочно линейной фундаментальной диаграммы  $Q(\rho)$  для любого замкнутого транспортного потока на кольцевой автодороге через некоторое время происходит стабилизация характера движения с последующим изменением плотности в виде бегущей волны (19). Скорость перемещения волны определяется соотношением между числом  $M$  из формулы (17) и параметрами фундаментальной диаграммы (14). Понятно, что  $M$  выражает общее число автомобилей, расположенных на выбранном кольце. Частный случай указанного утверждения для двухфазной модели Нагеля–Шрекенберга обсуждался в предыдущем сообщении [12] (см. также [6], [7])

Мы признательны С. В. Богомолову за указание на метод частиц и весьма стимулирующие обсуждения. Авторы отмечают также вклад Г. А. Парафейникова, выполнившего ряд расчетов на основе разностных схем и по реализации метода частиц.

## Литература

- [1] Treiber M., Kesting A. Traffic Flow Dynamics. Data, Models and Simulation. — Berlin: Springer-Verlag, 2013. — 506 p.
- [2] Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / Под ред. А.В. Гасникова. Издание 2-е, испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2013. — 427 с.
- [3] Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. — М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. — 296 с. (Lax P. D. Hyperbolic Partial Differential Equations.)
- [4] Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. — 576 с. (Evans L. C. Partial Differential Equations.)
- [5] Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. (Учебное пособие). — М.: Мех-мат МГУ, 1999. — 96 с.
- [6] Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic // Journal de Physique I France. 1992. Vol. 2. No 12. — P.2221–2229.
- [7] Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Юмашев М. В. Математическое моделирование автотранспортных потоков. — М.: Мех-мат МГУ, 1999. — 31 с.



- [8] Бахвалов Н. С., Жидков Н. С., Кобельков Г. М. Численные методы / 7-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 636 с.
- [9] Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A, Math. and Physical Sciences. 1955. Vol. 229, No. 1178. – P. 317–345.
- [10] Богомолов С. В., Замараева А. А., Карабелли Х., Кузнецов К. В. Консервативный метод частиц для квазилинейного уравнения переноса // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38. № 9. – С. 1602–1610.
- [11] Подорога А. В., Тихонов И. В. Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015. – СПб.: РГПУ им. А. В. Герцена, 2015. – С. 209–213.
- [12] Подорога А. В., Тихонов И. В. О предельных состояниях замкнутых транспортных потоков на кольцевой автодороге // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016. – СПб.: РГПУ им. А. В. Герцена, 2016. – С. 222–228.
- [13] Олейник О. А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. № 2 (86). – С. 165–170.

## О МЯГКОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЛАНОВ

Флегонтов А. В.

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена,  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Санкт-Петербург  
e-mail: flegontoff@yandex.ru

**Flegontov A. V. On soft computing and optimal plans.** Considers the problem of applying methods for finding optimal solutions based on mathematical modeling and heuristic approaches to various cases when the decision has to take under ill-defined conditions. The subject area refers to the so-called «soft computing» uniting in the general class of imprecise, approximate methods of solution of problems, often do not have a solution in polynomial time. Approaches to solving this problem are illustrated by some examples.

**Keywords:** linear programming, simplex method, fuzzy sets, transportation problem, optimal plan, soft computing.

Рассматривается проблема применения методов нахождения оптимальных решений на основе математического моделирования и эвристических подходов в различных случаях, когда решение приходится принимать при недостаточно чётко определенных условиях. Рассматриваемая предметная область относится к так называемым «мягким вычислениям» объединяющим в общий класс неточные, приближённые методы решения задач, зачастую не имеющие решение за полиномиальное время. Подходы к решению указанной проблемы иллюстрируются на ряде примеров.

**Ключевые слова:** линейное программирование, симплекс-метод, нечёткие множества, транспортная задача, оптимальный план, мягкие вычисления.

Рассматриваются следующие, представляющие значительный интерес, задачи: транспортная задача линейного программирования; задача о загрузке транспортного средства штучными грузами (задача о ранце); задача управления запасами с нечётким спросом.

Приводятся некоторые практически полезные вычислительные преобразования для классических методов решений рассматриваемых задач [1], корреляции с «мягкими вычислениями» [1–6] и решения ряда примеров.

**А. Табличный симплекс–метод.** Для упрощения процесса решения исходные данные задачи линейного программирования (ЛП) при решении её классическим симплекс методом записываются в специальные симплекс–таблицы. Поэтому одна из модификаций симплекс метода получила название табличный симплекс метод [7].

Задача ЛП в каноническом виде записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = a_{0,1}x_1 + a_{0,2}x_2 + \dots + a_{0,n}x_n + b_0 \longrightarrow \max(\min), \\ a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{array} \right. \quad (A1)$$

Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – исходные переменные,  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$  – дополнительные переменные. Все дополнительные переменные принимаются в качестве базисных, а исходные переменные в качестве небазисных (дополнительные записываются в первый столбец симплекс–таблицы, а исходные в первую строку). При каждой итерации элементы симплекс–таблицы пересчитываются по определенным правилам в соответствии с известным алгоритмом симплекс–метода. Вначале приводим задачу ЛП к каноническому виду (A1). В случае, если в исходной задаче оптимизационный критерий – это максимизация, то знаки коэффициентов целевой функции  $F$  меняются на противоположные ( $a_{0,j} \rightarrow -a_{0,j}$ ), если минимизация, то остаются без изменений. Знаки коэффициентов граничных условий в случае неравенств типа « $\geq$ » также меняются на противоположные. В случае неравенств типа « $\leq$ » – коэффициенты остаются без изменений. Затем составляем симплекс–таблицу (таблица A1), соответствующую исходной задаче. Осуществляем проверку на допустимость, т. е. проверяем на положительность элементы столбца  $b$  свободных членов. Если среди них нет отрицательных элементов, то найдено допустимое решение (решение соответствующее одной из вершин многогранника условий) и переходим к следующему шагу. Если в столбце свободных членов имеются отрицательные элементы, то пересчитываем симплекс–таблицу согласно определённым правилам. Если же среди свободных членов есть отрицательные элементы, а в соответствующей строке их нет, то условия задачи считаются несовместны и решений у такой задачи нет. Если после пересчёта в столбце свободных членов остались отрицательные элементы, то возвращаемся к предыдущему шагу, если таких нет, то переходим к проверке на оптимальность. Если среди элементов симплексной таблицы, находящихся в строке  $F$  (не беря в расчёт элемент  $b_0$  – текущее значение целевой функции) нет отрицательных, то найденное решение является оптимальным решением. Если в строке  $F$  есть отрицательные элементы, то решение требует улучшения. Пересчитываем симплекс–таблицу по формулам преобразований.

Если невозможно найти ведущую строку, так как нет положительных элементов в ведущем столбце, то функция в области допустимых решений задачи не ограничена – алгоритм завершает работу. Если в строке  $F$  и в столбце свободных членов все элементы положительные, то найдено оптимальное решение.

**Пример 1.** С трёх нефтяных баз, расположенных в пунктах  $A_1, A_2, A_3$  (строки таблицы 1) осуществляется снабжение пунктов заправки горючим техникой  $B_1, B_2, B_3, B_4$  (столбцы таблицы 1). Возможности по отпуску горючего с баз (в тоннах) за рассматриваемый период (последний столбец), потребности в пунктах заправки (в тоннах) за рассматриваемый период (последняя строка), затраты на доставку тонны горючего с каждой базы на любой пункт заправки с учетом отпускной цены на базах (в тысячах рублей за тонну) указаны в табл. 1.

Таблица 1.

40	35	33	24	100
41	45	37	42	150
37	40	33	38	170
60	80	35	120	

Требуется, на основе построенной математической модели этой задачи, определить план подвоза горючего, требующий минимальных расходов и обеспечивающий горючим все пункты заправки в полном объеме.

Введя порядковые обозначения для исходных переменных, построим целевую функцию в виде:

$$40X_1 + 35X_2 + 33X_3 + 24X_4 + 41X_5 + 45X_6 + 37X_7 + 42X_8 + \\ + 37X_9 + 40X_{10} + 33X_{11} + 38X_{12} \longrightarrow \min$$

Воспользовавшись вычислительной программой, умеющей обрабатывать большое количество переменных [7], составляем исходную симплекс-таблицу, производим соответствующие матричные преобразования и окончательно получаем оптимальное решение  $F = 9835$  при значениях переменных равных:  $X_{10} = 80, X_9 = 60, X_{11} = 30, X_7 = 5, X_8 = 20, X_4 = 100$ .

Можно этим методом найти и некоторые варианты решения задачи о ранце.

**Пример 2.** Требуется загрузить самолёт грузоподъемностью 40т контейнерами. Всего имеется 4 типа контейнеров  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , весом  $(2, 3, 5, 7)$  в т/шт. и стоимостью  $(2, 5, 6, 10)$  в  $10^4$  руб./шт. соответственно. Определить вариант загрузки самолёта, при котором суммарная стоимость взятых контейнеров максимальна.

Целевая функция:

$$2X_1 + 5X_2 + 6X_3 + 10X_4 \longrightarrow \max.$$

Канонический вид задачи:

$$2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 7X_4 + X_5 = 40,$$

$$-1X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_6 = 0,$$

$$0X_1 - 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_7 = 0,$$

$$0X_1 + 0X_2 - 1X_3 + 0X_4 + X_8 = 0,$$

$$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 - 1X_4 + X_9 = 0.$$

В результате проведенных расчётов получим оптимальное решение  $F = 65$  при значениях переменных равных:  $X_2 = 13$ .

Эта задача имеет ещё вариант решения, а именно  $F = 65$  при значениях переменных равных:  $X_2 = 11$ ,  $X_4 = 1$ , которое таким методом не находится.

**В.** Транспортные задачи ЛП. При решении транспортной задачи классическими методами нужно задать исходные данные в виде запасов груза в  $i$ -м пункте отправления  $a_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), потребности  $j$ -го пункта назначения в грузе  $b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), а также матрицу тарифов (транспортных расходов)  $C = (c_{i,j})$ . Тогда в математической модели задачи транспортного типа, общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией вида:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \longrightarrow \min. \quad (B1)$$

Переменные  $x_{i,j}$  при этом должны удовлетворять ограничениям по запасам (B2), по потребностям (B3), и условиям неотрицательности (B4) в виде:

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (B2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} \geq b_j, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (B3)$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (j = 1, \dots, n). \quad (B4)$$

Подобные классические задачи решаются методом искусственного базиса. Метод применяется при наличии в системе ограничений и условий-равенств, либо условий-неравенств, и является модификацией табличного метода. Решение системы производится путём ввода искусственных переменных  $R_i$  со знаком, зависящим от типа оптимума, т. е. для исключения из базиса этих переменных последние вводятся в целевую функцию, если решается задача максимизации, с большими отрицательными коэффициентами  $M$ , имеющими смысл «штрафов» за ввод искусственных переменных, а в задачах минимизации – с положительными  $M$ . Таким образом, из исходной задачи получается новая  $M$ -задача (поэтому метод искусственного базиса так же называют  $M$ -методом).

