Казанский федеральный
УНИВЕРСИТЕТ

Николай Григорьевич ЧЕБОТАРЕВ

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НИКОЛАЙ ГРИГОРЬЕВИЧ ЧЕБОТАРЕВ

(1894–1947)

КАЗАНЬ
2019

УДК 512
ББК 22.14
Н63

Книга издана при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект №19-01-20103)

Научные редакторы:
М.М. Арсланов, Ю.А. Альпин

Н63 **Николай Григорьевич Чеботарев (1894–1947**) / под ред. М.М. Арсланова, Ю.А. Альпина. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2019. – 336 с.

ISBN 978-5-00130-169-1

Сборник посвящен 125-летнему юбилею основателя Казанской алгебраической школы Н.Г. Чеботарева. Он содержит его «Математическую автобиографию», воспоминания о нем его учеников и родственников, а также другие материалы, освещающие его жизнь и научное творчество.

Сборник предназначен для лиц, интересующихся математикой и ее историей.

УДК 512
ББК 22.14

ISBN 978-5-00130-169-1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник посвящен выдающемуся российскому математику члену-корреспонденту АН СССР, основателю Казанской алгебраической школы Николаю Григорьевичу Чеботареву.

Н.Г. Чеботарев начал свою научную деятельность под руководством Дмитрия Александровича Граве, крупного российского математика, почетного члена Академии наук СССР, основателя и руководителя одной из первых крупных российских математических школ. Первый («доказанский») период творчества Н.Г. Чеботарева подробно изложен в его «Математической автобиографии», включенной в этот сборник.

В Казань Николай Григорьевич переехал в 1928 году и вся его последующая научная деятельность проходила в стенах нашего университета, на этот период его жизни приходится наиболее значительная часть его научной деятельности. Н.Г. Чеботарев является основателем кафедры алгебры при Казанском университете и первым ее заведующим. При его деятельном участии в 1934 году был организован Научно-исследовательский институт математики и механики, сыгравший огромную роль в появлении и развитии новых направлений математики в Казанском университете. Н.Г. Чеботарев стал первым директором Института, после его смерти институту было присвоено имя Н.Г. Чеботарева. К сожалению, в 2011 году Институт прекратил существование.

В 2019 году исполняется 125 лет со дня рождения Н.Г. Чеботарева. В память этой даты в нашем университете 24–28 июня пройдет крупная международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». Публикация сборника приурочена к этому событию. В него вошли материалы аналогичного сборника, посвященного 100-летнему юбилею Н.Г. Чеботарева. Среди других материалов, включенных в сборник, — статья Чеботарева, содержащая его знаменитую теорему плотности и комментарии к ней акад. И.Р. Шафаревича. Помещен также перевод статьи П. Стивенхагена и Х.В. Ленстра, содержащей глубокий анализ теоремы плотности и обсуждение на примере этой теоремы и двух других задач (о квадрируемости луночек и одной задачи А.М. Островского) математического стиля Николая Григорьевича. Мы благодарны издательству Шпрингер, предоставившему нам право на эту публикацию. Завершает сборник краткий обзор алгебраических исследований учеников Н.Г. и его последователей на кафедре алгебры и математической логики.

М.М. Арсланов

О НИКОЛАЕ ГРИГОРЬЕВИЧЕ ЧЕБОТАРЕВЕ *

И.Р. Шафаревич

Мне трудно отделить мое восприятие математического творчества Николая Григорьевича Чеботарева от восприятия его как личности. Когда я его впервые увидел — еще до войны — мы находились на противоположных концах лестницы математического успеха. Я — студент, он — знаменитый математик с репутацией классика. Особенно поражало мое воображение то, что достижения Николая Григорьевича относились к классическим областям математики, в то время в нашей стране мало известным — теории алгебраических чисел, алгебраических функций, группам Ли. А более всего вызывала восхищение его роль в развитии теории полей классов, считавшейся тогда одной из вершин математики, но столь трудной, что никому из московских математиков ее разобрать не удалось. Я помню несколько семинаров с участием ведущих специалистов по теории чисел, посвященных попытке понять теорию полей классов, но окончившихся полной неудачей. Про Чеботарева же было известно, что для решения одной давно стоявшей проблемы он создал метод, позже примененный Артином для доказательства своего закона взаимности — центральной теоремы теории полей классов. До войны на моей памяти Николай Григорьевич несколько раз посетил Москву и я с трепетом слушал его сообщения на Московском Математическом Обществе или происходивших тогда конференциях. Восторг мой только усиливался некоторой непонятностью и недоговоренностью его выступлений.

Как ни странно, но впечатление, сложившееся у меня тогда о Николае Григорьевиче, кажется мне верным и сейчас, более полувека спустя. Оно лучше всего выражается термином “классик”. Для Чеботарева характерно “классическое” восприятие математики как единого целого. Эта целостность имеет два измерения:

---

*Сб. Николай Григорьевич Чеботарев/под ред. Ю.Б. Ермолаева. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. — С. 4–8.

единство существующей сейчас математики и единство "по координате времени", т. е. представление о развитии математики как о едином непрерывном процессе, основанном на преемственности разных поколений. В первом отношении характер творчества Николая Григорьевича отразился хотя бы в его "Собрании Сочинений", где материал равномерно разделен по трем темам: теория чисел, алгебра, анализ. Вторая сторона концепции была особенно важна в предвоенные и первые послевоенные годы, когда в нашей математике было сильно распространено "авангардистское" течение, с презрением смотревшее на предшествующую математику как на что-то устаревшее и уже неинтересное.

Облику "классика" соответствует и блистательный результат Николая Григорьевича: "теорема плотностей Чеботарева". Я не буду и пытаться дать здесь обзор всего творчества, но об этой теореме хотелось бы сказать подробнее — она является безусловно самым замечательным достижением Чеботарева. Речь в ней идет об основном вопросе теории алгебраических чисел: как простые числа разлагаются на множители в полях алгебраических чисел? Более точная постановка вопроса такова. Пусть K — нормальное расширение поля рациональных чисел, p — простое число, $\mathfrak{P}$ — один из его простых делителей в K. Если $\mathfrak{O}$ — кольцо целых алгебраических чисел поля K, то фактор кольцо $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ является конечным полем. Подгруппа группы Галуа поля K, оставляющая на месте идеал $\mathfrak{P}$, определяет автоморфизм этого поля. Все автоморфизмы конечного поля известны и имеют вид $x \mapsto x^{p^k}$; в частности, группа Галуа конечного поля имеет инвариантно определенную образующую $x \mapsto x^p$. Легко доказать, что указанным выше способом получаются все автоморфизмы поля $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$, а если отвлечься от конечного числа простых чисел p, делящих дискриминант поля K, каждый из них получается в точности из одного автоморфизма поля K. Таким образом, существует единственный автоморфизм g поля K, оставляющий инвариантным идеал $\mathfrak{P}$ и такой, что $g(x) \equiv x^p \bmod \mathfrak{P}$ для любого целого числа $x \in \mathfrak{O}$. Характер разложения простого числа p в поле K исчерпывающим образом описывается этим автоморфизмом g, называемым автоморфизмом Фробениуса и обозначаемым $\left(\frac{K}{\mathfrak{P}}\right)$. Вопрос о том, "какие типы разложения простых чисел возможны?" формулируется как вопрос о существовании простых чисел с заданным автоморфизмом $\left(\frac{K}{\mathfrak{P}}\right)$. Теорема Чеботарева и утверждает, что для любого автоморфизма $g \in G$ существует бесконечное число простых чисел p для которых $\left(\frac{K}{\mathfrak{P}}\right) = g$ для некоторого простого делителя $\mathfrak{P}$ числа p. Это утверждение называется "теоремой плотностей", так как доказывается, что в смысле некоего понятия плотности, это бесконечное множество простых чисел, соответствующих заданному автоморфизму g, имеет плотность, пропорциональную числу элементов, сопряженных с g в группе G. Утверждение было высказано в виде гипотезы Фробениусом в 1896 г. и доказано Чеботаревым ровно 30 лет спустя. Для частного случая, когда K получается присоединением примитивного корня ζ степени n из 1, определение автоморфизма g дает $g(\zeta) \equiv \zeta^p \bmod \mathfrak{P}$, откуда легко следует, что $g(\zeta) = \zeta^p$, т. е. g зависит от того, к какой арифметической прогрессии $nx + a$ принадлежит p, и теорема Чеботарева превращается в теорему Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Можно сказать, что она дает для произвольного многочлена с целыми коэффициентами в точности то же, что теорема Дирихле — для многочлена $x^n - 1$.

Приложения теоремы Чеботарева столь многочисленны, что нет никакой возможности их перечислить. Если нас интересует существование простых чисел с некоторым свойством, то надо выразить это свойство как условие $\left(\frac{K}{\mathfrak{P}}\right) = g$ в надлежаще подобранном поле K и применить теорему Чеботарева. Я думаю, что безнадежно было бы сосчитать число ссылок на эту теорему. Она является одним из центральных результатов теории чисел и будет занимать это место до тех пор, пока теория чисел существует.

Такой же "классический" тип мышления проявляется в том, как Николай Григорьевич воспринимал математику. Примером может служить обзорный доклад по теории Галуа, прочитанный им в 1932 году на Всемирном Математическом Конгрессе в Цюрихе, посвященном 100-летию со дня смерти Галуа. Впоследствии он расширил его до монографии "Теория Галуа". В ней он трактует теорию Галуа как главу еще складывающейся "Науки о рациональном". Книга полна прекрасных идей и новых точек зрения. Чтобы не быть голословным, приведу примеры того, чем я обязан этой книге. В ней Чеботарев ставит вопрос об обобщении теории

Галуа на поля алгебраических функций. Эта идея поразила меня и всегда привлекала. Впоследствии она частично реализовалась в нашей совместной с И.И.Пятецким-Шапиро работе “Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация”. С другой стороны, из этой же книги я узнал о проблеме представления эллиптической кривой уравнением наименьшей возможной степени и о примерах Энриквеса (основанных на работах Альфана) эллиптических кривых над полем рациональных функций, имеющих любую заданную степень и не сводимых к кривой меньшей степени. Впоследствии мне удалось решить аналогичный вопрос для эллиптических кривых над полем рациональных чисел.

Другим примером является книга Н.Г. Чеботарева “Группы Ли”. Как правило, при развитии теории ее основные положения идейно проявляются и укладываются в общие концепции математики своего времени. Но одновременно некоторая часть, не укладывающаяся в эти концепции, выпадает из сознания математиков и забывается. Позже их приходится открывать заново и переосмысливать. Так было и с теорией групп Ли: прогресс в топологическом и алгебраическом аспектах сопровождался “забыванием” многих прекрасных и глубоких результатов Картана и Ли. Но эта черта полностью отсутствует в книге Чеботарева. Кажется, что автор чувствует себя “своим человеком” в математике как XIX, так и середины XX в. Так, в книге присутствуют “забытые” к этому времени фундаментальные понятия вроде “бесконечных групп” Ли (или псевдогрупп) Картана, такие прекрасные результаты как принадлежащая Ли классификация групп, действующих на прямой и на плоскости и т. д.

Такой же характер и еще одной монографии Николая Григорьевича — “Теория алгебраических функций”. Наряду с материалом более или менее стандартным в руководствах по этой области (иностранных: русских к тому времени не было) в ней встречается много вопросов, ныне выпавших из подобных руководств: точки Вейерштрасса, θ-функции, проблема Шотки, поверхности переноса и т. д.

Такой же “классический” характер мышления сказывается не только в достижениях Николая Григорьевича, но и в ошибках. Я имею в виду его работы по проблеме резольвент. В одном своем письме он говорит: “Красота в математике идет рука об руку с

целесообразностью, (...) мы редко называем изящными рассуждения, не приводящие к законченной цели". Такому утверждению противоречат, по крайней мере на данный момент, эти его работы, оказавшиеся ошибочными, хотя они основаны на исключительно красивой идее. Именно Чеботарев предположил, что вопрос о сведении уравнения к другому уравнению, коэффициенты которого зависят от меньшего числа параметров, зависит от возможности вложения (с определенными свойствами) его группы Галуа в группу Ли соответствующей размерности ("проблема одевания"). Такова действительно ситуация в уравнениях 5-й степени: это и есть теория "уравнения икосаэдра" Клейна. Идея Николая Григорьевича, как казалось, устанавливала совершенно неожиданную связь между двумя классическими разделами математики. Хотя конкретное утверждение оказалось ошибочным, мне кажется вероятным, что основная идея может снова воскреснуть в какой-то видоизмененной форме. Так что Чеботарев окажется все-таки правым в обоих смыслах: и в том, что проблема одевания связана с проблемой резольвент и в своем суждении о роли красоты в математике, приведенном выше.

Любое развитие: культурное, социальное, техническое, — является сложным и часто болезненным процессом. Оно состоит из последовательных перестроек соответствующей структуры, каждая из которых таит в себе и возможность болезненного развития. В том, что математика, несмотря на некоторые уклонения, развивается гармонично, не допуская разрывов своего единого тела, громадная роль принадлежит таким математикам как Николай Григорьевич Чеботарев, своим творчеством как бы соединяющим разные поколения и даже эпохи.

НИКОЛАЙ ГРИГОРЬЕВИЧ ЧЕБОТАРЕВ [*]

В.В. Морозов[1]

До конца дней своих Николай Григорьевич (которого в последующем автор как математик, и, следовательно, человек, склонный к специальным обозначениям, именует сокращенно НГ) был страстным курильщиком — привычка, приобретенная в годы первой мировой войны и разрухи. "Покуришь — и голод как будто проходит", — вспоминал он. Папирос он не любил, предпочитая им сигареты, каждую из которых делил пополам и вставлял в мундштук, но и то, как кажется, употреблял он их, скорее уступая интересам окружающих, чем следуя собственному вкусу. Более всего любил он свертывать "цыгарки" — самокрутки из половины стандартного листика курительной бумаги, начиняя их обыкновенной махоркой. Не раз, приготовляя очередную закурку, он цитировал невесть кем сочиненные стихи:

Каменецки кавалеры, что гуляют по ночам,
Они турецкий табак курят, но с махоркой пополам!

Именно в городе Каменец-Подольске[2] в 1894 году 3 июня старого стиля, то есть 15 июня нового стиля, и родился НГ.

К экскурсиям в прошлое с данными о происхождении НГ всегда относился неодобрительно, расценивая людей только по тому, что они сами представляют собой. Однажды, когда ему пришлось заполнять одну сверхподробную анкету с графами о родителях и родителях жены чуть ли не до седьмого колена, он прочеркнул в ней все графы, относящиеся к родителям жены. "Когда я женился, я не требовал от своей жены сведений об ее происхождении", — заявил он. И в автобиографиях своих НГ не упоминает о родителях. Есть только упоминание о том, что отец его был судебным деятелем. "Председатель суда в Умани[3], почетный гражданин", — пишет НГ в одной из анкет.

---

[*]Сб. Николай Григорьевич Чеботарев/под ред. Ю.Б. Ермолаева. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. — С. 9–53.

[1]Примечания даны в конце очерка

Впрочем, всякого рода бумажное делопроизводство НГ органически ненавидел и заниматься им не умел.

> Совершенно поразительный пример этого — организация Математического института при Казанском университете после Отечественной войны. Тогда НГ представил в министерство все требуемые материалы, но утверждение штатов и, следовательно, открытие института задержалось почти на полгода из-за того, что, предусмотрев должности секретарей, лаборантов, научных сотрудников и т.д., НГ не предусмотрел только пустяка — должности директора института.

Не любил он заполнять анкеты и писать автобиографии (кто это любит? Теркин даже на том свете пытался уклониться от этого), а в последние годы войны и первые послевоенные годы нас захватил целый шторм этих бумаг. В личном деле НГ хранится его автобиография 1944 года — документ, вероятно, уникальный:

> “Николай Григорьевич Чеботарев родился в 1894 году. По окончании Каменец-Подольской гимназии (1912) и Киевского университета (1916) был оставлен аспирантом. В 1918 году был сделан доцентом. В 1921 году переехал в Одессу, где был секретарем научно-исследовательской кафедры при Институте народного образования, а с 1927–28[4] года состоит профессором Казанского государственного университета”.