Если в оптимальном решении -задачи нет искусственных переменных, тогда это решение есть оптимальное решение исходной задачи. Если же в оптимальном решении  $M$ -задачи хотя бы одна из искусственных переменных будет отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместна и исходная задача неразрешима.

**Пример 3.** Для материально-технического обеспечения четырех формирований МЧС, участвующих в ликвидации последствий чрезвычайной ситуации регионального масштаба, используются три поставщика материальных средств. Потребность в материальных средствах  $j$ -го потребителя ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) равна  $b_j$  (тонн). Возможности получения материальных средств в  $i$ -м ( $i = 1, 2, 3$ ) поставщике материальных средств равны  $V_i$  тонн. Затраты на закупку единицы материальных средств в  $i$ -м поставщике материальных средств и доставку её  $j$ -му потребителю материальных средств составляют  $C_{ij}$  рублей. Решением задачи является план перевозок материальных средств –  $x$ , т. е. объёмы подвоза материальных средств в ходе ликвидации последствий чрезвычайной ситуации от  $i$ -го поставщика материальных средств (ПМС)  $j$ -му потребителю материальных средств:

$$x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}).$$

Необходимо определить такой план перевозок материальных средств, при котором обеспечивалась бы достаточная экономическая эффективность и достаточная полнота их доставки формированиям, участвующим в ликвидации последствий чрезвычайной ситуации.

Исходные данные (значения коэффициентов целевой функции и правых частей ограничений по аналогии с табл. 1) приведены в табл. 2.

Как это видно из табл. 2, для удовлетворения всех потребностей в полном объёме запасов не хватает, поэтому потребности  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) рассматриваются как нечётко заданные.

Таблица 2.

92	122	208	386	200
62	92	180	355	250
73	115	200	367	390
220	240	200	220	

1. Попытка прямого решения.

Рассмотрим исходные данные задачи. Запас груза в  $i$ -м пункте отправления:  $a_1 = 200, a_2 = 250, a_3 = 390$ . Потребность  $j$ -го пункта назначения в грузе:  $b_1 = 220, b_2 = 240, b_3 = 200, b_4 = 220$ .

Целевая функция:

$$92x_{11} + 122x_{12} + 208x_{13} + 386x_{14} + 62x_{21} + 92x_{22} + 180x_{23} + 355x_{24} + 73x_{31} + 115x_{32} + 200x_{33} + 367x_{34} \rightarrow \min.$$

Транспортная задача разрешима только в случае, если соблюдается условие баланса  $\sum a_i = \sum b_j$ . В нашем случае оно нарушено, так как

$$\sum a_i = 200 + 250 + 390 = 840, \quad \sum b_j = 220 + 240 + 200 + 220 = 880.$$

Следовательно, задача является открытой (несбалансированной). Поскольку  $\sum a_i < \sum b_j$ , то введем фиктивного поставщика количество продукции, у которого эта разность составит 40 единиц. По условию, необходимо полностью

удовлетворить требования потребителей, а это означает, что указанным потребителям нельзя поставлять продукцию от фиктивного источника. Следовательно, стоимость транспортных расходов на доставку единицы продукции от фиктивного источника необходимо сделать невыгодной  $C > \max(C_{i,j})$ . Положим  $C = 772$ . А стоимость транспортных расходов на доставку единицы продукции от фиктивного поставщика всем оставшимся потребителям будем полагать равной нулю.

Внесем дополнительное ограничение для фиктивного поставщика в систему. Приведем систему ограничений к каноническому виду, для этого введем в каждое условие искусственную переменную  $R$ .

Решение сбалансированной транспортной задачи будет являться и решением исходной, открытой задачи.

Последовательно преобразуя таблицы, найдем оптимальное решение (минимальные транспортные расходы)  $F = 145440$  при значениях переменных равных:  $x_{13} = 200$  (количество продукции, доставленное от поставщика 1 к потребителю 3),  $x_{12} = 240$  (количество продукции, доставленное от поставщика 1 к потребителю 2),  $x_{34} = 170$  (количество продукции, доставленное от поставщика 3 к потребителю 4),  $x_{44} = 40$  (количество продукции, доставленное от поставщика 4 к потребителю 4),  $x_{24} = 250$  (количество продукции, доставленное от поставщика 2 к потребителю 4),  $x_{31} = 220$  (количество продукции, доставленное от поставщика 3 к потребителю 1).

2. Поиск решения с учётом неточностей потребностей.

С учётом неточностей для потребностей и последовательной дискретизации по уточнённым данным (см. табл. 3.2 из [1]), запас груза в  $i$ -м пункте отправления будем считать тем же, а потребность  $j$ -го пункта назначения в грузе полагать в виде:  $b_1 = 163, b_2 = 178, b_3 = 148, b_4 = 163$ . Целевая функция при этом остается такой же.

Условие баланса нарушено. Следовательно, задача является открытой (несбалансированной). Снова введем фиктивного потребителя и опять получим закрытую модель транспортной задачи. Проведя все вычисления согласно вычислительному алгоритму, окончательно получим оптимальное решение (минимальные транспортные расходы)  $F = 116352$  при значениях переменных равных:  $x_{13} = 12$  (количество продукции, доставленное от поставщика 1 к потребителю 3),  $x_{22} = 178$  (количество продукции, доставленное от поставщика 2 к потребителю 2),  $x_{34} = 163$  (количество продукции, доставленное от поставщика 3 к потребителю 4),  $x_{23} = 72$  (количество продукции, доставленное от поставщика 2 к потребителю 3),  $x_{31} = 163$  (количество продукции, доставленное от поставщика 3 к потребителю 1),  $x_{33} = 64$  (количество продукции, доставленное от поставщика 3 к потребителю 3).

**Пример 4.** Поиск целочисленного решения транспортной задачи, заданной в произвольных ограничениях (например, табл. 3.4 из [1]).

Исходные данные. Запас груза в  $i$ -м пункте отправления  $a_1 = 100, a_2 = 200$ . Потребность  $j$ -го пункта назначения в грузе  $b_1 = 122, 865; b_2 = 110, 955; b_3 = 66, 18$ . Целевая функция:

$$25X_1 + 37X_2 + 19X_3 + 14X_4 + 24X_5 + 12X_6 \rightarrow \min.$$

Задача является открытой (несбалансированной). Снова введём фиктив-

ного потребителя количества продукции, у которого 2 единицы продукции. По условию, необходимо полностью использовать ресурсы поставщика 2, а это означает, что указанным потребителям нельзя поставлять продукцию от фиктивного источника.

После отработки вычислительного алгоритма, получим оптимальное решение (минимальные транспортные расходы)  $F = 5954$  при значениях переменных равных:  $X_1 = 32$  (количество продукции, доставленное от поставщика 1 к потребителю 1),  $X_4 = 2$  (количество продукции, доставленное от поставщика 1 к потребителю 4),  $X_5 = 90$  (количество продукции, доставленное от поставщика 2 к потребителю 1),  $X_6 = 110$  (количество продукции, доставленное от поставщика 2 к потребителю 2),  $X_3 = 66$  (количество продукции, доставленное от поставщика 1 к потребителю 3).

## Литература

- [1] Вилков В. Б., Черных А. К., Флегонтов А. В. Теория и практика оптимизации решений на основе нечетких множеств и нечеткой логики. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. – 160 с.
- [2] Мягкие вычисления. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Мягкие вычисления](https://ru.wikipedia.org/wiki/Мягкие_вычисления) (accessed 16.02.2017).
- [3] Flegontov A. V., Fomin V. V., Maltsev S. V. The algorithms for Processing of Imprecise Temporal Data // S. Balandin, T. Tyutina, Proceedings of the 19th Conference of Open Innovations Association FRUCT, University of Jyväskylä, Jyväskylä, Finland. ISSN 2305–7254, ISBN 978–952–68397–5–2, 420 p., FRUCT Oy, Helsinki, Finland. – P. 37–46.
- [4] Лаптев В. В., Флегонтов А. В., Фомин В. В. Организация облачного ресурса интеллектуального анализа данных // Информатизация образования и науки. 2015. № 1 (25). – С. 100–115.
- [5] Щербина О. А. Удовлетворение ограничений и программирование в ограничениях. [http://intsys.msu.ru/magazine/archive/v15\(1-4\)/shcherbina-053-170.pdf](http://intsys.msu.ru/magazine/archive/v15(1-4)/shcherbina-053-170.pdf) последнее обращение 16.02.2017 С. 53–170.
- [6] Еремеев А. П., Куриленко И. Е. Компонента временных рассуждений для интеллектуальных систем поддержки принятия решений реального времени // Искусственный интеллект и принятие решений. №1. 2009. – С. 31–45.
- [7] Решение задачи ЛП онлайн симплекс–методом. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.uchimat.chast.ru/aplication/simplex2.php> (accessed 16.02.2017).

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В АДАПТИВНЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

Чертовской В. Д.

Государственный университет морского и речного флота  
имени адмирала С. О. Макарова  
Санкт-Петербург

**Chertovskoy V. D. Methods of mathematical description of control processes in adaptive automation and Assembly.** Necessity of Construct for Adaptive Systems Were Sshowed and it Were Described them Special Features as Basis for Analyses of Mathematical Description Methods. Many Local Methods for Study Planning and Control Processes on Systems with Two- and Three-levels Structure Were Considered. It Was Marked that Selected System Special Features Take Complete Global Integrated and Homogeneous Methods.

**Keywords:** adaptive automatized systems manufacturing planning control global local methods.

Указана необходимость построения адаптивных систем и описаны их особенности, на основе которых проведен анализ методов математического описания. Рассмотрено значительное количество локальных методов, пригодных для изучения процессов управления в системах двух- и трёхуровневой структуры. Отмечено, что выделенные системные особенности наиболее полно учитывают глобальные интегральный и однородный методы.

**Ключевые слова:** адаптивные автоматизированные системы производство планирование управление глобальные локальные методы.

**Введение.** С переходом к рыночным отношениям проявляется все больший интерес к адаптивным автоматизированным системам, позволяющим повысить конкурентоспособность производственных систем. Особенности таких систем привели к необходимости формирования специфического математического аппарата описания процессов в них. В работе [1] в 90-х годах XX в. были предложены и успешно апробированы интегральный и однородный методы, при этом предпочтение отдавалось последнему методу. Прошедшие десятилетия характеризуются массовым появлением новых математических методов. К тому же однородный метод имеет и некоторые ограничения. Он напрямую применим только для неколебательных переходных процессов.

В связи с этим возникает потребность в сравнительном анализе применительно к трёхуровневой структуре адаптивных систем новых, возможно более простых и эффективных методов.

**Постановка задачи.** Функциональное наполнение этой структуры при математическом исследовании определяется особенностями системы. Назовем основные особенности, которые следует учесть при формировании математического аппарата.

О1. Трёхуровневая структура как с вертикальными, так и с горизонтальными связями, при этом на нижних уровнях имеется более одного структурного элемента.

О2. Изменение масштабов по координатам и времени при переходе с одного уровня на другой.



О3. Выделение во всех структурных элементах связанных процессов планирования и управления.

О4. Введение оптимальных алгоритмов процессов планирования и управления для наилучшего использования возможностей компьютеров.

О5. Оперативный переход на выпуск новой продукции.

О6. Однородность (однотипность) системного описания процессов оптимального динамического планирования и оптимального нелинейного управления.

О7. Интеграция экономических и динамических свойств системы.

**Решение задачи.** Для указанных целей за прошедшие десятилетия предложено использовать игровые алгоритмы в двухуровневой структуре с двумя игроками [2, 3] и двухуровневое булево программирование с приближённым сложным методом решения [4, 5].

Сравнительные характеристики методов приведены в табл. 1.

Двухуровневая схема расчета при выборе оборудования и построении расписания для цеха или участка выполнена в [7]. Первоначально с помощью задач статического линейного программирования осуществляется выбор состава оборудования и вариант расписания. Последний уточняется с помощью имитационного моделирования.

Позднее разные варианты описания процесса планирования в трехуровневых системах были представлены в работах [6–10].

В работе [6] рассматривается трёхуровневая веерная структура процесса планирования. В качестве математического аппарата используются задачи нелинейного и выпуклого программирования.

Публикация [8] рассматривает трёхуровневую структуру предприятие – цех – участок для процесса планирования с применением задач нелинейного и стохастического программирования. В силу сложности алгоритма решения стохастические задачи сводятся к более простым детерминированным, а нелинейные и выпуклые задачи решаются с помощью эвристических алгоритмов (комбинации покоординатного метода оптимизации и быстродействующего итерационного алгоритма).

Трёхуровневая система с веерной структурой процесса планирования описана и в работах [9, 10]. В публикации [9] рассмотрена трёхуровневая схема: принципал – супервайзер – исполнитель. Используются методы оптимального управления и динамических игр.

В работе [10] определено три уровня: федеральный центр – органы управления – промышленные предприятия. Рассмотрена управляемая динамическая система с веерной структурой. В качестве управляющих воздействий использованы методы принуждения и побуждения.

Особый интерес представляет набор активных методов [11] как для двухуровневой, так и для трёхуровневой структуры. Они используют как игровые методы, так и задачу статического линейного программирования.

Более подробная характеристика активных методов по предмету управления представлена в табл. 2, а по мотивации управления – в табл. 3.

Под стимулированием понимается побуждение центром к совершению определенных действий агентом путем воздействия на его целевую функцию.

Сравнительный анализ представленных методов позволяет зафиксировать прежнюю актуальность однородного метода описания, исследования и моделирования процессов в трехуровневой системе управления производством.

**Заключение.** Проведенный анализ показывает, что по мере усложнения задач АСУ производством усложнялся математический аппарат описания от задач планирования и задач управления к совместным задачам планирования и управления; от разнородного описания процессов планирования и управления к их однородному связанному представлению с возможностью описания процедур оперативного перехода на выпуск новой продукции. За последнее время не появилось новых эффективных методов совместного описания процессов планирования и управления в трёхуровневой структуре. По-прежнему преобладающим остается однородный метод, позволяющий учесть разные масштабы по координатам и времени на различных структурных уровнях и описать математически процедуру оперативного перехода на выпуск новой продукции.

Выполненный анализ проведен на основе жёсткого учета набора особенностей современных высокоавтоматизированных систем. Вместе с тем рассмотренный широкий спектр методов позволяет пользователю выбрать метод, более соответствующий назначению и совокупности особенностей формируемой разработчиком системы управления.

Таблица 1. Методы исследования иерархических АСУ.

Число уровней	Метод	Достоинства	Недостатки
2 уровня	Д1. Процесс планирования [2–5]	Оптимальность алгоритмов. Учёт экономических свойств	Неучёт динамических свойств Одинаковый масштаб на уровнях По одному элементу на уровнях
3 уровня	Т1. Интегральный метод [1]	Учтены особенности О1–О5	Неоднородное описание процессов планирования и управления Затруднения в экономической трактовке квадратичного критерия для динамики Неучёт нелинейностей в описании процесса управления
	Т2. Метод [1]	Учтены все особенности О1–О7.	Применение только для неколебательных переходных процессов в системе
	Т3. Процесс		Неучёт процесса

	планирования [6] Т4. Хоботов [7] Т5. Голенко [8]		управления. Отсутствие изменения масштабов Отсутствие горизонтальных связей
	Т6. Динамические игры и оптимальное управление [9, 10]	Оптимальные алгоритмы	По одному элементу на каждом уровне. Неизменный масштаб. Нет оценки экономических свойств Неучет процесса планирования
	Т7. Активные методы [11]	Формализация плановых решений, связанных с «человеческим фактором»	Преимущественно двухуровневые объекты с «веерной» структурой. Слабый учет горизонтальных связей Неучёт процесса планирования

Таблица 2. Классификация по предмету управления.

Метод (механизм) управления	Предмет управления
составом	Расчёт
структурой	Иерархия над технологическим графом (при наличии ограничений) Иерархия над технологической цепью (при наличии ограничений, 2 уровня) Выбор типа структуры (матричная или функциональная) Сетевые структуры (веерная двухуровневая структура)
институциональное	Управление ограничениями (дополнительные ограничения) Институциональное и мотивационное управление (один агент, остальные позиции – несколько агентов) Институциональное управление в многомерных системах Управление нормами деятельности Аккордная оплата труда Дуопология Курно
информированное	Производитель и посредник

	Коррупция Формирование команды Предвыборная борьба Реклама товара
Мотивационное (см. следующую таблицу)	Стимулирование Планирование Организация Контроль

Таблица 3. Функции и механизмы мотивационного управления.

Функция управления	Метод (механизм)
Стимулирование	Непрерывная модель (игра Центр–Агент) Дискретная модель (игра двух лиц Центр–Агент) Базовый (один элемент) Контракты (Ц–природа, вероятности) Индивидуальный результат (одно и многоэлементная игра с индивидуальной информацией) Результаты коллективные (многоэлементная игра с агрегированной информацией) Унифицированный (унифицированные агенты) Бригадная оплата труда (КТУ, КТВ) В матричных структурах управления 2 уровня управляющей части Ранговый (ранги агентов) Экономическая мотивация (нормативы: ставки агентов и т. д.)
Планирование	Распределение ресурса (информацию сообщает агент) Активная экспертиза (искажение информации) Внутренние цены (известны типы агентов) Конкурс (известны типы агентов) Обмен (известны типы агентов)
Организация	Смешанное финансирование (из многих источников) Противозатратный (антимонопольный) Затраты–эффект (накопление, динамическое программирование) Самоокупаемость (технологическая цепочка) Страхование (страхование риска) Оптимизация производственного цикла (технологическая цепочка) Назначение (агентов на разные операции)
Контроль	Комплексное оценивание (иерархия оценок) Согласие (распределение) Многоканальный Дополнительные соглашения

## Литература

- [1] Чертовской В. Д. Интеллектуализация автоматизированного управления производством. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 164 с.
- [2] Угольников Г. А. Устойчивое развитие организаций. – М.: Физматгиз, 2011.

- [3] Горелов М. А. Иерархическая игра с умышленным искажением информации // Автоматика и телемеханика, 2016, № 4. – С. 89–113.
- [4] Лавлинский С. М., Панин А. А., Плясунов А. В. Двухуровневая модель государственно-частного партнерства // Автоматика и телемеханика, 2015, № 11. – С. 89–103.
- [5] Береснев В. П. О задаче конкурентного размещения предприятия со свободным выбором поставщиков // Автоматика и телемеханика, 2014, № 4. – С. 94–105.
- [6] Сагынғалиев К. С. Согласование планирования в трехуровневой активной системе // Автоматика и телемеханика, 1988, № 3. – С. 80–91.
- [7] Павлов К. С., Хоботов Е. Н. Модели выбора и замены оборудования в производственных системах машиностроительных предприятий // Автоматика и телемеханика, 2015, № 12. – С. 105–143.
- [8] Голенко-Гинзбург Д., Кац В., Синяковский С., Ицкович Э. Л. Управление трёхуровневой производственной системой типа «человек–машина» // Автоматика и телемеханика, 2000, № 5. – С. 166–184.
- [9] Угольницкий Г. А., Усов А. Б. Алгоритмы решения дифференциальных моделей игр // Автоматика и телемеханика, 2016, № 5. – С. 148–158.
- [10] Угольницкий Г. А., Усов А. Б. Трёхуровневая система управления эколого-экономическими объектами // Проблемы управления, 2010, № 1. – С. 26–32.
- [11] Новиков Д. А. Теория управления организационными системами. – М.: Физматгиз, 2012. – 344 с.

## ПРИМЕНЕНИЕ PHP ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ТРАНСФОРМАЦИИ ДАННЫХ В РАМКАХ ТЕОРИИ KDD (KNOWLEDGE DISCOVERY IN DATABASES)

Шичкина Ю. А., Коблов А. А.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет (ЛЭТИ) им. В.И. Ульянова (Ленина)

Санкт-Петербург

e-mail: strange.y@mail.ru, koblow.a.a@gmail.com

**Shichkina Y. A., Koblov A. A. The use of PHP for parallel implementation of the data transformation process within the KDD technology (Knowledge Discovery in Databases).** Today, at first, increase of data volumes exceeds increase of storage volumes and, at second, the data collected from different sources, enter to store in its original form and does not always structured. This article discusses methods for surface preparation of data to use to them specialized data analysis methods. It is shown how with PHP it is possible to organize multithreaded process of data cleaning and transformation within the KDD technology (Knowledge Discovery in Databases).