Есть основания думать, что эта автобиография чересчур подробна. Однажды я и НГ сидели, составляя очередную партию документации; пока я изнывал в муках творчества над автобиографией, НГ закончил и показал мне свою. Я обомлел, прочитав:

> “Автобиография. Я родился в 1894 году в Каменец-Подольске. В жизни моей ничего существенного не произошло. Н. Чеботарев”,

и начал уговаривать НГ написать чуть подробнее — подозреваю, что выше и приведен результат моих усилий. Все же было два случая, когда НГ писал свою автобиографию всерьез: первый случай — его “Математическая автобиография”, доведенная, к сожалению, лишь до 1925 года; в ней содержится ряд автобиографических сведений, и я широко пользуюсь ею, описывая период жизни НГ до появления его в Казани. Второй случай — приписываемый мне биографический очерк в брошюре “Николай Григорьевич Чеботарев. Казань, 1945”. В связи со 140-летним юбилеем Казанского университета возникла мысль о создании серии брошюр, посвященных крупнейшим университетским ученым, и мне было поручено составить биографический очерк о НГ; я сообщил ему об этом и предупредил, что по этому поводу собираюсь его интервьюировать. Не успел я свое благое намерение претворить в действие, как НГ неожиданно сам появился у меня, вытащил из своего неизменного спутника-чемодана несколько исписанных листов и объявил мне в слегка возбужденном тоне, что он написал для меня все, что следовало написать; смысл речей его был таков, что предоставь он мне написать это самому, я непременно написал бы какую-нибудь чепуху. И я взял этот очерк жизни и творчества и опубликовал его под своим именем, включив в него лишь некоторые мои реминисценции, а также несколько фраз, требуемых в таких сочинениях общесоюзным стандартом.

Мимолетное упоминание в “Математической автобиографии” (цитируемой ниже, как МА) о “твердых воспитательных принципах родителей” и бегстве в математику как область, не подчиненную их контролю, наводит на мысль об их семье, организуемой неким непререкаемым авторитетом, но лишенной внутренней спайки. По-видимому, НГ был довольно близок к отцу, Григорию Николаевичу, но мать, Вера Николаевна, его подавляла. Женщина энергичная и решительная, она посвятила себя семье и для ее блага была готова на все: так, в 1910 году, когда после перенесенной тяжелой формы экссудативного плеврита у НГ систематически отмечалось повышение температуры и ему было рекомендовано лечение на Ривьере, она не поколебалась продать большую часть обстановки, чтобы повезти детей в Италию; позже, в годы разрухи, с той же энергией она занялась торговлей на базаре и этим прокармливала семью. В эту же пору благоденствия (председатель суда являлся важным городским сановником и уж во всяком случае был хорошо обеспеченным лицом) она стремилась всячески поддержать честь семьи и, в частности, дать детям воспитание, подобающее их положению; вряд ли при этом можно было ожидать, чтобы много внимания обращалось на желания и особенности детей — так, полученные НГ в молодости уроки танцев явно не пошли ему впрок. Представляется, что именно она держала в семье бразды правления, держала их крепко и несколько деспотично, и с этим не мог примириться живой характер НГ; между матерью и сыном не возникло украшающего семейные отношения взаимного доверия, он сторонился матери, и, возможно, этому и была обязана наша математика появлением в ней крупного алгебраиста. Григорий Николаевич после революции работал уже не по своей специальности, скончался он в 1922 году от холеры в Одессе, Вера же Николаевна впоследствии отправилась к сестрам в Краснодар, где и провела остаток дней своих: скончалась она в 1935 году. Был у НГ брат — медик (моложе его); во время войны он был мобилизован; за пределами России заболел тифом и по выздоровлении остался в Югославии; НГ не имел с ним связей.

Далее следует написать традиционную фразу: склонность к математике НГ проявлял еще с детства. В 1909 году 15-летним мальчиком он изучает логарифмы, бином Ньютона и неопределенные уравнения и дает самостоятельное доказательство малой теоремы Ферма, услышав о ней от одной старшей гимназистки; в то же время его заинтересовывают закон изменения атмосферного давления с высотой и задача о линии погони, он размышляет о них, но конечно, ни к каким результатам не приходит, ибо о высшей математике он в то время еще не имел представления: все курсы высшей математики, имевшиеся в Каменец-Подольском, вспоминает он в МА, были сосредоточены в гимназической библиотеке и находились в "долгосрочной аренде" у И.Я. Штайермана, учившегося двумя годами старше. Через год отец купил НГ первые книги по высшей математике — "Аналитическую геометрию" Пржевальского и статью Лобачевского "О началах геометрии" с примечаниями Желтухина (которую в тот год, как писал НГ, он так и не мог понять); одновременно перед ним соблазнительным видением мелькнули книги по дифференциальному и интегральному исчислениям, однако Григорий Николаевич усомнился в способности сына понять их в этом возрасте, так что покупка не состоялась. Более счастливым оказался следующий год — отец купил для НГ "Элементы высшей математики" Лоренца; в том же году НГ разобрался в статье Лобачевского в такой мере, что смог получить самостоятельный результат — представление уравнений окружности и орицикла в единой форме.

Закончив в 1912 году гимназию и воспользовавшись переводом отца в Киев, невзирая на сомнения родителей, которым математика представлялась трудной специальностью, НГ поступил на физико-математический факультет Киевского университета, или, как его называли тогда, Университета св. Владимира. В числе его университетских коллег были однокурсник А.Б. Вериго, впоследствии получивший известность своими исследованиями космических лучей, а на четвертом курсе в то время учились О.Ю. Шмидт и Б.Н. Делоне — последний оказал большое влияние на направление первых работ НГ; в частности, от него НГ впервые услышал о проблеме Фробениуса, решение которой составило тему диссертации НГ и принесло ему заслуженную славу.

В студенческие годы на первом курсе НГ занимался главным образом учебными предметами: летом, при переходе на второй курс, он перевел на русский язык большую часть сокращенного учебника алгебры Вебера, одновременно изучив теорию Галуа и овладев немецким языком.

Немецкой письменной речью НГ владел прекрасно — овладеть ею ему помогла еще работа его с Ю.Г. Рабиновичем над переводом его статьи о плотностях на немецкий язык (я помню, что рефераты для “Zentralblatt für Mathematik” он писал прямо на беловик без помарок). Немецкой устной речью он владел хуже: к интересным строчкам о первом знакомстве с Л.А. Люстерником в §17 МА следует добавить воспоминание НГ о том, что, приехав в Германию, он обнаружил, что жители там очень плохо говорят по-немецки. Он встретил только одного человека, говорившего по-немецки исключительно чисто и ясно, но на комплимент НГ — “Как Вы хорошо говорите по-немецки!” — тот, улыбнувшись, ответил: “Это потому, что я русский!”

Со второго курса НГ принимает участие в алгебраическом семинаре проф. Д.А. Граве. Здесь начинается его исследовательская работа и, по современной терминологии, работа по повышению квалификации: он изучает теорию аналитических функций, теорию алгебраических функций по монографии Гензеля-Ландсберга, алгебраические числа по Гензелю и т.д. В своих докладах на семинаре Граве он сообщает о полученных им оригинальных результатах, впоследствии вошедших в его статьи и монографии. Последний год его студенческой жизни протекал в тяжелых условиях военного времени: осенью 1915 года Университет св. Владимира был эвакуирован в Саратов, причем главная университетская библиотека лежала там в ящиках, и можно было пользоваться только маленькой библиотекой математического кабинета, а это осложняло научную работу; кроме того, вообще жизнь заполнялась массой бытовых забот. Но НГ не раз говаривал, что его научная продуктивность возрастала в наиболее трудные периоды его жизни — и в этот период его научная деятельность стала интенсивней: он дает доказательства теорем монодромии и Дедекинда и способ построения уравнения без аффекта, как оказалось впоследствии, совпадающий со способом Бауэра. "Моя дипломная работа, вспоминал НГ, состояла из конспекта по теории p-адических чисел, который я готовил для какого-то несостоявшегося семинара. Конспект был составлен довольно плохо и даже содержал ошибки, но он включал в себя теорему монодромии, доказательство теоремы Дедекинда и способ нахождения уравнений без аффекта. Д.А. Граве, не читая, сделал на конспекте одобрительную надпись, на основании которой государственная комиссия поставила мне за него "весьма удовлетворительно".

В государственном архиве УССР в деле об оставлении в Киевском университете профессорскими стипендиатами Русецкого, Тарасевича и Чеботарева была обнаружена рукопись НГ под названием "Несколько приложений теории идеалов к алгебре" (опубликована В.А. Добровольским в "Историко-математических исследованиях", XIV, 1961), представленная, по современной терминологии, в качестве реферата по избранной специальности. Видимо, она является извлечением из дипломной работы — все результаты, о которых упоминает НГ, в ней содержатся, однако конспектом по теории p-адических чисел ее назвать нельзя.

По окончании университета НГ был оставлен при нем “для приготовления к профессорскому званию”. Если ныне у нас существуют две ученые степени — кандидатская (название которой выбрано весьма неудачно), для достижения которой нужно сдать кандидатские экзамены по специальности, иностранному языку и по основам марксизма-ленинизма, а затем защитить кандидатскую диссертацию, и докторская, для получения которой нужно иметь степень кандидата и защитить докторскую диссертацию, то в дореволюционное время ученых степеней было три: первая — кандидатская, присуждавшаяся каждому, успешно закончившему университет с защитой дипломной работы, вторая — магистерская (одно из значений латинского слова “магистр” — учитель, наставник), эквивалентная современной кандидатской — для ее получения требовалось сдать магистерские экзамены, включавшие, конечно, только экзамены по специальности (вследствие почти полного отсутствия специальной литературы на русском языке, каждому научному работнику в то время волей-неволей приходилось осваивать, по крайней мере в пределах чтения специальной литературы, два–три языка) и защитить магистерскую диссертацию, и третья — докторская. Задачей лица, оставленного для приготовления к профессорскому званию (аналог нашей аспирантуры), была сдача магистерских экзаменов и подготовка диссертации. Оставление проводилось обычно на два года, и абитуриент получал соответствующее содержание — стипендию. Однако тяжелые годы войны и разрухи мало благоприятствовали исследовательской работе НГ: он должен был искать дополнительный заработок (работал преподавателем математики в Лесной гимназии в Пуще Водице близ Киева) и смог только лишь приготовиться к экзаменам — впрочем, экзаменам Д.А. Граве не придавал большого значения, справедливо считая, что суть не в экзаменах, а в самостоятельной работе. Как бы то ни было, 15 октября 1918 года НГ выдержал магистерские экзамены и по прочтении двух пробных лекций, одна из которых посвящалась обобщению комплексного умножения эллиптических функций, а вторая (на тему, предложенную факультетом) — геодезической кривизне поверхностей, был "сделан доцентом", как написал НГ в цитированной выше автобиографии, т. е. получил звание приват-доцента.

> Экзамены, — вспоминал НГ, начались "торжественным" вопросом Д.А. Граве: "Скажите, НГ, когда линейная подстановка обратима?" На что последовал не менее торжественный ответ: "Линейная подстановка обратима тогда и только тогда, когда определитель ее отличен от нуля!" Последовало еще несколько вопросов и ответов того же рода, но внушивших немалое уважение второму члену комиссии — нематематику, а потом Д.А. Граве "разошелся" и начал спрашивать НГ "по-настоящему".

После этого до 1921 года НГ жил в Киеве и "довольно прилично зарабатывал, главным образом, частными уроками". То, что размеры своего заработка НГ считал довольно приличными, объясняется, как я думаю, скорее всего весьма незначительными потребностями (они такими и остались до последних дней), ибо вел он, по существу, студенческий образ жизни — недаром дворник дома, где он жил, при представлении сведений о жильцах в соответствующие инстанции об НГ писал: звание — доцент, занятие — студент. В действительности же эти годы были тяжелыми для всех; родители НГ жили в это время в Одессе. Григорий Николаевич, бывший председатель окружного суда, в послереволюционном юридическом мире оказался явно нежелательной персоной, работал не по специальности и имел нищенский заработок — короче говоря, родители НГ голодали, и перед НГ встала проблема объединения с ними; но переезды с имуществом, хотя бы и маленьким, представляли в то время почти непреодолимые трудности, а у самого НГ имущества, конечно, не было, и он решил переехать в Одессу сам; правда, его смущал вопрос о заработке, но с другой стороны, в пользу Одессы повлияла встреча с В.Ф. Каганом, работавшим тогда в Одессе.

> "Он обещал мне всяческое содействие, но не мог гарантировать заработка. Вместе с тем он прельстил меня

> перспективой печатания в журналах, которые в то время издавались в Одессе; в Киеве же журналы не выходили. Я вспоминаю свою фразу: "Подумайте, мне еще ни разу не удалось напечататься", на которую мой собеседник многозначительно не подал реплики", — писал НГ в МА.

Но и после переезда НГ в Одессу материальное положение семьи оставалось очень тяжелым. Должность сверхштатного профессора Института народного образования, видимо, не давала заработка, частных уроков НГ получить не мог, к тому же, как он сам писал, его преподавательская деятельность не отличалась высоким качеством: "В 1923 году сделался преподавателем Совпартшколы (!), но не имел успеха". Одесские математики С.О. Шатуновский, В.Ф. Каган, Ю.Г. Рабинович выхлопотали НГ академический паек, ставший для него большой поддержкой; что же касается научного контакта, то его, как вспоминает НГ, с ними не установилось: "Мне было чуждо их направление, которое сводилось к строгому обоснованию начал математических дисциплин".

Зато собственная научная деятельность НГ в этот период характеризуется расцветом: в 1921 году он получил новое доказательство теоремы Кронекера–Вебера, но самое главное — летом 1922 года (когда в Одессе свирепствовала холера, унесшая в могилу его отца) НГ завершил работу по плотностям множеств простых чисел, принадлежащих классам подстановок группы Галуа заданного нормального алгебраического поля. Эту работу он "обдумывал, нося воду из нижней части города (Пересыпи в Одессе) в верхнюю, или нося ведра с капустой на базар, где моя мать продавала ее и этим прокармливала всю семью" (письмо НГ к Рокотовскому). Работа эта сыграла большую роль в развитии теории алгебраических чисел. Ее перевод в 1925 году появился в "Mathematische Annalen", и "Tschebotareffsche Dichtigkeitssatz"[5] принесли молодому ученому мировую известность.

А молодой ученый в это время был тем более серьезно озабочен своим житейским устройством, что в 1924 году женился. Была попытка поступить на работу в Москву — она оказалась неудачной, — НГ снова возвратился в Одессу, где оставалась его семья, и сделался секретарем научно-исследовательской кафедры при Одесском институте народного образования. Трудно представить себе, что это была за должность, но очевидно одно — зарплата там была мизерная, а между тем в 1926 году у НГ родился сын, по семейной традиции названный Григорием; нужно было думать об обеспечении семьи, а так как в Одессе это не представлялось возможным, то перед НГ серьезно встал вопрос о переезде в другой город.

Что же касается научной жизни НГ, то она в этот период устраивалась наилучшим образом.

Во-первых, у НГ появился первый ученик. Я цитирую здесь МА: “В 1924 году ко мне пришел 17-летний молодой человек, Марк Григорьевич Крейн. Он приехал из Киева, не окончив даже средней школы, но принес интересную работу “Le système dérivé et les contours dérivés” с очень свежим содержанием, которая вскоре была напечатана в одесском журнале. Его знания по математике были значительно выше, чем у его сверстников, и мне удалось добиться, чтобы его приняли в аспирантуру. Он стал работать под моим руководством, главным образом, по теории аналитических функций. У него было замечательное качество — умение увлекать математикой своих сверстников, и благодаря ему мне удалось организовать в Одессе семинар, на котором, как я помню, изучались алгебраические функции, а также непрерывные группы. Его интересы вскоре переключились на теорию матриц, от них — на линейные операторы. После моего отъезда из Одессы он фактически стал главой Одесского математического коллектива, приобрел громадное количество учеников, составивших школу по функциональному анализу. Мне очень лестно считать его своим первым учеником”.

Во-вторых, в 1925 году НГ ездил в Германию, где познакомился с рядом выдающихся математиков. Основной целью его командировки было участие в работе съезда Немецкого математического Объединения в Данциге; там НГ сделал доклад по поверхностям переноса, познакомился с родоначальницей современной алгебры Эмми Нетер, а также с Бляшке, Рейдемейстером, Гензелем, его учеником Гассе и некоторыми другими математиками. Кроме Данцига, НГ ездил в Берлин, где посетил Исайю Шура и Шефферса, и в Геттинген, где познакомился с Р. Курантом и бывшим учеником Д.А. Граве — А.М. Островским (Граве отправил его за границу, так как он, как еврей, не имел права учиться в русских университетах). При встрече Островский предложил НГ задачу о необращении в нуль миноров определителя Вандермонда, составленного из корней p-й степени из единицы (p — простое число) НГ быстро и оригинально решил ее, чем заслужил восторженные похвалы Островского.