Как известно, в настоящее время рост объёма данных превышает рост объёмов хранилищ, а данные, собираемые из различных источников, поступают в хранилище в исходном

виде и не всегда структурированном. В статье рассматриваются приёмы по предварительной подготовке данных к применению к ним специализированных методов анализа данных. Показано, как с помощью PHP можно организовать многопоточный процесс очистки и трансформации данных в рамках технологии KDD (Knowledge Discovery in Databases).

**Введение.** Индустрия разработки программного обеспечения никогда не стоит на месте. Каждый год появляются новые технологии, фреймворки и версии уже закрепившихся на рынке и в сознании общественности инструментов. Разнообразие языков программирования дает возможность не только подобрать решение для конкретной задачи и получить максимальную отдачу от оборудования, но и выгоду в стоимости разработки и поддержки создаваемых систем.

PHP – один из наиболее популярных языков для создания динамических веб-сайтов. Согласно рейтингу языков программирования, опубликованного GitHub [1] и основанного на количестве pull-запросов пользователей сервиса, PHP занимает пятую строчку, уступая JavaScript, Java, Python и Ruby. Исследования, проведенные аналитическим агентством “Тэглайн” [2], основанные на анкетировании 445 компаний, работающих в сфере цифровых технологий, также ставят PHP на первое место, так как 95% респондентов дали положительный ответ на вопрос о знании этого языка программирования.

Такая популярность обусловлена так называемым “низким порогом вхождения” и является огромной проблемой, так как многие начинающие разработчики, даже не имеющие специального технического образования, выбирают именно PHP как свой первый язык программирования. Именно это дало PHP нелестную славу инструмента, пригодного только для создания простейших сайтов и не способного на большее.

Но зачастую востребованность в высоконагруженных решениях возникает не с самого начала. Переход на радикально иные технологии в больших проектах требует огромных затрат времени и материальных средств, что не всегда возможно, а у малых проектных групп может не быть финансовой возможности нанять разработчика на Java или C для реализации достаточно сложного функционала. В таких ситуациях приходится работать с тем, что имеется.

В данной статье показано, как с помощью PHP можно реализовать высоконагруженное решение, реализующее процесс очистки и трансформации данных для подготовки к дальнейшему анализу при помощи методов Data Mining. Тестирование решения проведено на тестовых наборах в 25 000 и 1 000 000 записей.

**Постановка задачи.** Наверное, не существует сегодня компаний, которые бы не собирали информацию в рамках своей деятельности. Одни её собирают для отчетности, другие для интереса, но большинство для анализа и принятия решений, совершенствующих показатели компании. Пока информации немного, работники компаний перерабатывают её вручную, часто используя для этого табличные процессоры, запросы к базам данных и другие программные средства. Но если поток поступающей информации значительный, то обрабатывать информацию становится с каждым разом всё сложнее. Это занимает очень много времени. В этих случаях применяется специальная методика извлечения знаний из баз данных (Knowledge Discovery in Databases) [3].

Эта методика была предложена во второй половине двадцатого века Григорием Пятецким-Шапиро, который задался вопросом автоматизации извлечения знаний из больших баз данных.

Концепция методики извлечения знаний не предлагает конкретных алгоритмов, но представляет порядок действий, которые необходимо выполнить для достижения поставленной цели и включает в себя:

- подготовку и сбор данных из источников;
- очистку данных от аномальных значений, пропусков и шумов и показателей, которые не несут полезной нагрузки в рамках поставленной задачи для снижения объёма информации и размерности;
- трансформацию данных для приведения данных к виду, пригодному для извлечения знаний;
- собственно извлечение знаний путём применения различных алгоритмов;
- интерпретацию полученных знаний.

Рассмотрим задачу: извлечении полезной информации из базы, в которой находятся данные, полученные с устройств, передающих свои GPS-координаты.

Для решения этой задачи для ускоренного применения конечных методов Data Mining была произведена предварительная очистка и трансформация данных, реализованная на PHP и более глубокая очистка и трансформация данных путем применения нечётких срезов баз данных, реализованная на языке Java. В качестве хранилища информации была использована PostgreSQL база данных MongoDB версии 3.2.

Более подробно представленные далее процессы очистки и трансформации данных, а также результаты применения нечётких срезов в базах данных в качестве метода глубокой очистки описаны в [4].

Задача, рассматриваемая в этой статье, является продолжением задачи об извлечении полезной информации из базы, и заключается в следующем: провести исследования производительности PHP7.0 во время предварительной очистки и трансформации данных, определить, каким способом можно значительно сократить время предварительной очистки данных.

**Многопоточность в PHP. Библиотека pthreads.** Хотя сам по себе PHP и не поддерживает многопоточность, есть несколько методов её эмуляции. Самый простой – это запуск нескольких копий скрипта с параметрами. Такой подход неприемлем в высоконагруженных системах и задачах, так как не позволяет контролировать выполнение каждого экземпляра, выделение памяти и ресурсов.

Следующий подход – PCNTL. Это расширение позволяет полноценно работать с потоками и является довольно простым для тех, кто освоил многопоточные вычисления в языке C. При использовании расширения PCNTL разработчику доступна функция `pcntl_fork`, которая является аналогом `fork` в C и позволяет порождать дочерние процессы. Но опять же, этот подход является имитацией многопоточности и не так прост для неподготовленного программиста.

Joe Watkins, автор расширения pthreads, предлагает объектно-ориентированное API для реализации по-настоящему многопоточных вычислений [5].

Pthreads позволяет приложению выполнять многопоточные вычисления и синхронизировать потоки между собой. Это расширение включает в себя несколько классов:

- Threaded – главный класс в pthreads. Именно благодаря в PHP появляется возможность параллельного запуска потоков. В нем заключен метод synchronized() для синхронизации и многие другие методы.
- Thread – создает отдельный поток путем вызова метода run(). Метод run() начинает выполняться в отдельном потоке в момент вызова метода start(). Это можно инициализировать только из контекста, который создает поток. Объединить потоки можно тоже только в этом же контексте.
- Worker – это по сути, исполнитель потока.
- Pool – пул-контейнер из нескольких Worker. По мере освобождения очередного Worker запускается следующий экземпляр Threaded.

Таким образом, pthreads – является чуть ли не единственным способом “безболезненно” организовать многопоточные вычисления в PHP.

Следует отметить, что для запуска pthreads необходимо скомпилировать PHP с опцией `--enable-maintainer-zts` (Zend Thread Safety), но для опытного администратора это не составит проблем, а для пользователей Debian-based Linux систем в репозитории `ppa:ondrej/php-zts` есть два пакета `php7.0-zts` и `php7.0-zts-dev`, которые добавляют в систему `php7.0-zts`, который можно запустить из терминала.

**Решение задачи предварительной очистки и трансформации данных без использования библиотеки pthreads.** Накопленные знания о передающих GPS-устройствах представляют собой журналируемую информацию об устройстве, в которой вместе с координатами, содержатся показатели ускорения, вращения, скорости, данные о передающем и принимающем устройствах, а также и другая служебная информация. Такой набор данных избыточен для поставленной задачи и не имеет некоторых производных от существующих показателей. Чтобы в дальнейшем возможно было применить методы извлечения знаний, имеющуюся информацию необходимо подготовить.

Предварительная очистка и трансформация в рамках нашей задачи заключается в следующем:

- На этапе очистки необходимо произвести исключение из обработки “мусорной” информации и данных, которые были получены путем некорректного получения сигнала от GPS-спутников. Эти данные географически расположены довольно далеко от остального набора и могут быть исключены из обработки путем вычисления расстояния до ближайших записей из отсортированного по индексированным полям массива.
- На этапе трансформации необходимо сделать проход по по двумерному массиву географических координат и выполнить привязку данных, относящихся к определённому сектору географической координатной плоскости к точке в новом координатном пространстве. Получение из “сырых”



данных новых, полезных для дальнейшей обработки возможно путем выполнения простых арифметических операций.

Данный набор операций был реализован с использованием PHP 7.0 с драйвером mongodb-1.2 без использования библиотеки PHPLIB для MongoDB на тестовом стенде с характеристиками, приведенными в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики тестового стенда

Процессор	
Model name:	Intel(R) Core(TM) i3-4030U CPU @ 1.90GHz
Socket:	1
Core(s) per socket:	2
Thread(s) per core:	2
Память	
RAM:	12 Gb
Storage:	120 Gb (SSD)
Операционная система	
Description:	Linux Mint 18 Sarah
Linux Kernel:	4.4.0-21-generic

Одной из основных проблем, связанных с обработкой больших данных является получение максимальной отдачи от оборудования, на котором выполняется обработка информации. Несмотря на то, что большинство баз данных легко масштабируются для работы в несколько потоков, исполнение скриптов на PHP, как и на других языках, без дополнительной подготовки будет исполняться в один поток. При таком подходе невозможно получить от конечного оборудования максимальной отдачи, и график загрузки логических ядер будет выглядеть приблизительно так:

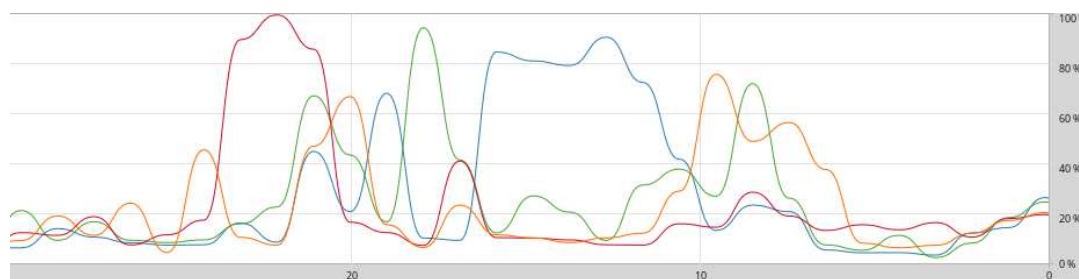


Рис. 1. График загрузки логических ядер на наборе из 35 000 записей.

Как видно из графика, в процессе обработки данных задействованы все потоки. Это обусловлено тем, что в MongoDB начиная с версии 3.0 используется новый механизм хранения WiredTiger, который работает по всем доступным потокам, но ни один из потоков не загружен на максимальную производительность, что говорит о нерациональном использовании имеющихся ресурсов.

Единственным верным выходом из сложившейся ситуации будет запуск процесса обработки параллельно в нескольких потоках. Можно, конечно, выбрать другой язык разработки для реализации данного подхода, но для больших и сложных систем смена технологии влечёт огромные накладные расходы,

а для маленьких проектов нецелесообразно нанимать в штат новых разработчиков для написания решения на другом языке. Именно для таких случаев в РНР есть несколько подходов для реализации многопоточных вычислений.

**Параллельная реализация решения задачи предварительной очистки и трансформации данных с использованием библиотеки pthreads.** В процессе реализации многопоточных вычислений возникает вопрос, как и в каком месте кода реализовать ветвление в потоки и как обеспечить синхронизацию этих вычислений. Так как библиотека pthreads предоставляет метод synchronized() в классе Threaded, остается решить, в каком моменте возможно запустить отдельный поток.

В рамках решения задачи предварительной очистки и трансформации данных такими местами были: процесс очистки от аномальных значений по каждой из координат (по долготе и широте). В данном случае есть возможность запустить два потока (по одному на каждую из координат) – обход координатного пространства по долготе и по широте, когда реализуется вложенный цикл for. Внутренний цикл можно запустить в отдельном потоке.

После определения таких участков можно приступить к реализации параллельных вычислений. Например, если ранее в последовательной реализации решения задачи предварительной очистки и трансформации данных было два вложенных цикла:

```
for ($long=$this->minLong;$long<=$this->maxLong;$long+=$this->dLong) {
  for ($lat=$this->minLat;$lat<=$this->maxLat;$lat+=$this->dLat) {
    // Далее вызывается драйвер MongoDB
    // для поиска записей,
    // входящих в рассматриваемый сектор.
    // К полученным записям применяется
    // процесс трансформации.
  }
}
```

то после реализации этого решения вместе с библиотекой pthreads получим:

```
public function run(){
  do {
    $val = null;
    // Получаем объект, наследуемый от Threaded
    $prov = $this->worker->getProvider();
    // Синхронизация данных
    $prov->synchronized(function($prov) use (&$val) {
      //Метод getNext() реализует замену внешнего цикла
      $val = $prov->getNext();
    }, $prov);
    if ($val['next'] === null) {
      continue;
    }
    // Метод transformation() реализует замену внутреннего цикла и
    // выполняется параллельно
    $this->transformation($val);
  }
  while ($val !== null);
}
```

Таким простым и красивым способом в РНР можно реализовать многопоточность.

**Закключение.** В результате исследований было установлено, что использование библиотеки pthreads рационально для реализации высоконагруженных систем и вычислений. На рис. 1 была показана диаграмма загрузки потоков при использовании РНР без ZTS и pthreads. Далее, будут показаны диаграммы загрузки логических ядер на процессоре в зависимости от количества запущенных потоков. Можно заметить, что диаграмма, полученная при выполнении последовательного решения задачи (рис. 1) сравнительно схожа с диаграммой, полученной при использовании pthreads с 1 открытым потоком (рис. 2).

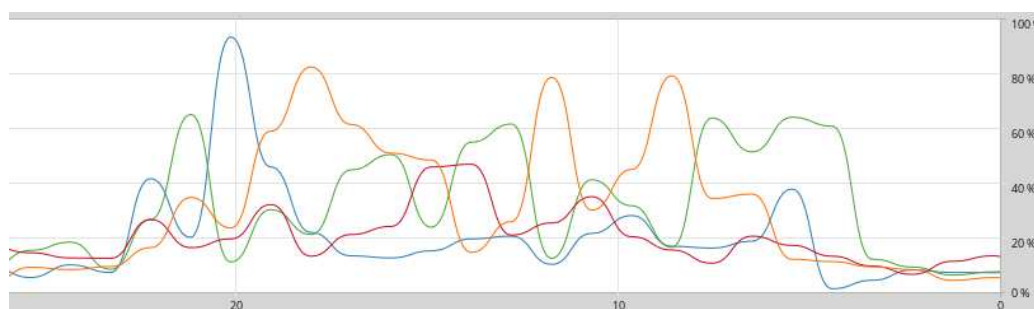


Рис. 2. График загрузки логических ядер при использовании pthreads с 1 открытым потоком на наборе из 35 000 записей.

При открытии одного дополнительного потока нагрузка распределяется гораздо лучше, чем в однопоточной реализации, но на диаграмме (рис. 3) заметно, что постоянная пиковая загрузка не реализована.

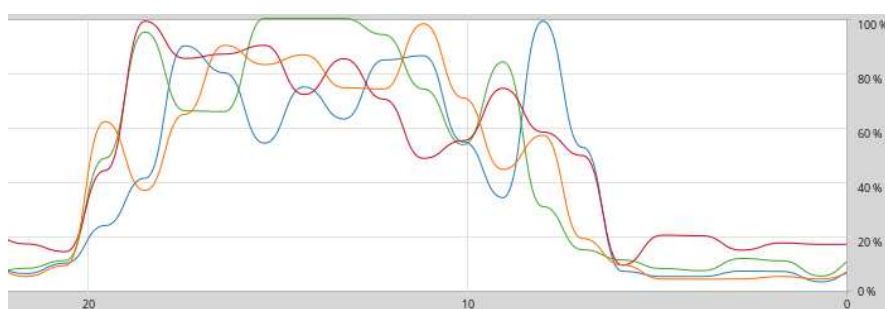


Рис. 3. График загрузки логических ядер при использовании pthreads с 2 открытыми потоками на наборе из 35 000 записей.

Загрузка с тремя открытыми потоками (рис. 4) выводит среднюю загрузку процессора на уровень 80%. Такой уровень оставляет простор для использования вычислительных мощностей другими пользователями с менее требовательными задачами, но не реализует в полной мере всего потенциала для вычислений.

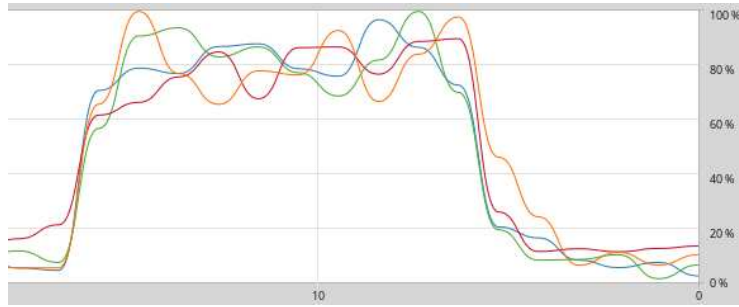


Рис. 4. График загрузки логических ядер при использовании pthreads с 3 открытыми потоками на наборе из 35 000 записей.

При открытии дополнительных потоков становится заметно, что загрузка логических ядер растет, и достигает своего пика при использовании всех доступных потоков (рис. 5). Такие показатели говорят о том, что при помощи расширения pthreads можно заставить РНР работать достаточно производительного не только для web-приложений, но и для решения задач, связанных с извлечением знаний из больших данных.

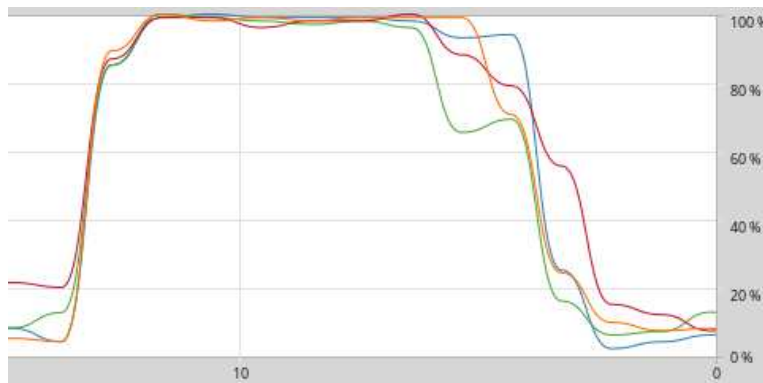


Рис. 5. График загрузки логических ядер при использовании pthreads с 4 открытыми потоками на наборе из 35 000 записей.

Для сравнения замерим время выполнения последовательного и параллельного решения задачи предварительной очистки и трансформации данных на тестовых наборах. Для проведения более точных вычислений на каждом наборе выполним по 100 замеров, а средние показатели среди них занесем в таблицу, представленную ниже:

Таблица 2. Результаты замеров времени работы решения задачи.

Алгоритм	Время выполнения, сек.	
	25 000 записей	1 000 000 записей
Последовательный (NTS)	17,09	233,85
Последовательный (ZTS)	16,99	228,97
Параллельный в 1 потока	17,00	224,94
Параллельный в 2 потока	10,01	127,32
Параллельный в 3 потока	9,12	98,67
Параллельный в 4 потока	8,27	79,67

Произведенные замеры демонстрируют что время выполнения последовательного решения на стандартной сборке PHP7.0 без использования Zend Thread Safety (NTS) практически не отличается от последовательного решения задачи, запущенного на PHP с использованием Zend Thread Safety (ZTS) как и время решения, выполненного с использованием pthreads и открытием всего одного потока. Однако, при открытии более одного потока получаем колоссальный прирост в производительности, благодаря которому время выполнения задачи уменьшается со скоростью кубической регрессии. Рисунок 6 демонстрирует зависимость времени выполнения решения от количества открытых потоков.

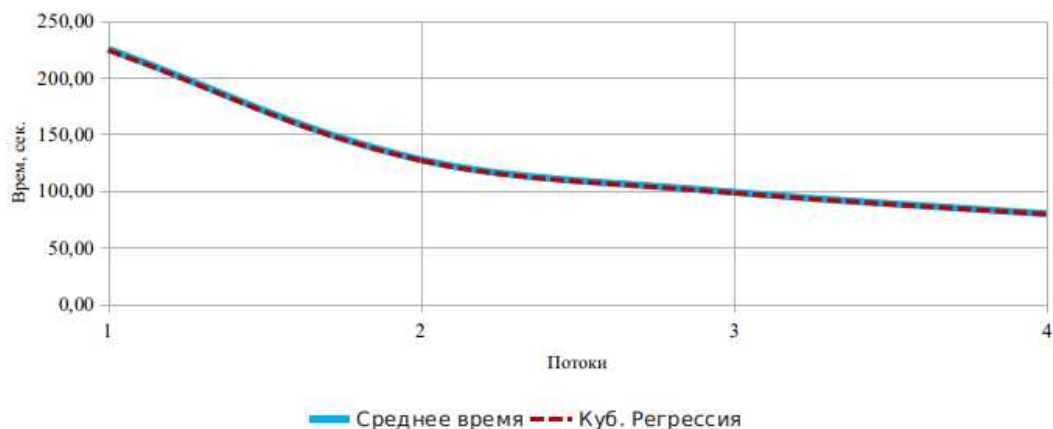


Рис. 6. График зависимости времени выполнения процесса решения задачи от количества открытых потоков на наборе из 1 000 000 записей.