Наконец, в-третьих, 26 февраля 1927 года НГ защитил докторскую диссертацию. Основой ее была уже упомянутая работа 1922 года. Делоне был восхищен ею и предлагал НГ (в письме от 11 августа 1922 года) защищать ее в Ленинграде, "где, — писал он, — во мне Вы будете иметь на сей раз преданнейшего поклонника и оппонента, а в академике Успенском, должно быть, тоже восхищенного Вами ценителя Ваших работ". Но в то время ученые степени и защиты диссертаций были отменены и в университетах РСФСР осуществлялись только "в порядке контрреволюции". Украинцы оказались разумнее русских, и в 1926 году на Украине была введена ученая степень доктора наук, вследствие чего НГ и послал свою работу в Украинскую Академию наук. Далее я представляю слово НГ: "26 февраля 1927 года состоялся диспут. Моими оппонентами были Д.А. Граве, М.Ф. Кравчук и Г.В. Пфейффер. Д.А. отказался от возражений, якобы благодаря высокому качеству моей работы, но я подозреваю, что он предпочел это сделать, чтобы не тратить времени на изучение работы, что было безопасно сделать, так как работа была проверена за границей. Он только упрекнул меня, что я не занимаюсь прикладными вопросами. Я ответил на это, что чувствую всю важность последних, но не приучен к ним со студенческих времен (Д.А. Граве на лекциях проповедовал нам не заниматься прикладными вопросами, составляющими математику второго сорта) и спросил: "Д.А., почему Вы не сказали мне этого 10 лет тому назад?". Он схватился руками за голову и закричал: "Mea culpa, mea culpa!"[6]

М.Ф. Кравчук отметил несколько недочетов в деталях работы и указал на тяжеловесность изложения. Г.В. Пфейффер, как неспециалист, ограничился несколькими общими замечаниями. На диспуте был мой старый школьный учитель П.А. Цыганков, который горячо поздравил меня, выражал гордость мной перед оппонентами, одним словом, создавал обстановку".

> Нужно напомнить, что в то время содержание отзывов оппонентов еще не регламентировалось строгими инструкциями ВАКа, каждый оппонент писал отзыв так, как считал нужным: это объясняет слова НГ: “Д.А. отказался от возражений”.

Теперь, возвращаясь несколько назад, отмечу, что в Одесский период жизни НГ вклинился небольшой, но многозначительный для его дальнейшей жизни эпизод. В 1924 году он был приглашен на должность профессора математики в Московский институт гражданских инженеров и проработал там с января по сентябрь, когда Институт был закрыт, как писал сам НГ, но есть данные, что НГ ушел из Института незадолго до его закрытия: почувствовав несколько настороженное отношение к себе московских математиков, он вскоре выяснил, что попал на место Д.Ф. Егорова, уволенного из Института “при печальных обстоятельствах”, и не счел возможным продолжать работу в таких условиях.

> Несколько лет спустя, в 1931 году, НГ и Д.Ф. Егоров — тогда уже почетный член АН СССР — встретились в Казани при обстоятельствах, не менее печальных, Д.Ф. находился перед этим в заключении, здоровье его сильно пошатнулось, возникла необходимость госпитализации, и он был отправлен в Казань и помещен в клинику ГИДУВа; родоначальника Московской математической школы навещали Казанские математики, в первую очередь НГ. Впрочем, лечение было уже бесполезным, Д.Ф. вскоре скончался и был похоронен на церковной аллее Арского кладбища, вблизи памятника Лобачевскому.

За этот короткий период НГ познакомился с профессором Казанского университета Н.Н. Парфентьевым, и это была первая ниточка, связавшая НГ с Казанью; связь эта укрепилась через “Известия Казанского физико-математического общества”, где за период с 1924 по 1927 год были напечатаны 4 статьи НГ, и завершилась переходом его в Казань в 1927 году.

> Казанское физико-математическое общество в этот период еще пользовалось мировой известностью: регулярное присуждение им международной премии имени Лобачевского[7] за лучшие геометрические работы привлекало к Казани внимание математиков всего мира, а издание собственного печатного органа позволяло путем обмена изданиями установить широкие международные связи. В период т. н. "культа личности" связи эти постепенно утрачивались, тем более, что Общество было лишено права издания самостоятельного органа: его "Известия" были влиты в издания Университета. В послевоенные годы они некоторое время с большими трениями и неохотно издавались Университетом в виде отдельных выпусков "Ученых записок", добиться же разрешения обмена, особенно со странами капиталистического мира, было совершенно невозможно; наконец, с 1945 года издание "Известий" полностью прекратилось. Последнее (восьмое) присуждение премии Лобачевского состоялось в 1937 году. В послевоенные годы возник вопрос о восстановлении этого права, однако Казанский университет, в течение ряда лет ее присуждавший, теперь был сочтен для этого недостаточно компетентным, и хотя, как сказал поэт,
>
> Нечленкорно Лобачевский
> Прожил здесь во тьме веков,[8]
>
> премия была учреждена при Академии наук. Теперь, когда Общество лишилось и права присуждения премии, и права издания печатного органа, его международное значение совершенно утрачено.

Две возможности представлялись в это время новоиспеченному доктору — либо перейти в Ленинградский университет, куда его звал работавший там Делоне, либо в университет Казанский. Некоторое время НГ колебался в выборе, и на его окончательное решение более всего повлиял П.А. Широков, с которым НГ встретился впервые на Московской конференции по дифференциальной геометрии в 1927 году, после чего обоих ученых связала дружба, прекратившаяся только стараниями "разрушительницы собраний". "Вода и камень, стихи и проза, лед и пламень не столь различны меж собой" — экспансивный, увлекающийся и торопливый НГ находил свое дополнение в рассудительном, вдумчивом и медлительном П.А. По воспоминаниям супруги НГ Марии Александровны, дело решило письмо П.А. к НГ, где тот писал, что НГ следует ехать именно в Казань, ибо здесь он действительно нужен, а в Ленинграде таких, как он, найдется немало. После получения этого письма НГ не спал всю ночь и к утру окончательно решил избрать Казань. Впрочем, возможность перехода в Ленинград сохранилась и позже, но решение НГ не изменилось.

> Отношение Главпрофобра от 12 октября 1928 года констатирует: "Н.Г. Чеботарев, утвержденный ГУСом в должности профессора по кафедре "математика" Ленинградского университета, сообщил, что он остается профессором Казанского университета".

20 июня 1927 года на заседании ученого совета физико-математического факультета Казанского университета состоялась баллотировка на свободную кафедру чистой математики; соискателей было двое — НГ и бакинский профессор А.С. Кованько. Отзыв о соискателях давал Н.Н. Парфентьев; с похвалой отозвавшись о работах того и другого, он рекомендовал предпочесть кандидатуру НГ; который и был избран 10 избирательными голосами против 2 неизбирательных; что касается второго кандидата, то он получил 3 избирательных и 9 неизбирательных голосов. В соответствии с заявлением НГ, правление университета зачислило его в штат с 1 декабря 1927 года; предметная комиссия поручила ему чтение курсов вариационного исчисления, теории функций вещественной переменной и теории чисел. Впрочем, если НГ и читал второй из них, то через год или два этот курс перешел на долгое время в личное владение Б.М. Гагаева; теория чисел, как мне представляется, оставалась постоянным курсом Е.И. Григорьева до самого перехода его в Авиационный институт, но курс вариационного исчисления НГ читал несколько лет, и результатом этих лекций было появление в 1929 году в издательстве студенческого физико-математического кружка его стеклографированного курса вариационного исчисления с приложением статьи Люстерника "Прямые методы в вариационном исчислении". Впрочем, в этом учебном году НГ приехал в Казань налегке, без семьи, проработал недолго и с 15 апреля (хотя в то время, к середине апреля,

чтение большей части курсов уже заканчивалось) 1928 года взял двухмесячный отпуск для ликвидации служебных дел в Одессе, а вернее для того, чтобы перевезти в Казань семью. Таким образом, окончательно и прочно НГ поселился в Казани с 1928 года. Выбором своим он был доволен, несколько лет спустя он говорил мне, что лучше всего работать в тихом провинциальном городе, вроде Казани, где есть старый Университет с богатой библиотекой (а объединенный математический книжный фонд библиотек университетской, геометрического кабинета и физико-математического общества в то время был очень богат и если уступал, то, вероятно, лишь московским и ленинградским фондам и то не так уж сильно).

Казанские вузы в то время были немногочисленны и не перенаселены: перестройка работы вузов, их расширение и размножение начались с 30-х годов. Университет с медицинским факультетом, размещавшимся в университетском квартале, клиническом городке (включая здание напротив костела) и старой клинике, третий этаж которой занимало геологическое отделение, Восточный педагогический институт, занимавший здание бывшего Родионовского института для благородных девиц, впоследствии храбро отвоеванное у него военным ведомством. Институт сельского хозяйства и лесоводства, размещавшийся в здании бывшего Коммерческого училища, и ветеринарный институт, в 1941 году выселенный из своего здания неким почтовым ящиком — вот и весь их список, который, пожалуй, следует еще дополнить индустриальным техникумом повышенного типа, возникшим на базе Механико-технического училища (в котором учился в 1901–1904 годах С.М. Костриков-Киров), и занимавшим его здание (впоследствии старое здание Химико-технологического института). Впоследствии Институт сельского хозяйства и лесоводства разделился на Сельскохозяйственный и Лесотехнический институты, последний просуществовал в Казани (в помещении бывшей первой гимназии) всего два года и был

> переведен в Йошкар-Олу, уступив свое место Авиационному институту, организованному в 1932 году одновременно со строительством в Казани авиационного завода, возникшего под псевдонимом “Машинстроя”. Университет же в 1930 году породил Медицинский институт; несколькими годами позже его факультеты советского права и экономический выделились в Институты юридический и финансово-экономический; в значительной мере на базе специальности механики Университета возник Авиационный институт, а на базе химических специальностей Университета и КИТа — химико-технологический институт. КИТ породил также Строительный и Энергетический институты; последний вскоре был переведен в Иваново. Все эти пертурбации произошли, однако, позже, а в 1927 году в Казани было всего 4 вуза, причем математическое отделение физико-математического факультета (который готовил математиков, механиков, физиков, астрономов, геодезистов и метеорологов) отнюдь не пользовалось популярностью — в 1927 году на него было принято около 25 человек, и немало народу из них считало свое пребывание в Университете вынужденным и непродолжительным, вызванным лишь тем, что они имели несчастье не попасть в технические вузы, привлекавшие тогда особое внимание молодежи.

Сравнительно невелик был и казанский математический коллектив. Небольшой курс математики в Сельскохозяйственном институте вел В.А. Яблоков, постоянно связанный с Университетом; преподавание математики в КИТе возглавлял Н.М. Пауткин, по образованию инженер, педагог-энтузиаст, занимавшийся вопросами конструирования математических моделей и применением математики в медицине, остальные его работники сосредоточились исключительно на педагогической деятельности. Что касается Восточного педагогического института, то там кафедру математики возглавлял проф. Юсупов — лицо малоквалифицированное и для такого поста совершенно неподходящее (студенты ВОПИ жаловались мне, что лекции он читал исключительно по тетрадке, заглядывая в нее даже тогда, когда требовалось написать результат сложения двух целых чисел в пределах первого десятка), а деканат физико-математического факультета — его ассистент Нигматуллин — лицо квалификации не более высокой, так что в 1933 году один из университетских аспирантов, немного работавший в ВОПИ и познакомившийся с обоими этими лицами, заявил мне, что для оздоровления казанской математики необходимо в 24-часовой срок выслать из Казани всех ВОПИЙских математиков (мероприятие, неожиданно осуществившееся в отношении двух упомянутых лиц в печальных условиях культа личности) — предложение, может быть,чересчур сильное, но подтверждавшее во всяком случае тот факт, что творческим математическим коллективом в Казани того времени мог быть лишь университетский коллектив. Старшее поколение математиков было представлено в нем Н.Н. Парфентьевым (1877–1934), Н.И. Порфирьевым (1863–1930), Е.И. Григорьевым (1876–1950) и Д.Н. Зейлигером (1864–1936).

Н.Н. Парфентьев был математиком весьма широкого диапазона с разносторонними интересами; всего за два учебных года (1926–1930) я прослушал у него курсы интегрального исчисления, теории вероятностей, теории наименьших квадратов, динамики точки и системы, теории непрерывных групп, номографии, техники научных вычислений; многие курсы впервые были прочитаны в Казани именно им: он был здесь проводником новых математических идей; написал немало учебников, но самостоятельное его научное творчество, по существу, исчерпывалось диссертацией “Исследования по теории роста функций”. Увлекся ли он всецело процессом преподавания, пошла ли, как нередко бывает, ширина в ущерб глубине или сказалась неблагополучная семейная жизнь (романтическая женитьба на дочери казанского миллионера, вскоре уехавшей во Францию и оставшейся там) — не берусь судить, однако во всяком случае он мог заинтересовать молодежь наукой и указать направление работы, а в то время это, пожалуй, было самое важное.

Николай Иванович Порфирьев был энтузиастом математики, любил красоту в ней, любил ее приложения, он ездил с Котельниковым в Нижний Новгород смотреть, как крепят кильсоны; на старших курсах он читал курс метрологии с элементами научной фотографии; он водил нас в механическую мастерскую геометрического кабинета, содержавшую ценные станки и инструменты, впоследствии канувшие в недрах лабораторий КАИ; водил нас в фотолабораторию с опускающимися занавесями, передвигающимся по рельсам параллелограммом Чебышева, и содержащую столько техники, что Ф.Д. Гахов тут же поинтересовался, не проваливается ли в ней пол. Н.И. Порфирьев способен был часами с увлечением говорить нам о гениальности Лобачевского, о том, что Гильберт свои "основания" геометрии повторил за Лобачевским, как мальчик; был он неплохим музыкантом, но научной работой не занимался.

Евгений Иванович Григорьев начал читать в Университете после нескольких лет работы в гимназиях; до конца дней своих он сохранил любовь к элементарной математике и мастерство в создании оригинальных и интересных задач; когда НГ организовал в Казани математические олимпиады, то Евгений Иванович охотно взял на себя их рабочую часть — подготовку задач и анализ решений; был он великолепным лектором, время от времени публиковал небольшие изящные работки по теории чисел и посылал свои задачи в "Enseignement Mathematique".

Дмитрий Николаевич Зейлигер занимал кафедру прикладной математики, т.е. механики; он занимался линейчатой геометрией и в 1934 году выпустил монографию по этому вопросу (на моей памяти это была наиболее значительная работа математиков старшего поколения, работавших в Казанском университете), впрочем, к Казани она уже не относилась, так как Д.Н. в 1929 году покинул Казань.

Таким образом, что касается процветания науки, то, очевидно, нельзя было возлагать большие надежды на старшее поколение. Научная активность молодого поколения была значительно больше — я назову здесь четырех человек, оказавших значительное влияние на развитие науки в Казани, и, в первую очередь, уже упоминавшегося выше Петра Алексеевича Широкова. Он отличался исключительной добросовестностью и трудолюбием; вероятно, он стал бы крупнейшим энтомологом Союза, но занявшись математикой под влиянием, как он сказал мне, презрительного отзыва школьного учителя математики, заявившего, что из него никогда не получится математика, он стал одним из крупнейших и наиболее эрудированных наших геометров. Вряд ли существовала геометрическая работа, укрывшаяся от его внимания (“А не случается с вами так, — говорил он Н.Н. Мейману,— что ляжешь на диван и думаешь, что все знаешь. И вдруг какой-нибудь венгр или чех написал работу и надо ее, видите ли, читать!”). Работы свои он печатал исключительно в “Известиях КФМО”, секретарем редакции которых был; этот его патриотизм и нелюбовь к поездкам в другие города привели к тому, что его крупнейшие научные достижения остались малоизвестными за пределами Казани и, случалось, воспроизводились другими исследователями. Впрочем, он никогда не стремился к славе и предпочитал спокойно работать, оставаясь в тени. Страдая заиканием, он настолько контролировал свою речь, что недостаток этот становился почти незаметным. Лекции его, всегда тщательно обдуманные, были великолепны; студенты относились к нему с благоговейным уважением и утверждали, что на экзаменах он дает такие задачи, решать которые может только один он.