Полученные результаты показывают, что применяя библиотеку pthreads можно заставить PHP-приложения бережливо использовать процессорное время и получить выигрыш во времени выполнения реализации решения задачи предварительной очистки и трансформации данных более чем в 2 раза на достаточно слабом процессоре.

## Литература

- [1] The state of the Octoverse 2016 [Электронный ресурс] // GitHub Octoverse 2016. URL: <https://octoverse.github.com/>
- [2] Рейтинг языков программирования 2016 [Электронный ресурс] // Тэглайн – свежие рейтинги и исследования Рунета. 2016. 11 апреля. URL: <http://tagline.ru/programming-languages-rating/>
- [3] Piatetsky-Shapiro G., Frawley W. Knowledge Discovery In Databases // AAAI Press. – December 1991. – ISBN 9780262660709. – 539 p.
- [4] Yulia Shichkina, Alexander Degtyarev, Alexander Koblov. Технология очистки и трансформирования данных в рамках Knowledge Discovery in Databases (KDD) для ускоренного применения методов Data Mining (Technology of cleaning and transforming data using the Knowledge Discovery in Databases (KDD) technology for fast application of Data Mining methods) // CEUR Workshop proceedings. Selected Papers of the 7th International Conference Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education. 2017. Vol. 1787. pp. 428-434. urn:nbn:de:0074-1787-5

- [5] PHP: pthreads – Manual [Электронный ресурс] // PHP: PHP Manual. URL: <http://php.net/manual/en/book.pthreads.php>

## ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В СЕТИ DTN С ПОМОЩЬЮ НЕЧЁТКИХ СРЕЗОВ БАЗ ДАННЫХ

Шичкина Ю. А., Плотникова А. А.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет (ЛЭТИ) им. В. И. Ульянова (Ленина)

Санкт-Петербург

e-mail: strange.y@mail.ru, nastya19922008@gmail.com

**Shichkina Y. A., Plotnikova A. A. Application of fuzzy sections for constructing dynamic routing in the network DTN.** The methodology for creating of routes of data transfer on the dynamic DTN network, via the devices set on the moving objects and connected among themselves by means of wireless technologies such is given in this article as WI-FI or Bluetooth. This technique envelops all stages of Knowledge Discovery in Databases technology. The stage of use of the Data mining tools, is considered in more detail. At this stage from a set of the moving objects the subset through which it is possible to transfer information from one node to another is selected. Further to the received subset of linked objects the algorithm Yen is applied to search of optimum ways in the weighed graph. Weights are object accessory levels to the selected subset. It allows to construct the most probable route of data transfer and several alternative routes.

В данной статье приводится методология для построения маршрутов передачи данных по динамической сети DTN, через устройства, устанавливаемые на передвигающихся объектах и соединяемых между собой посредством беспроводных технологий, таких как WI-FI или Bluetooth. Данная методика охватывает все этапы технологии Knowledge Discovery in Databases. Этап применения инструментария Data Mining, рассмотрен подробнее. На этом этапе из множества передвигающихся объектов выбирается подмножество через которое возможно передать информацию из одного узла в другой. Далее к полученному подмножеству связанных объектов применяется алгоритм Йена для поиска оптимальных путей по взвешенному графу. Весами являются степени принадлежности объекта выбранному подмножеству. Это позволяет построить наиболее вероятный маршрут передачи данных и несколько альтернативных маршрутов.

**Введение.** В настоящее время компьютерные сети внедрены во многие области жизнедеятельности человека. Это привело к тому, что одними из основных проблем в этом направлении являются проблемы пропускной способности каналов передачи информации, их функционирование и надёжность.

В связи с необходимостью передавать данные не только на Земле, но и с космосе остро встала проблема качества и надёжности передачи информации. Для устранения этих проблем были созданы сети нового поколения, устойчивые к задержкам времени. На практике для обозначения таких сетей, устойчивых к задержке времени, используется английская аббревиатура – DTN (Delay

Tolerance Network).

Следует заметить, что сферы применения сетей, устойчивых к задержкам времени, весьма разнообразны, хотя изначально они были созданы для использования в космосе. Такие сети применяются в следующих областях: в работе служб МВД при нарушении целостности инфраструктуры связи; в труднодоступных районах, где отсутствует инфраструктура; в самолетах; в шахтах; а также в новой интенсивно развивающейся области Интернета вещей.

Интернет вещей — глобально связанная система приборов, объектов и предметов, базирующаяся на технологии RFID. Термин Интернет вещей был предложен Кевином Эштоном (Kevin Ashton) в 2009 году. Интернет вещей предполагает формирование среды, где все объекты окружающего мира — от транспортных самолетов до авторучек имеют выход в Интернет.

Вместе с понятием Интернета вещей связан новый термин *device mesh*, который определяет большое количество “умных” устройств, которые не только взаимодействуют с пользователем, но и между собой. Зачастую они подключены к серверным системам, но могут работать и автономно. Ранее аналитики говорили о синхронизации работы приложений между разными устройствами. Ожидается, что уровень взаимодействия различных устройств друг с другом будет только расти. В связи с этим возникает целый ряд актуальных задач от разработки моделей совместимости разных систем Интернета вещей (протоколы, интерфейсы, алгоритмы) до разработки новых электронных компонентов. В настоящей статье предлагаются подходы к расчёту траектории передачи данных в динамической сети DTN Device Mesh на основе интеллектуального анализа данных предыстории движения узлов DTN и текущего состояния сети.

**Организация маршрутизации в DTN.** DTN, изначально разработанный как протокол дальней космической связи, получает всё большее применение и в обычных телекоммуникационных компьютерных сетях. DTN существенным образом отличается от привычных протоколов. Его особенностью является доставка данных вне зависимости от текущего состояния каналов связи. Для “классических” протоколов в случае невозможности доставки данных в “текущий” момент, они удаляются. DTN — это подход к построению архитектур сетей, который был разработан для решения проблем TCP/IP протокола в сетях с большими временами задержки передачи сообщений. Этот протокол основан на парадигме “хранить данные и передать их дальше” [1]. Особенностью этого подхода является доставка данных вне зависимости от текущего состояния каналов связи, так как данные сохраняются, в отличие от других протоколов, и передаются сразу же, как появляется возможность. Протокол DTN использует специальные сообщения, которые содержат в себе необходимую для маршрутизации информацию, а так же данные для передачи.

Маршрутизация — это нестандартная задача организации доставки данных в DTN-сетях. Существующие сетевые протоколы DTN-сетей могут быть разделены на три крупных категории: направленная пересылка, широковещательная рассылка и ограниченная широковещательная рассылка [2]. Протоколы первого вида передают только одну копию сообщения по отобранному маршруту к месту назначения. Протоколы широковещательной рассылки передают

множество копий сообщения к сенсорным узлам в пределах сети в ожидании, что, как минимум, одна копия достигнет места назначения. Протоколы широко-вещательной рассылки, например, протоколы, основанные на теории эпидемии или даже пандемии, могут улучшить гарантии доставки. Однако, очевидно, при потерях связности сети и/или случайных разрывах соединений требования к объемам буферной памяти быстро растут при увеличении размера сети.

Выбор направленной или широко-вещательной рассылки обусловлен следующими соображениями:

- протоколы широко-вещательной рассылки могут работать при наличии минимальной информации о параметрах и состоянии сети, в то время как при использовании протоколов направленной пересылки нужно для вычисления наилучшего маршрута нужно иметь исчерпывающую информацию о сети;
- протоколы широко-вещательной рассылки многократной копии, приводят к избыточности, но стоимость повторной пересылки из-за потери пакета может быть достаточно высока.

Сетевые протоколы могут быть пассивно- или активно-адаптивными, в зависимости от того, когда вычисляется маршрут. В активно-адаптивных сетевых протоколах все маршруты прогнозируются и вычисляются до того, как они будут востребованы.

Пассивно-адаптивные сетевые протоколы вычисляют маршруты только в момент возникновения необходимости.

В данной статье рассматривается случай построения DTN не на статических объектах, которые могут иногда по тем или иным причинам выходить из сети, а на динамических объектах, которые непрерывно находятся в движении, вступая во взаимодействие друг с другом по мере движения и участвуя в процессе передачи данных.

Таким примером могут служить *device mesh*, построенные на устройствах, установленных на машинах скорой помощи, полиции, городском транспорте, на мобильных телефонах покупателей в супермаркете или туристов в национальных парках, исторических центрах, музеях и т. д.

Технология организация динамической маршрутизации для построения DTN совместно с технологией глобального геопозиционирования ГЛОНАСС/GPS позволяет решить большинство проблем, характерных для традиционных систем управления и связи. Кроме того, данная технология позволяет существенно повысить технические характеристики системы за счёт размещения средств первичной обработки данных непосредственно на приёмно-передающих устройствах без отправки больших объёмов информации в вычислительные центры.

Далее будет показано, как с помощью нечётких срезов с базы данных можно извлечь информацию для того, чтобы в дальнейшем с её помощью построить правила маршрутизации для сетей DTN.

**Методы, применяемые при обработке данных.** Для реализации технологии построения динамической маршрутизации для DTN предлагается применить аппарат двух современных и наиболее распространённых теорий: Data Mining и KDD – Knowledge Discovery in Databases.

Методика извлечения знаний из баз данных KDD зародилась ещё в 1989 г.



С помощью этой методики описываются не конкретные алгоритмы или математический аппарат, а последовательность действий, которую нужно выполнить для обнаружения полезного знания. Эта методика не зависит от предметной области. Технология KDD включает в себя этапы выбора информативных признаков, построения моделей, подготовки данных, очистки, постобработки и интерпретации полученных результатов [3] (рис. 1).



Рис. 1. Этапы KDD

Рассматривая технологию KDD, можно отметить, что первый этап состоит из процесса выборки данных. Применительно к задаче построения динамической маршрутизации для DTN, например, базу данных о передвижении объектов, пришлось трансформировать из текстового формата .csv в формат MongoDB. Часто на этом этапе применяются другие механизмы: запросы, фильтрация данных или сэмплинг, а в качестве источника используют специализированное хранилище данных, консолидирующее всю необходимую для анализа информацию.

На втором этапе производится очистка данных. Реальные данные требуют обработки для получения более полезных знаний. К задачам очистки данных относятся такие как: заполнение пропусков, исключение дубликатов и прочее. Применительно к задаче построения динамической маршрутизации для DTN на этом этапе был произведен отбор соответствующих свойств о движущихся объектах.

На третьем этапе рассматривается трансформация данных. Этот шаг необходим для тех методов, при использовании которых исходные данные должны быть представлены в каком-то определённом виде. При решении задачи построения динамической маршрутизации для DTN на этом этапе было сделано преобразование значений отдельных свойств в новые единицы измерения.

Следующий четвёртый этап – это Data Mining. На этом этапе идёт процесс обнаружения в сырых данных ранее неизвестных нетривиальных практически полезных и доступных интерпретации знаний.

На пятом, последнем этапе осуществляется интерпретация. В случае, когда извлеченные зависимости и шаблоны непрозрачны для пользователя, долж-

ны существовать методы постобработки, позволяющие привести их к интерпретируемому виду. В случае построения динамической маршрутизации для DTN на этом этапе применяется механизм построения по формальным правилам передачи данных реального маршрута, принятого в протоколах DTN.

Главной частью этого процесса являются методы Data Mining, которые позволяют обнаружить закономерности и знания. Термин Data Mining введён Григорием Пиатецким-Шапиро в 1989 году. Знания, полученные в процессе применения методов Data Mining, должны описывать новые связи между свойствами, предсказывать значения одних признаков на основе других. Основу методов Data Mining составляют всевозможные методы классификации, моделирования и прогнозирования, основанные на применении деревьев решений, искусственных нейронных сетей, генетических алгоритмов, эволюционного программирования, ассоциативной памяти, нечёткой логики.

Применительно к задаче построения динамической маршрутизации для DTN из методов Data Mining наиболее подходящими являются деревья решений и нечёткая логика. В случае построения деревьев решений по значениям выборки выводится одно решение – план передачи данных по сети. И методы теории принятия решений являются очень трудоёмкими и относятся к классу NP-задач. Преимущество нечёткой логики для задач построения DTN очевидна, это возможность получения сразу несколько маршрутов, ранжированных по ряду параметров, более редкое перестроение маршрутов в изменяющейся ситуации, меньшая трудоёмкость. По результатам применения нечёткой логики в задачи построения динамической маршрутизации для DTN строится связанный ориентированный граф, применение к которому впоследствии алгоритма Йена, например, даёт совокупность запрашиваемых маршрутов.

**Построение нечётких срезов.** Большая часть данных, обрабатываемых в современных информационных системах, носят чёткий, числовой характер. Однако в запросах к базам данных, которые пытается формулировать человек, часто присутствуют неточности и неопределенности.

Нечёткие срезы (fuzzy slices) — это хороший пример обогащения одной технологии (базы данных) другой (нечеткая логика). Под нечёткими срезами понимаются фильтры по измерениям, в которых фигурируют нечёткие величины, например, “все объекты, движущиеся на север города”. В данном примере само понятие “север города” является нечётким, а если учесть, что объекты могут двигаться на север города не по прямой траектории, то нечёткость появляется в определении движения.

Математическая теория нечётких множеств (fuzzy sets) и нечёткая логика (fuzzy logic) являются обобщениями классической теории множеств и классической формальной логики. Данные понятия были впервые предложены американским ученым Лотфи Заде (Lotfi Zadeh) в 1965 г. [4]. Основной причиной появления новой теории стало наличие нечётких и приближённых рассуждений при описании человеком процессов, систем, объектов.

В реляционных базах данных эту роль выполняют нечёткие запросы (fuzzy queries, flexible queries).

Характеристикой нечёткого множества выступает функция принадлежности (Membership Function). Обозначим через  $\psi(x)$  степень принадлежности

элемента  $x$  к нечёткому множеству, представляющую собой обобщение понятия характеристической функции обычного множества. Тогда нечётким множеством  $C$  называется множество упорядоченных пар вида  $C = \psi(x)/x$ , при этом  $\psi(x)$  может принимать любые значения в интервале  $[0, 1]$ ,  $x \in X$ . Значение  $\psi(x) = 0$  означает отсутствие принадлежности к множеству, 1 – полную принадлежность [5].

Для переменных, относящихся к непрерывному виду данных, функцию принадлежности удобнее задать аналитической формулой и для наглядности изобразить графически. Существует свыше десятка типовых форм кривых для задания функций принадлежности.

Самыми простыми примерами представления нечётких множеств являются кусочно-линейные функции: трапецевидная и треугольная.

Нечёткие множества помогают работать с нечёткими понятиями, т. е. теми понятиями, которые не имеют точного значения. Они меняют свои значения в зависимости от задачи. Например, параметр “близко находящийся” в рамках задачи о доступности точки WiFi радиус действия которой 100 метров, будет лежать в промежутке от 0 до 20 метров, а в рамках задачи о нахождении соседнего города параметр будет лежать в промежутке от 10 до 80 км и т. д.

Нечёткий поиск в базах данных приносит максимальную пользу в случаях, когда требуется не только извлечь информацию, оперируя нечёткими понятиями, но и каким-то образом проранжировать её по убыванию (возрастанию) степени релевантности запроса. Это позволяет ответить на такие вопросы: какой маршрут передачи данных надо считать главным, а какой запасным; какую информацию надо отправить первой и т. д.

**Применение нечетких срезов при построении сети DTN.** Предположим, есть движущиеся объекты, через которые необходимо передать информацию путем построения сети DTN. Вся информация о передвигающихся объектах, на основе которых надо построить сеть DTN, хранится в базе данных и прошла уже первые три этапа: подготовки, очистки и трансформации. Атрибутами каждого движущегося объекта в базе данных являются: id – идентификатор объекта, время с начала дня, дата, скорость, координаты GPS, уровень доверия, скорость. Для построения правил передачи данных через сеть DTN необходимо сделать несколько срезов этой базы данных: по времени и по расстоянию.

**Срез по расстоянию.** Пусть  $x$  для функции принадлежности “расстояние”, лежит в промежутке от 0 до 500 (радиус действия оборудования). Данный срез можно представить в виде простой кусочно-линейной функции принадлежности (рис. 2).

$$\begin{cases} 1, & a \leq x \leq b, \\ (c - x)/(c - b), & b \leq x \leq c, \\ 0, & c \leq x. \end{cases}$$

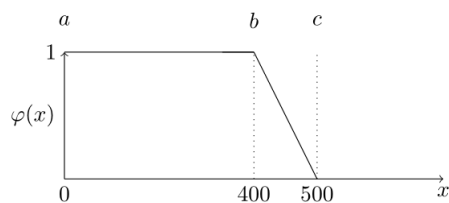


Рис. 2. График функции принадлежности “расстояние”

**Срез по времени.** Для функции принадлежности “время” допустим, что  $x$  должен лежать в промежутке от 0 до 15 (время задержки движущегося объекта). Данный срез можно тоже представить в виде кусочно-линейной функции принадлежности (рис. 3).

$$\begin{cases} 1, & a \leq x \leq b, \\ (c - x)/(c - b), & b \leq x \leq c, \\ 0, & c \leq x. \end{cases}$$

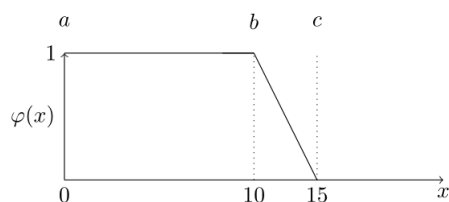


Рис. 3. График функции принадлежности “время”

После того, как определены функции принадлежности, можно составить запрос к базе и оценить полученные записи. Для этого необходимо еще задать степень принадлежности 0.8. Это число будет означать, что необходимо выбрать все записи степень принадлежности которых больше 0.8. Мы предлагаем использовать документно-ориентированную базу данных MongoDB. Эта база использует формат JSON, который очень удобен для парсинга, а так же поддерживает Map/Reduce для распределенных операций над данными. Надо учитывать, что MongoDB не имеет связей и данные должны храниться в одной коллекции. В случае анализа метрик собранных с устройств связи нам не нужны, поэтому мы можем воспользоваться быстрым хранилищем.

Результаты первого прохода этого алгоритма можно схематично изобразить в виде окружности радиусом 500 метров и некоторой совокупности точек, которые удовлетворяют заданным условиям. Повторяя этот алгоритм для найденных двух движущихся объектов, полагая каждый из них по очереди за входной объект будет построена целая совокупность окружностей.

Последними будут те окружности, которые содержат выходной объект. Алгоритм является конечным, так как начиная с определенной итерации, расстояние между входным объектом и выходным будет сокращаться вместе с числом движущихся объектов, обладающих степенью принадлежности больше 0.8.

В результате работы алгоритма, основанного на нечётких срезах, будет получена совокупность связанных между собой точек, соответствующих движущимся объектам. Это множество точек по существу представляет собой связанный ориентированный граф с одной входной вершиной и одной выходной вершиной.

На последнем этапе KDD “интерпретация” при построения динамической маршрутизации для DTN к полученному графу можно применить алгоритм Йена, который позволяет выбрать по графу  $k$ -е количество кратчайших путей. В качестве весов графа будут служить степени принадлежности. Все  $k$  путей будут проранжированны от наиболее оптимального к наименее. Критерием оптимальности будет служить все та же степень принадлежности. Первый в списке найденных путей маршрут передачи данных будет обладать наибольшей степенью принадлежности, а значит и вероятностью, что данные будут доставлены в срок и без потери связи.