Второй был Борис Михайлович Гагаев, он занимался анализом; не касаясь его достоинств и недостатков, упомяну лишь, что он подготовил огромное число учеников.

Третий, наиболее молодой из всех четверых, был Константин Петрович Персидский; первоначально его интересы лежали в области теории вероятностей, впоследствии, под влиянием Н.Г. Четаева, он занялся теорией устойчивости; был он прекрасным математиком, но в 1940 году переехал в Алма-Ату, и на дальнейшей работе казаничей его деятельность следа не оставила.

Четвертый, кого я хотел бы упомянуть, — не математик, но деятельностью своей оказавший сильное влияние на казанскую науку, — был Николай Гурьевич Четаев, ученик Д.Н. Зейлигера, последний аспирант-механик, получивший заграничную командировку, из которой он вернулся в 1929 году, полный энергии и кипящий идеями, и вовлек в круг своих интересов — теорию устойчивости — многих молодых математиков и механиков, в том числе Персидского и Малкина.

В этот коллектив и вошел НГ. Мне живо помнится его появление в Университете. На одной из своих лекций проф. Порфирьев сообщил нам студентам, кажется, второго курса, что в Казань приглашен проф. Чеботарев, выдающийся алгебраист. Последние слова у меня, да, наверное, не у одного меня, вызвали недоумение, ибо для меня алгебра в то время исчерпывалась вопросами решения уравнений, и я не мог себе представить, чтобы в такой области могло существовать выдающееся лицо. Все же такая характеристика заинтриговала нас, и мы с интересом ждали появления нового профессора; мне почему-то казалось, что он должен быть степенным и медлительным, — вместо этого я увидел человека молодого, очень подвижного и какого-то целиком "своего".

> Во времена студенчества мне трудно было представить себе, что с Н.Н. Парфентьевым или с П.А. Широковым можно говорить иначе, чем как с учителем; в то же время труднее было представить, что с НГ можно разговаривать иначе, чем как с товарищем, несколько более старшим, с которым можно и поговорить по душам, а в случае и поспорить. Ведь НГ не признавал "чинов и орденов", человек был для него прежде всего человеком, и он беседовал, как равный, и с академиком, и со студентом, и с садовником Лядского сада, куда он водил на прогулки сына своего Гришу.

Кажется, первая моя встреча с НГ произошла на лекции проф. Порфирьева, куда НГ явился, чтобы сообщить нам, студентам, о своем намерении доложить об одной своей работе и пригласить желающих посетить его доклад. Народу собралось немного, из профессуры явился только Н.И. Порфирьев, да и то, как мне кажется, более из учтивости; темой доклада был один из ранних вариантов работы НГ по резольвентам — что-то, связанное с итерациями функций, — толком я, конечно, ничего не понял, да, вероятно, и другие тоже; вопросов не было, только проф. Порфирьев сказал что-то о необходимости выработки терминологии в этой области. Однако характерен был сам факт; НГ не смог бы, "сложив стихи, их на год спрятать в стол", — когда зародившаяся в нем идея лишь слегка начинала облекаться плотью выкладок, он спешил ее, пусть незавершенную, незаконченную, может быть, безобразную, как новорожденный котенок, немедленно показать окружающим, поделиться ею; когда же она чуть подрастала, он публиковал статью, написанную, возможно, in statu nascendi[9], когда, как писал он сам, ему самому еще не все было ясно.

В начале 1929 года мне пришлось слушать у НГ первые курсы лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям и функциям комплексной переменной. Собравшись на первую лекцию по дифференциальным уравнениям, мы сидели в ожидании: НГ еще не было. Затем мы услышали его (когда он появлялся где-либо, его голос был слышен всем окружающим), мы слышали, как он прошел в профессорскую, разговаривал там, и потом направился к выходу, явно намереваясь покинуть кабинет. Тут я не выдержал и, выскочив в коридор, сказал НГ, что мы ждем его на лекцию. Он был удивлен: видимо, он об этой лекции забыл, но беспрекословно вернулся, вскоре появился в аудитории и рассказал нам свои любимые задачи о линии погони и гипсометрической формуле.

Программы курсов в то время не диктовались из центра, и в выборе содержания их царил большой демократизм. НГ обычно довольно быстро излагал обязательный материал и спешил обратиться к специальным вопросам, лежавшим в круге его личных интересов. В курсе дифференциальных уравнений таким вопросом было разложение интегралов линейных уравнений в ряды (теория Фукса).

Нельзя сказать, чтобы НГ тщательно готовился к лекциям: на это у него не хватало ни терпения, ни времени; не раз в выкладки на доске вкрадывалась ошибка, и результат получался, обратный желаемому. В таких случаях у НГ редко хватало терпения повторить выкладку, чаще он либо заявлял: “Хотя мы доказали обратное требуемому, но будем считать, что доказали то, что надо, и пойдемте дальше”, либо, как это бывало на лекциях по вариационному исчислению, увидев у кого-либо из слушателей экземпляр своего курса, НГ восклицал: “А ну, посмотрите, как там, в книжке, написано!” Попыток как-либо выкрутиться, из положения, чтобы сохранить свое реноме, он никогда не делал. А.З. Петров вспоминал, как НГ читал их курсу теорию матриц: он прочел все, что нужно, буквально в несколько лекций, после чего обратился к студентам: “Поняли?” — “Нет” — ответили те. “Ну, давайте начнем сначала”, — заявил НГ и, повторив курс, спросил снова: “Поняли?” — “Нет” — “Ну, тогда читайте сами!”, — объявил он. Правда, эти факты относятся к первым годам жизни НГ в Казани.

> Читать лекции даже по самым элементарным курсам НГ любил. Позже, во время войны, когда я был деканом физмата КГУ, случилось, что заболел преподаватель, читавший лекции на химическом факультете, и декан химфака Б.А. Арбузов обратился ко мне по поводу замены (речь шла о лекциях по аналитической геометрии). Оказавшийся свидетелем нашего разговора НГ тотчас же предложил: "Давайте я прочитаю!", хотя лекции эти явно никакого интереса не представляли. В педагогической деятельности он не чуждался и попыток довольно рискованных экспериментов; так, в начале войны, когда НГ самому пришлось читать курс высшей алгебры первому курсу физмата, он хотел попытаться излагать теорию определителей с помощью алгебр Грассмана; я отговорил его от этой идеи.

Мне кажется, что НГ и, пожалуй, Н.Г. Четаев первыми ввели (или, во всяком случае, широко развили) у нас студенческие и научные семинары. В частности, в 1929–1930 гг. НГ проводил студенческий семинар по теории функций комплексной переменной, в нем участвовали я, И.А. Щербаков, Ф.Д. Гахов и старшекурсники Г.Ф. Лаптев, П.Г. Конторович и Х.А. Битнер. Литература, которой приходилось пользоваться, была почти исключительно на иностранных языках — и это заставляло нас волей-неволей их изучать. НГ, как я уже отмечал, прекрасно знал немецкий язык, читал он также и на английском и на французском. Английское произношение приводило его в негодование, и однажды он заявил: "Когда в Англии будет социалистическая революция, то их заставят читать так, как они пишут!" По поводу французского произношения он давал мне однажды такой совет: "Когда Вы видите слово, то Вы в нем 50% букв, какие понравятся, читайте, а остальные нет". Последние годы он немало возмущался постановкой преподавания иностранных языков в вузах и тем, что студенты после нескольких лет изучения языка оказывались совершенно беспомощными, когда перед ними лежал простой математический текст (вспомним, что он сам изучил немецкий, читая алгебру Вебера, и считал, что основной целью изучения языка должно быть чтение специальной литературы). В 1944 году при распределении нагрузок он совершенно серьезно предложил дать ему одну группу по немецкому языку; предложение это тогдашняя зав. кафедрой иностранных языков А.С. Шкляева встретила с недоверием и дипломатически отклонила.

Поселился НГ в Казани первоначально на ул. Комлева, вскоре переехал в небольшую квартирку в доме, называвшемся домом ученых на Старогоршечной (стараниями и усилиями горсовета переименованной позже в ул. Щапова), и лишь в 1937 году получил роскошную по тем (и нашим) временам квартиру со всеми удобствами во вновь построенном доме на ул. Карла Маркса, где одна достаточно поместительная комната была обращена в его кабинет: там стояли постель его, рабочий столик, стеллажи его библиотеки, его библиотека оттисков и, позже, рояль.

Рабочим местом НГ отнюдь не был стол — может быть, только в послевоенное время, когда стало возможным приобретать пишущие машинки, и в числе прочих приобрел таковую и НГ, он по необходимости стал чаще пользоваться столом — рабочим местом его обычно была постель: полулежа в ней, он писал свои статьи и книги самопишущей ручкой в общих тетрадях с мягкой обложкой. Мы настолько привыкли заставать его в таком положении, что Н.Н. Мейман, шутя, заметил однажды, что на дверях этой квартиры следовало бы сделать надпись: "Здесь лежит Н.Г. Чеботарев". Спал НГ мало, вставал рано, но обладал изумительным свойством отключаться от внешних раздражителей, если они не относились к живоинтересующей его области, и засыпать в самых неподходящих условиях. Еще в бытность мою студентом нас, участников его семинаров, страшно смущало и выводило из равновесия, когда мы обнаруживали, что НГ мирно посапывал во время наших докладов.

> Однажды, когда Н.И. Порфирьев читал нам курс техники научных измерений с элементами фотографии и мне был доверен на несколько дней фотоаппарат (которые в то время вообще были редкостью и в продаже отсутствовали), у участников семинара НГ возник злодейский замысел сфотографировать наш семинар с дремлющим НГ. Однако эта перспектива настолько возбудила всех участников, что вызвала оживленную дискуссию, которая не дала НГ задремать.

Поразительный случай такого рода произошел на защите кандидатской диссертации Ф.Д. Гаховым, когда НГ как председатель Совета взялся прочесть отзыв академика Смирнова (в то время присутствие на защите оппонента было необязательным),— к моему ужасу и восхищению два или три раза во время чтения речь НГ становилась все менее связной, и вдруг он в сладких грезах поникал головой над отзывом. Рассказывали, что когда в Казань приезжал Ю.Б. Румер, он был потрясен тем, что во время его доклада НГ вдруг задремал, но когда он печально отметил это, НГ возразил: “Ваше дело докладывать, а дело аудитории — реагировать”. Впрочем, Ю.Б. Румер не мог знать, что дремота НГ нередко бывала активной, и, внешне дремлющий, он тем не менее следил за окружающим и был в курсе происходящего. В 1940 году НГ, я и И.Д. Адо проводили небольшой семинарчик, проводили его в моей комнате, ибо Университет отапливался тогда очень плохо, а в геометрическом кабинете, где еще сохранялось печное отопление, можно было замерзнуть (“Студенты пребывают в состоянии омерзения”, “студенты большие замерзавцы”, — шутил НГ). Если докладывал кто-либо другой, то НГ всегда избирал себе место на моем ложе и вскоре начинал мирно посапывать, но едва только у нас возникало какое-либо сомнение или спор по какому-либо вопросу, как НГ тотчас вставлял свою реплику, показывавшую, что все, о чем шла речь, пока он “спал”, в действительности преломлялось в его разуме.

В одной из биографий Чебышева я читал, что раз в неделю двери его квартиры были открыты для всех, кто хотел бы беседовать с ним по научным вопросам. Так было у прадедов; у правнуков стало гораздо проще.

> Где-то я назвал Чебышева дедом НГ — это неверно; научная родословная НГ — Чебышев, Коркин, Граве, Чеботарев — показывает, что Чебышев — его научный прадед. Однажды во время лыжной прогулки мальчишки спросили меня: "Дяденька, ты Шмидт?"[10] — "Нет, я его племянник", — ответил я. Узнав об этом, НГ не преминул при встрече сказать О.Ю. Шмидту: "А у нас в Казани живет Ваш племянник". "Наверное, это племянник лейтенанта Шмидта", — возразил Отто Юльевич. Однако в смысле научного родства мое утверждение было верно: О.Ю. — научный брат НГ.

Так, у правнуков стало проще тем, что двери квартиры НГ в любое время — лишь бы он был дома — были открыты для каждого желающего поговорить с ним: меня нередко смущала такая готовность отложить все свои дела, часто более важные, для разговора, порой никчемного. Была у НГ прекрасная библиотека, содержавшая немало редких в СССР книг, была большая коллекция оттисков математических работ, начало которой было положено при поездке в Германию в 1925 году; этой коллекцией НГ очень гордился, заботился о ней — помню, как он покупал для этих оттисков специальные папки, и прилагал усилия к ее умножению и процветанию: в разные страны он рассылал свои оттиски и получал в обмен оттиски отовсюду; благодаря этому у него имелись работы, которые нельзя было приобрести иными путями. И книги свои и эти оттиски он готов был предоставить в распоряжение каждого, притом без всякого учета.

> Вот, например, сценка в университетской библиотеке в 1944 году: Лапаев, студент 1-го курса, желает получить книжку Пальшау: книжки эти, оказывается, все разобраны, студент огорчен. Разговор его с библиотекаршей слышит присутствующий там НГ, который в это время на 1-м курсе уже не читал и студента этого не знает; он тотчас обращается к нему: "Приходите ко мне, у меня Пальшау есть, я Вам его дам". Готовность НГ оказать услугу любому была изумительна. В предвоенные годы товаров в Казани было очень мало, покупать казаничи

тогда разучились, можно было лишь доставать, а доставать было трудно буквально все: даже такую вещь, как горох, приходилось возить из Москвы. НГ часто ездил в Москву и вот перед поездкой он обходил своих знакомых: “Что Вам привезти из Москвы?” и вынимал объемистую записную книжку, до конца заполненную записями кому, что и в каком количестве надо привезти. Этой его готовностью не раз пользовался и я.

Мне довелось пользоваться добросердечием НГ и по другому поводу. В предвоенные годы я работал в Казанском институте инженеров коммунального строительства (КИИКС) и я пригласил туда НГ прочесть лекцию о жизни и работе Эвариста Галуа — предложение, которое он охотно принял. В Институте администрация отнеслась к этому событию с энтузиазмом — еще бы, член-корреспондент академии наук читает лекцию, приказано было повесить объявление о лекции; собралось на нее народу множество: студенты, работники канцелярии, преподаватели (я уверен, что большая часть из них пришла просто поинтересоваться тем, какие бывают живые академики, тем более, что НГ к тому времени был достаточно популярен в вузовских кругах). Такой огромной и разношерстной аудитории НГ никак не ожидал, как мне показалось, он был даже несколько недоволен, но быстро освоившись с обстановкой, начал свой рассказ настолько непринужденно, что один студент, заглянув из коридора в аудиторию, разочарованно комментировал: “Да он не читает, а просто рассказывает!” Лекция была двухчасовой; в середине ее НГ устроил перерыв и вышел в коридор покурить, и взоры его обратились к висящему на противоположной стене объявлению. Оно гласило примерно следующее: “Тогда-то, там-то, такой-то (с полной “титулатурой”) прочтет такую-то лекцию” . . . и заканчивалось словами: “треугольникам групп обеспечить явку” (!!). НГ пришел в восторг, он утверждал, что треугольники обеспечили стопроцентную явку, до конца дней своих

> время от времени вспоминал этот случай и писал о нем в первом из “Писем о себе и математике”.

Итак, все математики, хорошо знали его квартиру, его ложе, его рояль, его библиотеку и его превосходный, радушный характер. Приходя к нему запросто, нередко можно было застать какого-либо казанича или приезжего, также запросто зашедшего к НГ и ведущего разговор на научную или диссертационную тему. В случае же более широкого собрания посетителей НГ, всегда деятельный и стремившийся чем-либо заняться, обычно пропагандировал свое любимое развлечение — шарады.

> Эта игра состоит в том, что загадывается некое слово, оно разбивается на части-подслова, и ставится ряд драматических сценок, каждая из которых характеризует соответствующее подслово (если такая характеристика невозможна, то подслово просто должно быть упомянуто в ней). Последняя сценка характеризует само слово. Задача зрителей — разгадать слово.

Шарады НГ пытался привить и на студенческих вечерах, которые посещал охотно. Во время войны, когда студентов почти не было и нетрудно было организовать их воедино, это удавалось, а в последующие годы — нет. На вечерах этих НГ никогда не отказывался выступить как пианист. Чаще всего играл он вальсы Шопена; играл он довольно плохо: у него никогда не хватало терпения по-настоящему отрабатывать не только целые вещи, но хотя бы наиболее трудные пассажи.

Редко случалось, чтобы семья Чеботаревых летом уезжала далеко от Казани, хотя к услугам НГ были возможности Академии наук.

> Эти возможности в 1945 г. НГ использовал, но не для себя: заболел туберкулезом один из физматовских студентов, и понадобилось курортное лечение. НГ горячо взялся за это и выхлопотал через Академию путевку в Боровое на Алтае.

Обычно лето Чеботаревы жили под Казанью, в Шеланге, где в очень красивом месте, на крутом берегу Волги, среди яблоневых садов был организован дом отдыха — первоначально специально для научных работников; там было и общежитие, а семейным на весь срок их отпуска предоставлялись отдельные квартирки в маленьких домиках.

> Этот дом отдыха находился в ведении Комиссии содействия ученым (КСУ); какой-то остроумец сочинил о жизни в Шеланге стихи, которые НГ нередко повторял:
>
> Научные работнички, все вы в Шеланге
> Лопаете КСУкину пищу и вообще
> Ходите в столовую три раза на дню,
> И не только ходите, а водите родню!
> Как же после этого мне вам не сказать:
> КСУкины вы дети и КСУ — ваша мать!

Попадая в Шелангу, НГ снимал обувь, облачался в рубашку с короткими рукавами и свои знаменитые "тирольские" короткие штаны с манжетами чуть пониже колен и так, босой, ходил все лето, своим видом, так далеким от канонического профессорского облика, вызывая недоумение окружающих. Впрочем, к этому скоро привыкли, ибо люди вообще склонны считать математиков, а тем более профессоров математики, существами не от мира сего, а уж члену-корреспонденту Академии наук (как шутил НГ: "члену-скоропаденту") готовы были простить любую экстравагантность. Купание, прогулки и поездки на лодке с П.А. Широковым составляли развлечения НГ. Возвращаясь же домой, он устраивался на своем ложе и доставал книгу и тетрадь, ибо книги и письменные принадлежности сопутствовали ему всюду: и на даче, и в дороге, и в больнице, и после в колхозе, и в Шеланге он работал с не меньшим эффектом, чем в Казани. Там он писал свою "Теорию групп Ли" и "Теорию алгебраических функций". Работа была для него такой насущной потребностью, что отключиться от нее на сколько-нибудь продолжительный срок он не мог. Так же, как и в Казани, нередко в Шелангу прибывали гости, ибо с большим радушием приглашал НГ к себе знакомых (как всегда в таких случаях, трудности и хлопоты выпадали на долю супруги). И люди приезжали охотно, иногда по нескольку сразу: так, я помню время, когда у НГ жили я, Адо и Мейман одновременно, занимая по ночам немалую часть пола его комнаты, к счастью, достаточно поместительной. В предвоенные годы, возвращаясь в последней декаде августа в Казань, я взял за обычай на день-другой навещать Шелангу, и П.А. Широков с НГ посмеивались: раз-де появился Морозов — значит, пора перебираться в Казань.

Если вся Шеланга знала тирольские панталоны и босые ноги НГ, то по крайней мере весь университет знал его чемодан. Дело в том, что он никогда не носил портфелей и не признавал их, вместо портфеля обычным спутником его был небольшой чемоданчик, хранивший его книги и бумаги. Как сейчас, представляю я НГ шагающим по городу зимой, почему-то без перчаток; в одной руке он несет чемодан и, донимаемый укусами мороза, время от времени меняет руку, а освободившуюся подносит ко рту и дует на нее.

> Темпы движения его временами менялись — он то устремлялся вперед, то шел медленнее. Говорят, что однажды его спросили о причине такой неровной походки и он будто бы ответил: “А я иду по ходу мысли — когда мысли мои идут быстрее, быстрее иду и я”.

Обращала на себя внимание одна особенность его костюма — это привычное отсутствие галстука, под пиджаком обычно была рубашка с отложным воротником.

> Во время празднования юбилея Академии наук ученые были приглашены на прием в Кремль. Получил приглашение и НГ, но, когда ему сообщили, что на прием нужно являться в соответствующем костюме и обязательно при галстуке, он предпочел остаться дома, отказавшись от удовольствия встретиться с руководителями партии и правительства.

И проходил он свой жизненный путь, оживленный, жизнерадостный, всем интересующийся. Несколько раз, встречая меня в меланхолическом настроении, он спрашивал: “А Вы сумный?” и цитировал чьи-то стихи:

> Ой, хожу я по-над лиманом,
> В одной руке у меня цуцка, а в другой кицка,
> А я сумный.
> Ой, задушу я одной рукой цуцку,
> Ой, брошу я другой кицку в море,
> И тогда я бываю веселый.

Минуты меланхолии на него самого находили редко, и, как мне кажется, бывало это на длинных заседаниях. Тогда, обращаясь к соседу, он задавал два вопроса: “А вы меня любите?” и “А вы меня считаете хорошим математиком?” и выражение его лица было при этом выражением обиженного ребенка (Н.Н. Мейман говорил: “Как будто он хочет спросить: “А вы меня не очень ушибете?”).

В характере его сохранялось нечто непосредственное, детское, способность ошарашить соседа или спутника совершенно неожиданным вопросом, заключением или действием.

> Был случай в первые годы жизни НГ в Казани, что одна из физматовских студенток пыталась покончить с собой, бросившись в пролет лестницы. Ее в тяжелом состоянии увезли в больницу, а вскоре явились посетить ее старшекурсницы и привели с собой НГ. К больной их не пустили, но все же они прорвались в коридор, где наткнулись на дежурного врача, и он начал их распекать. НГ слушал внимательно, глядя на врача, и вдруг спросил: “А почему в Вас глаз желтый?” Тот, удивленный вопросом, прекратил “разнос” и объяснил, что глаз у него смазан йодом. Помню рассказ НГ о том, как ему в 30-х годах пришлось по какому-то поводу побывать в суконной слободе — а в изрядно грязной Казани той поры эта часть города отличалась своей грязью. Он шел, и вдруг ему преградила дорогу лужа через весь тротуар. “Я решил, — рассказывал НГ, — что эта лужа рассчитана на среднего человека, т. е. рассчитана на то, что средний человек ее перепрыгнет”. Основываясь на этом предположении, он прыгнул и попал в середину лужи.
>
> Как-то раз супруги Чеботаревы отправились в кино, и случайно я попал вместе с ними. Кино в ту пору еще не говорило, и действие в фильме сопровождалось пояснительными надписями. НГ громко читал их. Сидящий впереди нас товарищ, не выдержав, обратился к НГ и попросил его читать про себя. “Но ведь я должен им прочитать!” — обиженно возразил НГ, показывая на меня и Марию Александровну.

> Был случай, что я пришел на Казанский вокзал проводить НГ и Марию Александровну, уезжавших в Москву на продолжительный срок. Я стоял у вагона, Мария Александровна уже зашла в вагон, НГ разговаривал с каким-то знакомым неподалеку. Уже дан был звонок, проводники предложили заходить в вагоны, кругом пошли прощальные объятия и поцелуи, и вдруг я вижу, что НГ несется ко мне на всех парах. "Все прощаются, давайте и мы с вами", — и он обхватил меня и облобызал к величайшему моему изумлению и смущению.
>
> Однажды Мария Александровна в сопровождении НГ и одной своей знакомой, идя по городу, зашли в магазин головных уборов, где Мария Александровна хотела купить себе шляпку. НГ живо принял участие в выборе и настойчиво рекомендовал Марии Александровне одну из шляпок, вероятно, мало подходящую для нее, так как она уклонилась от покупки. "Ну, купи, я тебя умоляю!" — сказал НГ и тут же у прилавка опустился перед ней на одно колено. Конечно, обеих дам как ветром вымело из магазина.

НГ была органически присуща благожелательность к окружающим. Проявления несправедливости, особенно участившиеся в период культа личности с его тактикой перестраховки, а также проявления бюрократизма, его глубоко возмущали. Возможно, поэтому ему трудно было жить в мире с университетским начальством.

Кирилл Прокофьевич Ситников был прислан из Москвы в университет в качестве ректора в 1937 году. Какие были в нем найдены качества, соответствующие такой должности, мне неизвестно, но одного в нем во всяком случае недоставало — научным работником он не был. Вероятно, поэтому у него не возникло нужных контактов с учеными Университета: во всяком случае, между ним, с одной стороны, и НГ и Н.Г. Четаевым — с другой, царила скрытая враждебность.

Я в это время был очень непрочно связан с Университетом, и смена ректора со всеми ее следствиями прошла мимо меня, так что возникновение этой враждебности мне неясно. Ощутил я ее впервые в 1938 году, когда информировал НГ о разговоре с Ситниковым по поводу моей предполагавшейся защиты диссертации. Не будучи знаком с процедурой, предшествовавшей защите, я считал все, сказанное мне, в порядке вещей, но НГ сразу вспылил, заявил, что Ситников чинит мне препятствия и что мне следует защищать в Москве. В первую же после этого разговора поездку в Москву он забрал мои документы, увез их и сдал в МГУ.

До открытого столкновения дело дошло в связи с Научно-исследовательским институтом математики и механики (НИИММ). Мысль о его создании возникла вскоре после появления НГ в Казани. В 1934 году на 1-м Всесоюзном математическом съезде обсуждался вопрос о развитии научной работы по математике в СССР и в резолюции от 30 июня говорится:

> Съезд указывает на настоятельную необходимость организации математического института в Казани. Еще в 1931 году конференция по планированию в Москве указала на необходимость организации математического института в Казани. В настоящее время в Казани имеется крупная математическая школа в направлении алгебры и специальных вопросов обыкновенных дифференциальных уравнений (проблема устойчивости и т.д.). Съезд считает настоятельно необходимой организацию института с 1 января 1935 года.

Это выступление математической общественности оказало действие, и центральные органы приняли решение об организации института. Правда, это был эмбрион современных институтов с работниками “числом поболее, ценою подешевле”, так что выплачиваемые ставки не могли обеспечить его работников, да в то время и преподавательские ставки были незначительны и вынуждали научных работников искать совместительств. Фактически институт оказался отделом научной работы при факультете, объединив едва ли не всех его работников и обеспечив их небольшой дотацией. 26 сентября 1935 года НГ был официально назначен директором института.

Однако кредиты институту переводились через Университет. Это давало возможность ректору распоряжаться ими в значительной мере по своему усмотрению и производить некоторые манипуляции, например, с техническими кадрами института. Возмущение НГ вылилось в его письме от 20 августа 1939 года:

> "Наркому просвещения РСФСР, копия директору КГУ. Прошу освободить меня от занимаемой должности директора НИИММ при КГУ. В силу статьи 46 Кодекса законов о труде, через месяц, т. е. с 20.9 с.г. буду считать себя свободным от этой должности, независимо от того, подыщете Вы мне заместителя или нет".

По-видимому, НГ дали некоторые успокоительные заверения, которые, однако, выполнены не были, так что в мае 1940 года последовало новое заявление НГ на имя Ситникова:

> "Ввиду того, что несмотря на заверения комитета по делам высшей школы Наркомпрос продолжает высылать Институту ассигнования на Ваше имя, я телеграфно потребовал от КВШ назначить нового директора института. Прошу немедленно подыскать кандидата для этой должности и представить его на утверждение в Наркомпрос".

После этого восстания институт просуществовал немногим более года: в начале войны он был закрыт и вновь возник лишь в 1944 году в значительно более благоприятных условиях и с отдельным лицевым счетом в банке.

Помощник Ситникова Иван Александрович Дюков был проректором сначала по учебной, а затем по научной работе. Был он в своей административной работе большим формалистом и, вероятно, чувствовал бы себя наилучшим образом, если бы имелась инструкция, предусматривавшая все возможные жизненные и служебные ситуации. В одном из заседаний совета, посвященном подготовке к экзаменационной сессии, Дюков говорил о борьбе с либерализмом в оценках и о том, что некоторые преподаватели ставят слишком много отличных оценок. Никто, кроме НГ, не способен был спросить совершенно открыто и чистосердечно: "Что значит слишком много, и сколько можно ставить отличных оценок?" И, вероятно, никто, кроме Дюкова, не смог бы ответить: "Ну, столько-то процентов", — вероятно, не слишком много, так как речь шла о борьбе с либерализмом, но, конечно, и не слишком мало, так как все-таки успеваемости следовало быть достаточно высокой. А сдавать экзамены у НГ, как мне представляется, было нетрудно, так как в своем отношении к ним он исходил из не всегда верного предположения о совершенной добросовестности студентов и в отношении времени, места и т.д. всегда готов был идти им навстречу (Н.Н. Мейман сдавал экзамен по теории Галуа на вокзале, пока НГ ожидал поезда; окружающие их пассажиры, наверное, были изумлены звучной терминологией: транзитивность, импримитивность и т. д.). И вот на ближайшем экзамене НГ, спрашивая одного студента, хотел поставить ему отличную оценку, как вдруг после подсчета обнаружил, что норма по отличным оценкам уже выполнена. Тогда он обратился к студенту: "Я с удовольствием поставил бы Вам отлично, но уже израсходовал все свои отличные оценки. Вы сходите к Дюкову, если разрешит, я Вам поставлю отлично". Традиция не передает окончания этого происшествия.

С проректором по научной работе у НГ вряд ли могли быть какие-либо трения. Правда, возможно, что план его работы выполнялся условно, т. е. вместо намеченной по плану темы выполнялась другая, но ведь если последняя была выполнена успешно, то "победителей не судят".

> К планированию научно-исследовательской работы, особенно на долгий срок, НГ относился с иронией. "Как я могу знать наперед, какая тема у меня пойдет в этом году?" — спрашивал он и, будучи директором института, при составлении планов не раз иронизировал, что собирается взять на должность плановика "цыганку Марусю" (т. е. лицо, умеющее предсказывать будущее).

Закончив с этими отступлениями, упомяну, что Казань обязана НГ двумя установлениями. Первое — это тот институт, о котором шла речь выше и который вряд ли был бы организован, если бы НГ не жил в Казани. Второе — организация школьных математических олимпиад. Идея их организации возникла, видимо, в том же 1934 году, вероятно, под влиянием доклада Б.Н. Делоне (на математическом съезде) о школьных олимпиадах в Ленинграде. Рабочую часть их — подготовку задач и анализ решения, как я уже упомянул, взял на себя мастер этого дела Е.И. Григорьев. Олимпиады пользовались большой популярностью, хотя проводились они без значительной предварительной подготовки. В первые годы войны они прекратились; если не ошибаюсь, то НГ вновь организовал их в 1945 году. Хотя столь широкого охвата, как ранее, они не имели, тем не менее способствовали привлечению в Университет талантливой молодежи. В последующем их проведение вошло в обычаи факультета и студенческого научного общества.

Научная и педагогическая деятельность НГ развернулась в Казани широко и плодотворно — одним из формальных показателей этого было избрание его в феврале 1929 года в члены-корреспонденты АН СССР.

Прежде всего НГ вошел в состав редакции “Известий КФМО” и стал одним из активных сотрудников этого журнала.

> Работал в то время в типографии один старик-наборщик, большой любитель и мастер своего дела; он набирал выпуски “Известий”. НГ вспоминал, что наборщик этот питал к нему большое уважение, так как статьи НГ изобиловали длинными и представлявшими значительные трудности для набора формулами. В то же время, например, к Б.М. Гагаеву этот наборщик относился с некоторым пренебрежением, ибо в его статьях было много текста, а формулы коротки и несложны. “Что слова? ...”

Немало заботы и рачения проявил он при подготовке издания двухтомника “Собрания сочинений” Золотарева, где был редактором и составителем ряда примечаний. В 1936 году по инициативе НГ были изданы “Сочинения” Эвариста Галуа, перевод которых, а также биографической статьи Дюпюи был осуществлен Н.Н. Мейманом.

> К Галуа НГ питал глубокое уважение — я помню, что в его кабинете висел только один портрет — Эвариста Галуа.

Огромную работу проводил он по реферированию математических работ для “Zentralblatt für Mathematik”. По данным библиотеки КГУ: в 1933 г. — 7 рефератов, в 1934 г. — 12, в 1935 г. — 35, в 1936 г. — 41, в 1937 г. — 24 и в 1938 г. — 3 реферата. НГ с тем большим удовольствием брался за эту работу, что присылаемые для реферирования статьи не требовалось посылать обратно (не в пример нашему РЖМ, где процедура гораздо сложнее), так что они обогащали его любимую коллекцию оттисков.