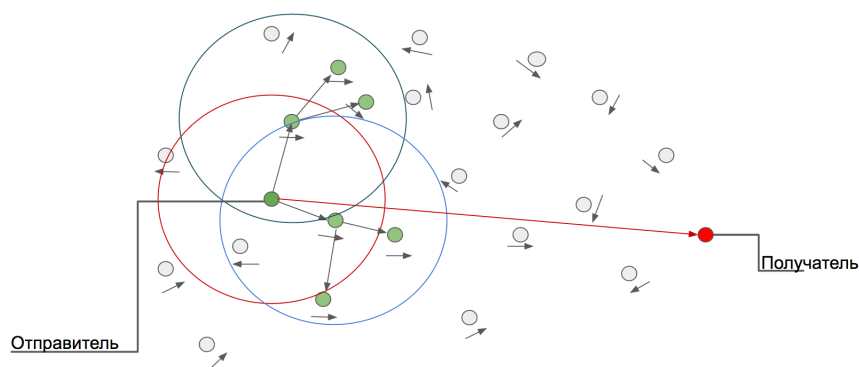


Рис. 4. Построение маршрута от одного устройства к другому (несколько итераций)

Для каждого найденного пути можно рассчитать общую степень принадлежности, например, как среднее арифметическое, или как минимальное значение по степеням принадлежности всех дуг, входящих в путь. Собственно дуга с минимальной степенью принадлежности представляет собой самое слабое звено в маршруте передачи данных. Даже если все остальные дуги пути обладают степенью принадлежности, равной единице, а одна дуга степенью 0,8, то вероятность доставки данных будет 0,8.

**Заключение.** Проведенные исследования показали, что применение механизма нечётких срезов позволяют провести многокритериальную выборку данных из базы данных с нечёткими условиями выбора.

Применение к полученной совокупности точек алгоритмов теории графов или принятия решений позволяет построить один или несколько ранжированных по убыванию по вероятности доставки данных маршрутов от одного объекта другому для построения динамической сети DTN.

В данной статье для хранения данных предложено использовать NoSQL или NewSQL хранилища, которые также поддерживают сложные запросы, и приведенная методика построения маршрутов для динамической сети DTN в этих базах данных реализуема с тем же успехом, что и в реляционных базах.

## Литература

- [1] Mundur P., Seligman M. Delay Tolerant Network Routing: Beyond Epidemic Routing // Proceedings of third international symposium on Wireless Pervasive Computing, 2008. – ISWPC 2008, 7–9 May 2008. – P. 550–553.
- [2] Tanenbaum A. S., Wetherall D. J. Computer Networks, 5th Ed. – Prentice Hall, Cloth, 2011. – 960 p.
- [3] Wood Lloyd, Holliday Peter, Floreani Daniel and M. Wesley. Eddy, Sharing the dream // Workshop on the Emergence of Delay-/Disruption-Tolerant Networks (E-DTN), part of the International Conference on Ultra Modern Telecommunication (ICUMT). – St. Petersburg: Russia, 14 October, 2009. – P. 1–2.
- [4] Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control, 1965. V. 8. – P. 338–353.
- [5] Ульянов С., Литвинцева Л., Добрынин В., Мишин А. Интеллектуальное робастное управление: технологии мягких вычислений. – М: PronetLabs, 2011. – С. 406.

# EqWorld

## Мир математических уравнений

<http://eqworld.ipmnet.ru>

Редактор: А. Д. Полянин



Уравнения занимают центральное место в современной математике и являются основой для математического моделирования многочисленных явлений и процессов в науке и технике.

Веб-сайт EqWorld содержит обширную информацию о решениях различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП), интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Описаны также некоторые методы решения уравнений, приведены интересные статьи, даны ссылки на математические справочники и монографии, указаны адреса научных веб-сайтов, издательств, журналов и др. Сайт постоянно пополняется новыми уравнениями, точными решениями и другой полезной информацией.

Веб-сайт EqWorld предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики и инженерных наук и является бесплатным для его пользователей.

- Точные решения
- Методы решения
- Вспомогательные разделы
- Программы
- Образование
- Об этом сайте
- Для авторов
- Информация

## СОДЕРЖАНИЕ

### *История и современность*

<b>Локоть Н. В.</b> История математики в российском образовании (до 1917 г.)	<b>3</b>
<b>Одинец В. П.</b> Вулих Захар Борисович (1844–1897) – первый в династии известных математиков–педагогов.....	<b>11</b>
<b><i>Современные проблемы теории дифференциальных уравнений</i></b>	
<b>Андреев В. К.</b> Решение задачи о медленном движении вязкой теплопроводной жидкости во вращающемся сферическом слое.....	<b>20</b>
<b>Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.</b> Одномерные и двумерные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов.....	<b>26</b>
<b>Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.</b> О диффеоморфности пар управляющих воздействий и локальных параметров тепломассообмена в точке торможения гиперзвукового потока.....	<b>33</b>
<b>Волосова Н. К., Вакуленко С. П., Волосова А. К., Волосов К. А.</b> К теории уравнения Korteweg–de Vries.....	<b>38</b>
<b>Гайнетдинова А. А.</b> Исследование систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с шестью симметриями.....	<b>52</b>
<b>Зайцев В. Ф.</b> Дифференциальные «пазлы» на решениях нелинейных уравнений.....	<b>58</b>
<b>Зайцев В. Ф., Иофе М. Д.</b> Новые решения нелинейных уравнений, представимые в классе полиномов.....	<b>63</b>
<b>Клебанов И. И., Иванов С. А., Маслова О. В.</b> Группы Ли, допускаемые уравнениями динамики идеального самогравитирующего политропного газа.....	<b>69</b>
<b>Кожевникова Л. М., Камалетдинов А. Ш.</b> Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными нелинейностями в неограниченных областях.....	<b>72</b>
<b>Лагодинский В. М.</b> К теории двухчастичного релятивистского уравнения Шрёдингера.....	<b>75</b>
<b>Линчук Л. В.</b> О первых интегралах обобщённого уравнения Рэлея.....	<b>81</b>
<b>Проневич А. Ф.</b> Необходимые условия существования автономных и цилиндричных абсолютных интегральных инвариантов первого порядка... ..	<b>85</b>
<b>Светлаков А. Н.</b> Исследование свойств интегральных кривых уравнения траектории луча.....	<b>89</b>
<b>Созонтова Е. А.</b> Условия существования и единственности решения задачи Гурса для системы уравнений $N$ -го порядка.....	<b>93</b>
<b>Сорокин В. Г.</b> Принципы использования тестовых задач для проверки адекватности численных методов решения реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием.....	<b>95</b>



<b>Спичак С. В., Стогний В. И., Копась И. Н.</b> Групповая классификация одного класса обобщённых нелинейных уравнений Колмогорова .....	<b>102</b>
<b>Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.</b> Универсальный алгоритм решения обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой .....	<b>104</b>
<b>Флегонтов А. В.</b> К вопросу о проверке решений дифференциальных уравнений в СКМ .....	<b>109</b>
<b>Хакимова З. Н.</b> Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев .....	<b>112</b>

*Современные проблемы теории функций и функционального анализа*

<b>Будаев В. Д.</b> Некоторые оценки корневых функций обыкновенных несамосопряжённых дифференциальных операторов .....	<b>118</b>
<b>Карев А. В., Тихонов И. В.</b> О распределении нулей одной целой функции типа Миттаг-Леффлера, важной для теории обратных задач .....	<b>122</b>
<b>Локоть В. В., Мартынов О. М.</b> О сильной единственности операторов проектирования с единичной нормой в пространстве $l_{\infty}^{(4)}$ .....	<b>128</b>
<b>Локоть В. В., Мартынов О. М.</b> Операторы проектирования по системе Уолша в пространстве $L_1$ .....	<b>134</b>
<b>Петросова М. А.</b> О некоторых выражениях для центральных моментов, нужных для доказательства аналогов теоремы Вороновской .....	<b>142</b>
<b>Ситник С. М., Шишкина Э. Л.</b> Дробные степени оператора Бесселя на полуоси и их свойства .....	<b>144</b>
<b>Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.</b> Что такое аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна .....	<b>150</b>

*Актуальные проблемы математического образования*

<b>Андреева Н. М., Пак Н. И.</b> Интеграция МООК в учебный процесс по информатике на основе учебных дорожных карт .....	<b>161</b>
<b>Делюкова Я. В.</b> Об изучении вероятностей в школе .....	<b>164</b>
<b>Гарминович Н. А., Логинов А. В.</b> Интеграционный аспект формирования терминосистемы при обучении алгебре .....	<b>167</b>
<b>Кузнецова М. С., Рукшин С. Е.</b> Некоторые соотношения для треугольника, вписанного в данный .....	<b>172</b>
<b>Мельников Ю. Б., Мельникова Н. В.</b> Модели-полиады и их использование при обучении математике .....	<b>183</b>
<b>Мельников Ю. Б., Соловьянов В. Б., Ширпужев С. В.</b> Обучение осуществлению проектной и исследовательской деятельности при изучении математики с позиций теории моделирования .....	<b>187</b>
<b>Рукшин С. Е., Суслина М. Е.</b> О некоторых проблемах обучения решению нестандартных задач, часть 3: о диалектике условия задачи и метода решения .....	<b>191</b>

Якубсон М. Я. Цели изучения доказательств некоторых теорем студентами технических вузов .....	196
---	-----

*Актуальные информационные системы и технологии моделирования*

Алибеков М. Р., Астахов Д. В., Каширина Е. В. Разработка алгоритма структурного динамического моделирования таблиц гидрометеорологических данных с помощью регулярных выражений .....	199
Богатырев М. Ю., Интякова А. В., Самодуров К. Д. Система извлечения фактов на основе концептуальных моделей текстовых данных .....	205
Зуев С. В., Каспаров А. А., Конобеевский Е. С. Метод оптимизации спектров коррелирующих наблюдаемых в ядерных реакциях .....	212
Подорога А. В., Тихонов И. В. Компьютерное моделирование решений квазилинейного уравнения дорожного движения .....	216
Флегонтов А. В. О мягкости вычислений и оптимальности планов .....	225
Чертовской В. Д. Компьютерное моделирование системы адаптивного автоматизированного управления производством .....	232
Шичкина Ю. А., Коблов А. А. Применение РНР для параллельной реализации процесса трансформации данных в рамках теории KDD (Knowledge Discovery in Databases) .....	237
Шичкина Ю. А., Плотникова А. А. Построения оптимальных маршрутов для передачи данных в сети DTN с помощью нечётких срезов баз данных .....	246
EqWorld .....	255
Содержание .....	256

**НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Материалы научной конференции  
ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2017,  
посвящённой 220-летию Университета  
10–14 апреля 2017 г.

Печатается с готового оригинал-макета, предоставленного авторами

---

Подписано в печать 26.03.2017. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объём 16,25 уч. изд. л. 16,25 усл. печ. л.  
Тираж 100 экз. Заказ № 78ц

Издательство РГПУ им. А. И. Герцена  
191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48

---

Типография РГПУ. 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48