Одной из последних его работ была работа по подготовке “Собрания сочинений” Лобачевского.

> Древние сказали бы, вероятно, что над изданием этим тяготеет некий злой рок. Первый том из предположенных шести вышел в свет в 1946 году; первоначальная редакция состояла из Кагана, Котельникова, Степанова, Чеботарева и Широкова, и уже на титульном листе первого тома траурная рамка окаймляла последнюю фамилию. Следующий вышел в 1948 году: четвертый том, содержавший алгебраические работы, в подготовке и редактировании которого непосредственное участие принял НГ — здесь траурная рамка охватила его фамилию и фамилию Котельникова. Дальше последовал в 1949 году второй том, появившийся без происшествий, и в 1951 году — третий том, но в нем только каким-то недосмотром можно объяснить отсутствие траурной рамки вокруг фамилии Степанова. Пятый том появился в том же 1951 году, и в нем состав редакции указан в новой форме: Каган, Колмогоров, Норден, Петровский, Степанов (в траурной рамке). Шестой том так и не появился, вероятно, не потому, что скончался А.Д. Дубяго, на которого была возложена подготовка части материала, а скорее потому, что из состава издательства выбыл И.Н. Бронштейн, энтузиаст этого издания, чья неистощимая энергия будировала остальных. Однако со времени появления пятого тома скончался и В.Ф. Каган, так что первоначальная редакция полностью переселилась в потусторонний мир.

Огромная работа проводилась НГ по написанию учебников и монографий. После упомянутого выше курса вариационного исчисления студенческий физико-математический кружок КГУ издал дополнительные главы по алгебре (1929 г.) и первый в СССР курс топологии (1932 г.), который в 1934 году был переведен на украинский язык и издан в Харькове. В 1934 г. уже в издании ОНТИ вышла его книга "Основы теории Галуа, ч.1" — первый оригинальный учебник теории Галуа в России со времени появления книг Граве (1914 г.) и Шатуновского (1917 г.). С той поры у нас вышла только книжка М.М.Постникова, посвященная тому же вопросу (1960г.). Затем в 1936 г. в "черной" серии "Математика в монографиях" вышла книга НГ "Теория Галуа" — монография, обнимающая вопросы классической теории Галуа, проблему построения уравнений с заданной группой, проблему резольвент и обобщения теории Галуа, а через год в той же серии — вторая часть "Основ теории Галуа", содержащая изложение теории алгебраических чисел. По-видимому, НГ увлекали более широкие планы создания монографии по теории абелевых полей, но другие неотложные вопросы отвлекали его: он занялся группами Ли, и через три года после выхода второй части "Основ теории Галуа", в 1940 году, появляется его "Теория групп Ли" — доныне[11] единственная русская книга, посвященная этой теории (ибо вышедшая почти одновременно книга Л.С. Понтрягина "Непрерывные группы" трактовала иной круг вопросов). В частности, в ней впервые была изложена теория Картана-Вейля о структуре и представлениях полупростых групп. В то время, когда "Теория групп Ли" вышла в свет, в тетрадях НГ уже появились первые главы "Теории алгебраических функций", которую в напечатанном виде НГ уже не увидел.

Новые звучания слышатся в тематике исследований НГ. В 1931 году в "Mathematische Annalen" публикуются две его статьи "Об одной алгебраической проблеме Гильберта" — это та самая работа, о которой НГ писал в письме Рокотовскому: "а работу по проблеме резольвент я написал, имея 6-часовую педагогическую нагрузку в день без дней отдыха (тогда в вузах была непрерывная неделя)", и которую там же он оценивает как одну из лучших работ первого периода (нагрузка эта, конечно, ужасна и характеризует условия работы того периода отнюдь не благоприятно).

Это была первая публикация НГ по резольвентам, и ее появление было одной из причин поручения НГ обзорного доклада по теории Галуа на Цюриховском математическом конгрессе 1932 года — еще одно, уже международного характера признание его заслуг.

К проблеме резольвент НГ возвращается в статье 1932 года, начиная ее словами о том, что когда писались первые статьи, автору самому было еще не все ясно — признание, от которого большинство авторов, вероятно, уклонилось бы. К сожалению, результаты НГ показали малую перспективность той постановки, в которой задача рассматривалась: по сути, речь шла о том, чтобы свести решение алгебраического уравнения, коэффициенты которого зависят от параметров, к решению некоторого иного уравнения, зависящего от возможно меньшего числа параметров, и вот оказалось, что снижение числа параметров может быть только незначительным (а для исследователя, конечно, выгоднее, чтобы оно было возможно большим). В 1943 году НГ вернулся к проблеме резольвент с другой точки зрения. Но работа по проблеме резольвент, как говорят математики, индуцировала другие работы, а именно: решение вопросов теории резольвент существенно опиралось на некоторые доказанные или недоказанные результаты теории групп Ли — отсюда у НГ возник интерес к группам Ли, повлекший создание упомянутой выше монографии.

Между тем началась работа НГ над первой частью "Основ теории Галуа". НГ хотелось иллюстрировать хорошим примером теорию разрешимости уравнений в квадратных радикалах, то есть теорию построений при помощи циркуля и линейки. Такой пример он нашел в знаменитой 2000-летней давности задаче Гиппократа о квадрируемых луночках. Оказалось, что до нашего времени не было дано полного ее решения. НГ попробовал такое решение дать — результатом было появление его работы о квадрируемых луночках (1934 г.). Правда, полного решения проблемы НГ дать не удалось; оно было получено его учеником А.В. Дородновым незадолго до смерти НГ, так что в этой области НГ довелось увидеть блестящее завершение своих исследований.

В том же 1934 году появилась работа НГ "Заметки по алгебре и теории чисел". Одним из содержащихся в ней результатов было нахождение (неточной) нижней границы модуля произведения неоднородных линейных форм на целочисленной сетке, т.е. доказательство так называемой неоднородной теоремы Минковского. Работа эта, помещенная в “Ученых записках КГУ”, — издании, мало распространенном, — осталась незамеченной. Позже, в 1936 году, Зигель нашел более сложными методами границу, значительно более грубую, чем НГ, и последний должен был восстановить свой приоритет путем вторичной публикации, на этот раз в швейцарском журнале.

Эли Картан (Франция), П.А. Широков и Н.Г. Чеботарев
на I Международной конференции по тензорной
дифференциальной геометрии. Москва, 1934 г.

С 1936 года начинается публикация ряда работ НГ и его учеников по продолжаемым полиномам. Проблема продолжаемости возникла как попытка выработать некие общие методы в проблеме коэффициентов теории аналитических функций. НГ назвал M-продолжаемым полином, допускающий такое дописывание старших членов, чтобы у полученного после дописывания полинома все корни лежали на заданном множестве M. Результат оказался очень простым, если за M взять окружность K с центром в начале координат: ученик НГ Л.И. Гаврилов показал, что всякий полином K-продолжаем. НГ обобщил этот результат, взяв за M произвольный звездообразный замкнутый контур, содержащий внутри себя начало координат (возможны и другие обобщения). Наиболее трудной из решенных проблем этого типа является, конечно, проблема продолжаемости на вещественную ось ($\mathbf{R}$-продолжаемость). Исследования Н.Н. Меймана показали, что условия, налагаемые на коэффициенты продолжаемого полинома, необходимые и достаточные для того, чтобы он был $\mathbf{R}$-продолжаемым, не выражаются конечным числом неравенств, почему проблема эта и представляет особую трудность.

> Первым Казанским учеником НГ был Игорь Дмитриевич Адо. Фамилия его давала поводы к многим недоразумениям и шуткам. М.Ф. Бокштейн, узнав от меня в 1940 году, что в Казани работает И.Д., удивился: “А я думал, что Адо — иностранный математик!” Сам НГ не раз шутил: “Много Адо из ничего”. (Much ado from nothing; следовало бы about nothing[12].)

Чеботарев с учениками (слева направо):
В.В. Морозов, И.Д. Адо, Н.Н. Нейман

Он покинул подвалы университетской обсерватории, где качал маятники, готовясь к деятельности геодезиста, и обратился к алгебре: в 1931 году он стал первым казанским аспирантом НГ. К тому времени, находясь на пороге своих работ по резольвентам, НГ уже заинтересовался теорией групп и предложил ему разработать вопрос о существовании линейных представлений алгебр Ли (в то время говорили о группах Ли, но понимали их локально). Как выяснил НГ в Цюрихе в разговоре с Картаном, вопрос этот не был разработан. Результат Адо вызвал отклики в разных странах мира (я разумею статьи Картана и Биркгофа) и вошел во все монографии по алгебрам Ли под названием теоремы Адо. Ученые степени и защиты диссертаций к тому времени уже были восстановлены, и, вследствие особой важности этого результата, И.Д. сразу была присуждена степень доктора.

Любимым учеником НГ был, несомненно, Н.Н. Мейман: было что-то сближающее его с НГ — такая же живость характера, порывистость и быстрая реакция на окружающее. В судьбе же его было нечто, напоминающее судьбу Крейна: приехав в Казань, он закончил КГУ экстерном и поступил к НГ в аспирантуру. Ему НГ предложил рассмотреть проблему **R**-продолжаемости полиномов. Проблема оказалась очень трудной для решения в общем виде, и Н.Н. работал над ней еще около года после окончания аспирантуры. Ввиду полученных Н.Н. прекрасных результатов ему также была присуждена сразу степень доктора. Из казанских учеников НГ Наум Натанович — наиболее плодотворно работающий и единственный лауреат Сталинской премии, правда, за работы не алгебраического характера.

Автор этих строк также кончал аспирантуру как ученик НГ; тесная дружба возникла тогда между мной и двумя упомянутыми выше учениками НГ.

> Впрочем, я защищал обычную кандидатскую диссертацию. По этому поводу и по поводу нашей дружбы НГ рассказал нам анекдот о Пушкине. Однажды в юные годы А.С. и один его друг ехали в Петербург, а для наблюдения за их поведением послан был с ними наставник Пушкина мосье Трико, присутствие которого, естественно, было для молодых людей докукой. Чтобы получить хотя бы на некоторое время свободу, молодые люди составили некий заговор, и дальнейшее течение событий было таково. Вечер, Петербургская застава, и солдат на ней. Мчится тройка с Пушкиным (по

> условию анекдота все трое едут порознь). “Кто едет?” — ”Александр Однако!” Подивился солдат на заставе, какие бывают прозвища, но пропустил Пушкина. Вот вторая тройка. В ней друг Пушкина, назовем его, Гавриилом. “Кто едет?” — “Гавриил Двако!” Еще больше удивился солдат, но пропустил путника. Вот едет и третья тройка: “Кто едет?” — “Мосье Трико!” — “Ан, нет, — разъярился солдат, — мы бывалые, этим нас не проведешь!” И задержал мосье. Пока суд да дело, ночь прошла, и на нее друзья были свободны от надзора.

Я упомянул уже учеников НГ: А.В. Дороднова, решившего задачу о луночках, и Л.И. Гаврилова, специализировавшегося на K-продолжаемости полиномов и ее обобщениях. Вообще же учеников, как аспирантов, так и студентов у НГ было немного. Даже во времена наибольшего расцвета физмата КГУ специальность алгебры большой популярностью в КГУ никогда не пользовалась (несмотря на существовавшее мнение о засилии в Казани алгебры). Любопытно также, что в области, которую НГ считал для себя коронной,— теория Галуа — учеников у НГ почти не было; большинство их отошло далеко от коренных интересов своего учителя.

Настали дни войны. На митинге в актовом зале КГУ НГ, объятый волной гневного патриотизма, заявляет о своем желании отправиться на фронт добровольцем. Он сошел с трибуны, дрожа от возбуждения, и, конечно, был искренен, но в то время в Казанском военкомате (незадолго до этого пытавшемся “забрить лоб” академику Капице) все-таки поняли, что от профессора Чеботарева будет значительно больше пользы, если он останется в тылу, чем если его пошлют на фронт.

> В эти военные годы военные кафедры вузов обращали много внимания на преподавателей, в частности, привлекали нас к стрелковым упражнениям и соревнованиям, и НГ с увлечением участвовал в них. Сохранился один документ — за отличную успеваемость и дисциплину при изучении автоматического оружия Красной Армии приказом по Университету от 23 февраля 1943

года НГ была объявлена благодарность. Сам НГ с юмором рассказывал о своих успехах: “Кучность у меня удивительная, а меткости никакой, так что если Вы станете вот здесь, а я буду стрелять туда (тут он показывал в перпендикулярном направлении), то я непременно в Вас попаду”.

В Университете же держались несколько иного мнения о профессорах, нежели в военкомате, и в первую же мобилизацию студентов на уборочные работы в колхозах в сентябре 1941 года отправили с ними и НГ. В то время я был уже прикреплен к Университету и отправился вместе с НГ. Это была уже вторая партия направляемых на работы, и НГ хотел идти в Люткино, где работали 10–15 студентов физмата. Выйдя из Казани утром и пройдя весь путь пешком (ибо в то время более быстрых средств сообщения не было), мы только поздно вечером, в темноте, добрались до цели, где были радостно встречены физматовской бригадой. Девушки там крючили горох, юноши и мы должны были косить сначала вику, затем клевер и, наконец, подсолнечник. В качестве инструктора был к нам приставлен колхозник лет 45. Впрочем, его педагогическое мастерство сводилось к тому, что, наблюдая за работой кого-либо из нас, он презрительно комментировал: “А плохо косит” (употребленное им выражение подвергнуто мной значительной литературной обработке). Склонен он был также к перекурам (“перекурам с дремотой”, по определению НГ). Во время одного из них он рассказал нам, что до появления колхозов, взявшись косить, делали перекур, лишь пройдя “два вот таких гона”, и показывал полосу, конец которой явно терялся в бесконечности — в общем, по мере сил своих проводил воспитательную работу. Хотя НГ и старался, но с косьбой у него не ладилось, и долгое время пришлось бы ему там мучиться, если бы не пришло известие о закрытии института и в связи с этим экстренный вызов НГ в Казань для ликвидации институтских дел.

Несомненно, что последующая более длительная мобилизация в ноябре–декабре 1941 года на строительство оборонительных рубежей в Татарии не прошла бы мимо НГ, если бы в решающий момент не вмешался О.Ю. Шмидт, и НГ остался в Казани.

Появление в Казани в третьей декаде июля О.Ю. Шмидта, бывшего тогда вице-президентом Академии наук, но фактически концентрировавшего в своих руках все президентские функции, пользовавшегося большим авторитетом в правительственных кругах и приехавшего с неограниченными полномочиями, чтобы подготовить переезд в Казань эвакуируемых институтов Академии, было очень своевременным для Университета, перед которым, как говорили, уже вставала трагическая перспектива эвакуации из собственного здания в интересах некоего завода оборонного значения. С приездом Шмидта дело свелось к сильнейшему уплотнению и симбиозу с Академией. В частности, геометрический кабинет Университета был занят Институтом им. Стеклова, к которому несколькими месяцами позже присоединилось его Ленинградское отделение.

Ленинградцы, уже пережив первые ужасы блокады, явились в Казань как в некую обетованную землю и, как мне кажется, у них остались о Казани самые хорошие воспоминания. Напротив, москвичи явились из достаточно хороших условий, и, может быть некоторых из них тревожило только “Достаточно ли далеко мы уехали?”, как спросил меня при первой встрече в приемной ректора Б.Н. Делоне. Опасения его были неосновательны, так как хотя в Казани затемнение строго соблюдалось даже тогда, когда в нем никакой необходимости не осталось — вплоть до 1946 года — но воздушным налетам Казань не подвергалась. Ряд институтов Академии и отдельные ее работники вели себя в Университете как завоеватели и при обратной эвакуации увезли немало университетского имущества. Но у математиков с первых же дней создалось хорошее содружество, и если атмосфера геометрического кабинета физически была прохладной, если не сказать большего, то это не мешало теплым отношениям и плодотворной работе. Здесь И.М. Гельфанд разрабатывал свою теорию унитарных представлений групп, А.И. Мальцев написал работу о подалгебрах полупростых алгебр

> Ли, А.Д. Александров в доме у Фуксовского сада писал свою книгу о выпуклых поверхностях, П.С. Александров опубликовал работу, которую он сам цитирует как "казанскую", и т.д. Московское математическое общество собиралось на объединенные заседания с казанским физико-математическим обществом. 28 января 1942 года НГ был введен в состав ученого совета Института им. Стеклова.

Время это, особенно 1941 и 1942 годы, когда не было урегулировано снабжение научных работников, было крайне тяжелым, жилищные условия были стесненные (большая часть казанских математиков пустила в свои квартиры знакомые московские семьи), бытовые условия ужасны: отсутствие дров, аварии в водоснабжении и канализации и, конечно, вышедшие из строя системы центрального отопления. Так произошло и в доме, где жил НГ, температура в квартире доходила до -10, но в это время были организованы дежурства в учреждениях на случай воздушного налета или каких-либо других происшествий, и НГ охотно брался за выполнение обязанностей дежурного. "Я недурно поработал, ночуя ежедневно в дежурной комнате в Университете", — вспоминал он в письме к Рокотовскому. Горьким сарказмом звучат относящиеся к этому времени стихи Л.А. Люстерника (пародия на Северянина):

> Где зеркально среброструит
> Средне-Волжский водоем,
> В фешенебельной Казани
> Комфортабельно живем!

Но в эти тяжелые годы продуктивность НГ возросла: число его опубликованных работ в 1942 и 1943 годах достигает максимума — по 7 работ в год. Здесь сказывается и общее оживление, внесенное в математическую жизнь Казани присутствием мощного коллектива москвичей и ленинградцев, но несомненно то, что одним из стимулов работы был патриотизм НГ, заставивший его ранее объявить о своем намерении идти на фронт, и теперь, когда это намерение не осуществилось, побуждавший его искать в своей повседневной работе путей помощи родине в тяжелый для нее час. Такие пути нашлись в знакомой НГ тематике — в вопросах распределения корней целых функций, имеющих важное значение в теории регулирования, и НГ с увлечением отдался этой работе, вовлекая в этот круг идей и других математиков: Л.С. Понтрягина, Д.К. Фаддеева, Н.Н. Меймана. Работа эта продолжалась и в послевоенные годы, когда НГ был заведующим сектором математики в Казанском филиале АН СССР, и резюмирована в совместной монографии НГ и Н.Н. Меймана "Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций", вышедшей в свет уже после кончины НГ.

По существу, эти исследования были возвращением к казанской тематике первых лет. Интересно, что в это же время НГ возвращается еще к одной из первых казанских тем — проблеме резольвент — и в 1943 году публикует большую работу по этому вопросу, где подходит к задаче с новой точки зрения и получает интересные и обнадеживающие результаты. Параллельно с этим он работает над своей монографией по теории алгебраических функций.

Дважды за этот период ученый совет университета выдвигал НГ кандидатом на соискание премии им. Сталина. Первый раз это было 6 февраля 1942 года; отзывы о работах НГ давали Б.Н. Делоне и И.Д. Адо. По поводу его работы о плотностях Б.Н. Делоне писал:

> "В личных разговорах со мной Гекке очень настаивал на том, что без замечательного результата Чеботарева Артин не получил бы своей знаменитой теоремы".

По поводу работы о резольвентах 1931 года он писал:

> "Эту теорему весьма высоко оценил Гильберт, в результате чего на Всемирном математическом конгрессе в Цюрихе в 1932 году Николаю Григорьевичу, как одному из крупнейших мировых алгебраистов, было поручено прочитать на пленарном заседании конгресса обзорный доклад, посвященный 100-летию со дня смерти Галуа".

Вторая попытка выдвижения НГ на соискание той же премии за многолетнюю плодотворную работу была сделана 11 января 1944 года; отзыв о работах НГ давал Д.К. Фаддеев. В обоих случаях кандидатура НГ была отклонена, и премия увенчала его лишь посмертно.

Дважды ученый совет выдвигал НГ кандидатом в действительные члены Академии наук — на выборах 1943 и 1946 годов. Соперником НГ оба раза оказывался П.С. Александров, и не проходили ни та, ни другая кандидатура.

Дело делается не скоро, но скоро сказывается сказка. Тем временем война шла своим чередом и клонилась к победоносному завершению. Москвичи возвратились в Москву, жить стало просторнее и легче. Возвращался к нормальной жизни и Университет, хотя и не без печальных потерь: не выдержав трудностей военного времени, скончался Н.Н. Парфентьев (1943 г.), после смерти которого НГ стал бессменным председателем Казанского физико-математического общества. Скончался также и первый казанский друг НГ — П.А. Широков (1944 г.).

> В связи с болезнью Петра Алексеевича я был назначен деканом физмата, но вскоре после этого по семейным обстоятельствам мне срочно пришлось ненадолго уехать. Со свойственной ему готовностью оказывать людям всяческую помощь НГ вызвался временно замещать меня на этом посту, о котором я и сам почти не имел представления, ибо пришел на совершенно чистое место и деканат состоял лишь из меня да вакантной должности секретаря. Было это в период сессии, и, вернувшись, я узнал, что НГ с готовностью давал разрешение на отсрочку экзаменов любой студентке (студентов тогда почти не было — лишь больные и немощные), притом в устной форме, так что долго еще после приезда мне приходилось разбираться, кто не сдавал экзамены на законных правах, а кто — по собственному желанию.

Одним из результатов укрепления военного и экономического положения было то, что Университету намекнули на своевременность ходатайства о восстановлении при КГУ Математического института. Организационная работа легла, конечно, на НГ, но открытие института затянулось по описанной выше необычайной причине.

В 1944 году НГ исполнилось 50 лет. Естественно, возник вопрос о праздновании его юбилея. Я как раз был деканом, и мы предварительно обсудили этот вопрос с ректором Ситниковым. Не знаю, каким путем узнал об этом НГ, но он явился ко мне на квартиру и устроил мне такую "семейную сцену", что я отказался от мысли о проведении каких-либо "мероприятий".

> Впрочем, если не было собрания, славословий, адресов и прочей мишуры, которую не любил НГ, то некоторые мероприятия, которые можно было провести без согласования с НГ, осуществились. Прежде всего он был представлен к награждению и награжден орденом Трудового Красного Знамени и затем ему было присвоено звание Заслуженного деятеля науки Татарской Автономной ССР (Заслуженным деятелем науки РСФСР он стал еще раньше). В том же году в связи с широко праздновавшимся, хотя и не каноническим, 220-летним юбилеем АН СССР, он был награжден вторым орденом — Орденом Ленина. Наконец, в следующем году он был награжден еще одним орденом Трудового Красного Знамени. Орден Ленина вручал ему председатель президиума Верховного Совета ТАССР Динмухаметов в актовом зале Казанского университета. Награждалось несколько человек; Динмухаметов стоял на эстраде боком к зрителям, ибо награждаемые должны были зайти сбоку эстрады, чтобы подняться на нее, и тогда как раз оказывались к нему лицом. Но НГ, по обычаю презрев установленные положения, приблизившись по проходу к эстраде, сразу вскочил на нее, минуя лесенку, и очутился у Динмухаметова за спиной. Нарушение ритуала вызвало в зале оживление. Потом, возвратившись на место, НГ показал мне лежавший на ладони орден, сказав: "Вот яка цацка!" Он был явно доволен. Пришедшие так быстро один за другим три ордена давали повод НГ в последующем, при известии о каких-либо награждениях, говорить с видом обиженного ребенка: "А мне скучно, меня давно не награждали ...". Впрочем, я не помню, чтобы НГ когда-либо надевал свои ордена.

И вот настал 1945 год. Конечно, "в шесть часов вечера после войны" никто не встретился, но понемногу стали возвращаться с фронта студенты, мобилизованные в первые годы войны, возвращались и преподаватели, возрастала населенность вузов.

Увеличивались и штаты, другой вид принял характер научного общения: если до тех пор небольшой казанский математический коллектив военных лет объединяло физико-математическое общество и по докладам на его собраниях мы знали, над чем работает любой казанский математик, то теперь усилились специализация и разобщенность. Ослабела связующая роль общества, но отдельные группы математиков объединялись развивающимися семинарами при кафедрах. В мирное время одним из первых деяний НГ была поездка в Ардатов для наблюдения полного солнечного затмения. Вернувшись, он принял участие еще в одном установлении, немало изменившем научную жизнь Казани, — организации Казанского филиала АН СССР, где в первое время возглавлял Физико-технический институт. Впрочем, уже в январе 1946 года он покинул этот пост, делавший его двойным административным совместителем, и передал его Х.М. Муштари, оставшись только главой сектора математики этого института. Здесь он со своими сотрудниками — Бархиным, Хованским и др. — занимался разработкой проблемы Рауса–Гурвица.

Одним из последних замыслов НГ было создание энциклопедии элементарной математики: был составлен план издания, намечены авторы и заключен договор с издательством. Смерть НГ оборвала эту работу; несколько позже такое издание пробовали осуществить под редакцией Александрова, Маркушевича и Хинчина, было издано три тома, но все издание осталось незаконченным[13].

Если в детстве НГ был довольно слабым и болезненным ребенком, то, возмужав, на здоровье не жаловался. В Казанский период он оперировался по поводу паховой грыжи (после чего с некоторой гордостью демонстрировал нам оставшийся рубец). Однажды у него был карбункул на ноге, но все эти заболевания были случайные и преходящие. А вот с начала 1947 года состояние заметно ухудшилось — настолько, что иногда среди оживленного разговора он останавливался, сгибаясь от приступа болей. Исследование показало наличие опухоли. Видимо, НГ знал об этом, и хотя не мог точно знать ее характера, но догадывался о нем и, подобно С.О. Шатуновскому, пытался шутить над собой: когда заходила речь о чьем-либо нездоровье, НГ внезапно вмешивался: “А у меня — рачок, маленький, но вредный”. Однако актером он никогда не был, все движения души отражались на лице его и в голосе, и чувствовалось, что шутка его серьезно волнует. Московские знакомые уговорили его ехать на исследование и, если нужно, на операцию в Москву, и НГ взял свою последнюю командировку.

Ему приходилось плохо, но он много и плодотворно работал. Конечно, с ним были и книги и тетради; незадолго до отъезда он беседовал с А.В. Дородновым о проблеме перечисления всех подполей поля алгебраических функций одной переменной и сказал, что у него в этом направлении что-то клюнуло (видимо, это были мысли, не закрепленные на бумаге, так как в архиве его ничего об этом не сохранилось). Даже 3 июня, за день до поступления в больницу (институт Склифосовского), он читал на заседании Московского математического общества доклад "О выражении абелевых интегралов через логарифмы", доклад этот отличался большой ясностью, и о нем впоследствии с восторгом отзывались слушатели. Вскоре выяснилось, что операция необходима и что она будет тяжелой: требовалось удалить желудок и часть пищевода. Операция состоялась 21 июня и длилась три с половиной часа; оперировал Розанов и операция прошла хорошо. При больном постоянно находились либо его супруга Мария Александровна, либо сын Григорий, либо опытная операционная сестра Екатерина Николаевна Гулевич, приехавшие из Казани.

Я помню разговоры о том, что в таких операциях решающими для исхода являются первые одиннадцать послеоперационных дней; на этот раз решающим оказался двенадцатый день; начался тромбофлебит, вследствие него возникла эмболия легкого и в 7 часов утра 2 июля НГ скончался. В Казани всем была ясна серьезность операции, но поступившие благоприятные сведения, казалось, не оставляли сомнений в последующем выздоровлении. Телеграмма Марии Александровны упала, как удар грома. В смятении математики собрались в кабинете ректора; решено было послать меня в качестве представителя для присутствия на кремации, намеченной на 4 июля. Средства сообщения в те годы были мало совершенны; только благодаря содействию Г.В. Каменкова — тогда директора Авиационного института — я попал в самолет и своевременно прибыл в Москву. Гражданская панихида состоялась в старом помещении Математического института (на Большой Калужской) в кабинете И.М. Виноградова; выступали С.Н. Бернштейн, я, Л.А. Люстерник, П.С. Александров, А.Г. Курош, Ф.Р. Гантмахер, Ландсберг, Л.С. Понтрягин, и в речах выступавших звучала неподдельная грусть: восточная пословица говорит: "Когда умирает ученый — умирает мир". В крематории перед погружением гроба в огненное сердце здания говорили А.О. Гельфонд и Н.Н. Мейман. Вся процедура была организована четко и разумно: даже сумели устроить, чтобы Мария Александровна, Гриша и Е.Н. Гулевич втроем заняли специальное купе, и командировали в Казань для участия в похоронах от Академии наук Н.Н. Меймана и Л.А. Люстерника. С грустной иронией сказал мне Н.Н. Мейман, что когда речь идет о похоронах, в Академии ничего не жалеют. Как раз в эти дни в Москве должно было состояться учредительное заседание Общества по распространению политических и научных знаний, поэтому многие казаничи оказались в Москве, и 6-го июля к отходу поезда на перрон Казанского вокзала отдать последний поклон праху НГ пришли К.П. Ситников, И.А. Дюков, Д.Я. Мартынов (тогда директор Энгельгардтовской обсерватории), А.П. Норден, А.Д. Дубяго, Б.М. Козырев. Дольше всех в вагоне у урны задержался Е.К. Завойский, и, когда он вышел, я видел слезы на его глазах.

Несмотря на каникулярное время, великое множество народу собралось к приходу поезда на вокзале в Казани. Поезд встал на второй путь, и дорога к вокзалу была перегорожена каким-то составом, однако, узнав о причине скопления народа, начальник станции Копылов дал приказ раздвинуть состав так, чтобы открыть доступ к нашему вагону — в это время мы сидели в вагоне не выходя. Когда к вагону открылся доступ, Григорий Чеботарев вынес урну. По распоряжению Каменкова были приготовлены специальные носилки для урны, урну поставили на них, и процессия двинулась в Университет, где в актовом зале состоялась вторая гражданская панихида. С краткими речами выступили проф. Е.И. Григорьев, Л.А. Люстерник, В.А. Яблоков, от правительства Татарии Батыев, студентка Талантова, Н.Н. Мейман и Б.Л. Лаптев. Затем еще более разросшаяся процессия двинулась на Арское кладбище, где вблизи могилы Лобачевского было приготовлено место погребения — могила и на дне ее миниатюрный склеп. Над могилой говорили проф. Воробьев, проф. Гагаев и я. Затем урну опустили вниз, Г. Чеботарев установил ее в склепе, рабочий замуровал склеп и могилу засыпали.

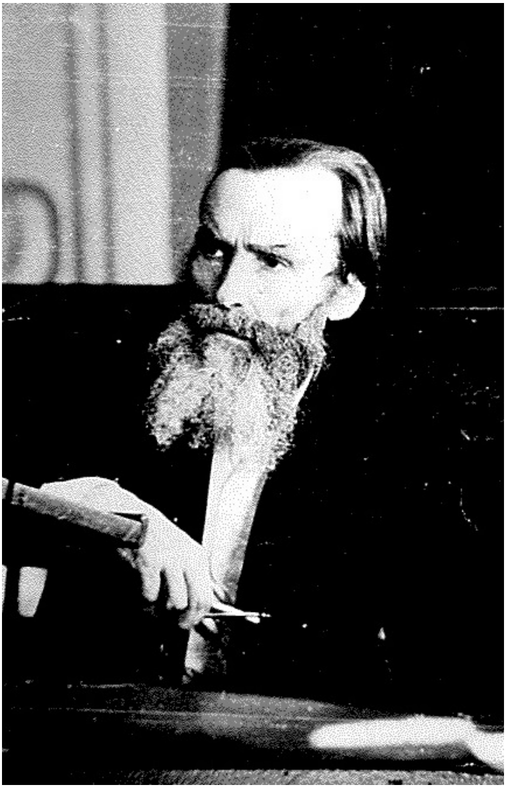
Однажды, будучи на кладбище, НГ тихо сказал: “Когда я умру, мне хотелось бы, чтобы на моей могиле стоял маленький крестик”. И впоследствии на могиле НГ был поставлен черный мраморный памятник с крестом. Ортодоксам нечего ужасаться: религия — установление, совершенно чуждое НГ, и крест на его памятнике — не религиозный символ, а символ упокоения. Надпись на памятнике гласит:

Математик
Николай Григорьевич Чеботарев
1894 – 1947
Профессор Казанского университета
Член-корреспондент Академии наук

Большой ученый никогда не умирает совсем, творчески он бессмертен. В 1932 году в Цюрихе НГ очень заинтересовал некоторых иностранцев своей теорией рая, точнее — того света. Почему-то зашел разговор о загробном мире, и НГ сказал, что, по его мнению, загробный мир — это большой, бесконечно длинный коридор, по обеим сторонам которого стоят шкафы, содержащие математическую литературу — журналы и книги всех времен и народов прошедшего, настоящего и будущего. Попавший на тот свет идет по этому коридору и просматривает литературу в шкафах: когда он находит упоминание о себе, он испытывает блаженство (и, видимо, если не находит упоминания, — то муки).

Посмертно НГ была присуждена Сталинская премия, которая дважды миновала его при жизни, но это не так важно — после смерти НГ вышли его книги “Теория алгебраических функций”, совместная с Н.Н. Мейманом монография о проблеме Рауса-Гурвица, и подготовленная к печати по запискам НГ книжечка “Введение в теорию алгебр”. Нет сомнения, что имя НГ еще долго будут цитировать алгебраисты.

Президенту АН СССР С.И. Вавилову, хорошо знавшему и ценившему НГ, мы обязаны изданием специального постановления правительства об увековечении памяти покойного. В числе прочих пунктов оно содержало пункты об установлении в Казанском университете трех студенческих стипендий имени НГ, установление премии покойного, присуждаемой раз в три года за лучшие работы по математике, издании его трудов и присвоении Институту математики и механики при КГУ имени Чеботарева. Многое изменилось с тех пор, стипендии отменены, премия тоже (присуждение ее состоялось лишь один раз[14]), но три тома трудов НГ, содержащие его научные статьи, украшают библиотеки алгебраистов, Институт имени Чеботарева входит в состав Университета.



В.В. Морозов

Мне хочется заключить следующими словами: меня могут упрекнуть в том, что я слишком много внимания отдал личности НГ, останавливаясь, может быть, на маловажных фактах, а не коснулся более подробно его работ и влияния их на современную алгебру. Но работы НГ всегда с нами, образ же его как человека может с годами померкнуть — мне хотелось сохранить его, и если это мне хоть в какой-то мере удалось, то мой труд не пропал даром.

Сентябрь-октябрь 1963 г.

Примечания *

1. В архиве В.В. Морозова имеется оттиск очерка "Николай Григорьевич Чеботарев" с шапкой "Алгебра и логика, 6, № 5 (1967), 35-82. К 20-летию со дня смерти Н.Г. Чеботарева (1894–1947)", в которую внесено исправление от руки: "8, № 4 (1972)" и соответственно "К 25-летию". Видимо, журнал делал дважды попытку напечатать воспоминания еще при жизни автора. Оттиск представляет из себя отредактированную копию рукописи В.В. Морозова. Значительную часть правок мы использовали в данном издании.

2. Официальное название города Каменец-Подольский.

3. Семья Чеботаревых проживала некоторое время в Умани.

4. 1927–28 — имеется в виду учебный год.

5. Tschebotareffsche Dichtigkeitssatz (нем.) — Теорема плотности Чеботарева.

6. mea culpa (лат.) — по моей вине.

7. Лауреаты премии имени Н.И. Лобачевского (500 р.):

1) S. Lie за работу "Theorie der Transformationsgruppen" (1898).

2) W. Killing за работу "Einfürung in die Grundlagen der Geometrie" (1900).

3) D. Hilbert за работу "Grundlagen der Geometrie" (1904).

4) В 1906 году на четвертом присуждении премии не получил никто.

5) Пятое присуждение не состоялось.

6) L. Schlesinger за работу "Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten". (См. УМН, том П, вып. 2 (18), 1947. "Казанское физико-математическое общество".)

---

*Принадлежат редактору Сб. Николай Григорьевич Чеботарев (1994) Ю.Б. Ермолаеву

По другому источнику пятое и шестое присуждения происходили одновременно в 1912 году, премии получили F. Schur и L. Schlesinger (В.М. Герасимова, Указатель литературы по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. Гостехиздат. М. 1952).

8. Стихи Л.А. Люстерника (см. также стр. 53).

9. in statu nascendi (лат.) — в стадии зарождения, в момент образования.

10. В.В. Морозов, также как и О.Ю. Шмидт, носил бороду, что в те времена было редкостью.

11. Напомним, что воспоминания писались в 1963 году.

12. Much ado about nothing (англ.) — много суеты вокруг ничего (ado — суета, хлопоты) — вариант английской поговорки.

13. В 1963 и 1966 годах вышли 4-й и 5-й тома.

14. В 1952 году президиум АН СССР присудил О.А. Олейник премию им. Н.Г.Чеботарева за исследования по эллиптическим уравнениям с малым параметром при старших производных.

ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ ОБ ОТЦЕ *

Г.Н. Чеботарев

Мой дед с отцовской стороны, Григорий Николаевич Чеботарев (1864–1922), сын зажиточного крестьянина одной из южных губерний России, закончил юридический факультет Харьковского университета и далее занимал в разных городах судебные должности, дослужившись до председателя окружного суда, с чином действительного статского советника. В 1894 г. в г. Каменец-Подольске в семье родился старший сын Николай (мой будущий отец), а через четыре года его младший брат Григорий. Григория Николаевича переводили по службе в разные города — Одесса, Умань, Елисаветград, Киев. В Елисаветграде папа мой учился в одном классе гимназии с Игорем Таммом — впоследствии крупным физиком, и Фавстом Никитиным, который стал селекционером-кролиководом и отыскал папу в 1945 году, когда стал работать в Бирюлинском зверосовхозе под Казанью.

В 1912 году, окончив гимназию, папа поступил на физико-математический факультет Киевского университета, где его руководителем был профессор Дмитрий Александрович Граве, а старшими товарищами — О.Ю. Шмидт и Б.Н. Делоне. По окончании университета в 1916 году он был оставлен Д.А. Граве "для приготовления к профессорскому званию", сдал магистерские экзамены и был избран на должность приват-доцента, подрабатывая одновременно преподаванием в средних учебных заведениях.

В 1920 году он оказывается лектором в Чапаевской дивизии, болеет сыпняком и, выздоровев, возвращается не в Киев, а в Одессу. По семейной легенде, во время сыпного тифа у него пропала книга, взятая в библиотеке Киевского университета, после чего он не посмел туда вернуться; другое объяснение — необходимость помогать родителям, голодавшим в Одессе. Так или иначе, в 1921 году он переезжает в Одессу, где в 1922 году во время холеры

*Сб. Николай Григорьевич Чеботарев/под ред. Ю.Б. Ермолаева. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. — С. 54–85.

умирает его отец. Младший брат, оказавшийся в белой армии, к этому времени был уже в Югославии.

Папа с бабушкой чуть не голодали. Папа не имел постоянной работы; он имел репутацию неважного преподавателя — видимо, переоценивал возможности своих учеников и был слишком погружен в свои мысли. Бабушка солила капусту и продавала на базаре, спускала последние вещи. Иногда она приходила к друзьям, в семью художника Депальдо, и жаловалась его жене на жизнь, на сына. Депальдо что-то рисовал в это время — а затем подарил бабушке трагикомедию своего сочинения "Ковер-самолет", главный герой которой "Николай Чеботарев — молодой профессор 28 лет, фанатично предан математике и обожает яч-кашу; неравнодушен к музыке и пению, нечужд поэзии; по рассеянности бывает чуток. Страшно конфузлив и краснеет при слове "шапка". (Незадолго у папы украли в очереди шапку, и бабушка постоянно его ею упрекала.) Мучительно не терпит вылощенных мужчин и бездарных причесок. Ходят слухи, что обувь и одежда объявили его врагом мануфактуры." Пьеса в стихах, очень неплохая для автора-любителя, имеет стержнем надежду семьи продать хороший ковер и сделать необходимые запасы продуктов, или, соответственно, съездить в Петроградский университет, надежды, которым не суждено осуществиться.

Папа в эту эпоху ходил в пальто, подпоясанном бельевой веревкой, и совершенно не смущался этим. Но в творческом отношении этот период был весьма продуктивен. Он вспоминал потом, что основная идея будущей докторской диссертации пришла ему в голову, когда он нес на базар за бабушкой ведра с капустой.

В 1923 году папа познакомился в Доме Отдыха с Марией Александровной Смирнитской, моей будущей матерью. Короткий роман завершился браком. Бабушка приняла невестку неласково; по ее требованию молодым пришлось обвенчаться, хотя оба были неверующими — гражданского брака бабушка не признавала. К сожалению, отношения мамы с папой и бабушки оставались прохладными до самой бабушкиной смерти в 1939 году.

Мама имела хорошую работу, она была ученицей и ассистентом приехавшего в Одессу из Петрограда крупного физиолога, ученика И.П. Павлова — Бориса Петровича Бабкина. Правда, как раз в описываемое время Борис Петрович с семьей был выслан властями за границу “за связь с АРА” — американской организацией, оказывавшей России гуманитарную, как теперь говорят, помощь. Тем не менее, именно мама была основным “кормильцем” семьи.

Папа искал работу, и однажды в газете прочел, что московский Институт Гражданских Инженеров имеет вакантное место. Папа подал документы и был принят. Он поехал в Москву, начал работать и был неприятно удивлен тем, что коллеги как-то недоброжелательно к нему относятся. Через некоторое время он узнал, что взят на место Д.Ф. Егорова, уволенного, как папа пишет, “при весьма печальных обстоятельствах”. Папа в ужасе бежал обратно в Одессу.

Судьба Дмитрия Федоровича Егорова в дальнейшем была трагична. Признанный глава московской математической школы, почетный член Российской АН, глубоко религиозный, сурового нрава старик не мог примириться с новыми порядками, подвергался травле, и был, наконец, арестован “как сектант”. В тюрьме он объявил голодовку, был выслан в Казань и помещен в тяжелом состоянии, со слипшимися стенками желудка, в охраняемую часовыми палату больницы (ГИДУВ). Мы в это время уже жили в Казани, и моя мама, как врач, в белом халате проходила и ухаживала за ним. Он умер на маминых руках в 1931 году, и похоронен на Арском кладбище, чуть наискось против могилы Лобачевского. После войны В.В. Морозов поставил на его могиле скромный памятник.

В Москве папа познакомился с казанским профессором Н.Н. Парфентьевым и П.А. Широковым, которые звали его переезжать работать в Казань, где была хорошая библиотека и издавался журнал. В 1927 году в казанском университете появилась вакансия на кафедре математики, папа подал на конкурс и был избран. Одновременно он был приглашен в Ленинградский университет, но предпочел Казань.

Первый год папа жил и работал в Казани один, оставив пока семью в Одессе — в конце 1926 года родился я, и устраиваться на новом месте с грудным ребенком было сложно. В следующем, 28-ом году папа перевез меня с мамой в Казань, бабушка переехала жить к своим сестрам в Краснодар.

Прямо с вокзала мы поехали к Широковым. Нам была уже снята комната в частном доме, недалеко от них, где мы и прожили несколько первых месяцев. Затем папе дали квартирку с низенькими комнатами в мезонине тогдашнего Дома Ученых (на ул. Комлева, против Лядского сада). И еще через некоторое время (мне тогда уже было 3 года) мы переехали в три большие комнаты роскошной коммунальной квартиры на Старо-Горшечной (ныне ул. Щапова). Именно в этой квартире прошло мое детство. В 1935 году мы получили изолированную 4-х комнатную квартиру в "доме специалистов" на ул. К. Маркса, где папа прожил до своей смерти в 1947 году, где я живу сейчас.

С квартиры на ул. Щапова начинаются мои связные воспоминания. То, что я написал до сих пор, я писал по рассказам других, по семейным преданиям.

Папа вставал очень рано — в 4 или 5 часов, просыпался мгновенно, часто со вскриком — и включался в работу, продолжая ход мыслей, с которыми накануне заснул. В виде компенсации он спал час-полтора днем, и, кроме того, легко задремывал на несколько минут в любой ситуации, где не требовалось его активного участия — на Ученом совете, на чужом докладе и т.п. Ложился обычно не поздно — часов в 11–12.

Я не назвал бы папу рассеянным человеком, скорее он был очень сосредоточен на своих мыслях, и, сверх того, был способен к мгновенному переключению. Он не требовал для работы специальных условий — тишины, уединения. Двери его кабинета были постоянно полуоткрыты, и я или мама всегда могли к нему обратиться. Более того, у нас в семье была скверная манера разговаривать друг с другом через всю квартиру, каждый из своей комнаты. Папе это, видимо, не очень мешало, и, отреагировав на вопрос, он без труда переключался вновь на работу. Иногда, чтобы помочь себе сосредоточиться, он говорил вслух: "Я хочу доказать следующую теорему ...", или "Я сейчас докажу следующую теорему ...".

Папа писал лежа, точнее, полусидя на кровати (кровать у него была железная с досками и волосяным матрацем) или стоя, за конторкой или на крышке рояля, но никогда не сидя за письменным столом. У него была удивительная особенность — он писал свои статьи прямо набело, почти не прибегая к черновикам. Писал главным образом в тетрадях — школьных или общих, вечным пером, которое появилось у него очень рано (первое, видимо, привез из-за границы). С бумагой бывало туго, и он ее очень берег; если мне приходилось просить у него бумаги или тетрадь, он давал их мне с театральным восклицанием: "На, пей мою кровь!" Время от времени папа выходил на порог своей комнаты покурить (он курил маленькие самокрутки из махорки с мундштуком; пепельницей служила старая консервная банка, стоящая на шкафике у дверей, я ее сохраняю). В это время он продолжал обдумывать то, что пишет.

Когда он уставал от работы, то раскладывал пасьянс или играл на рояле. Папа учился музыке три года в детстве и далее совершенствовался самостоятельно. У него был абсолютный слух. Он играл многие сонаты Бетховена, в том числе и охотнее всего — 8-ю, 14-ю и 23-ю, и все вальсы Шопена. Он любил выступать на факультетских вечерах. Допускаю, что его исполнение не было изысканным (один наш друг говорил, что у него получается "казацкий" Шопен), но это его не смущало; мне же эти вещи нравятся именно в папиной интерпретации.

Мне кажется, что у папы не было постоянных сильных увлечений вне математики, того, что теперь называют хобби. Скажем, П.А. Широков с юных лет увлекался энтомологией, которую можно считать его второй профессией. Конечно, папа очень любил музыку и литературу (скажем, очень любил пьесы Б. Шоу). Но я почти не видел его читающим или горячо обсуждающим какую-нибудь книгу. Во всяком случае, не припомню, хотя в итоге оказывалось, что он все интересное читал, знает и имеет о прочитанном свое суждение.

Главным же увлечением папы были люди. Он глубоко интересовался людьми самого различного склада и положения. Он легко вступал в контакт с самыми различными людьми, от ученых, специалистов в самых далеких от математики областях науки, с людьми искусства, до дворников и извозчиков. Папа как-то умел и любил становиться на их точку зрения, сколько бы отличной от его точки зрения она ни была. Бывало, он поднимал на улице пьяного и отводил его домой. От мамы и знакомых я слышал, что папа часто помогает деньгами нуждающимся.

В рассказе Чехова “Скучная история” главный герой говорит о себе: “ ...самое святое право королей — это право помилования. И я всегда чувствовал себя королем, так как безгранично пользовался этим правом. Я никогда не судил, был снисходителен, охотно прощал всех ...”. Вот папа, мне кажется, тоже чувствовал себя королем. Мелкие человеческие чувства, зависть, злоба, осуждение чужих поступков, обиды как будто не касались его. Если он плохо относился к кому-нибудь, то не “за себя”, а только за других. Такие случаи я помню, обычно дело касалось “начальства”, папа часто цитировал:

Минуй нас, пуще всех печалей,
И барский гнев, и барская любовь!

Несмотря на отрицание “буржуазных предрассудков”, в обращении с людьми папа был очень деликатен. Он не называл на “ты” никого, кроме маленьких детей. Его близкие ученики, Владимир

Владимирович Морозов, Игорь Дмитриевич Адо, Наум Натанович Мейман, которых он знал с юных лет, именовались у нас в доме только по имени и отчеству и на "Вы". Тут мне вспоминается забавная история. Папиным любимым учеником в казанский период был Н.Н. Мейман. Сын нэпмана, он приехал к папе в Казань по рекомендации кого-то из знакомых математиков, ибо у себя в Киеве не мог поступить в университет по соцпроисхождению. Ему было тогда 18–19 лет. Профессор Баранов, бывший тогда деканом факультета, предупредил его, чтобы он поспешил окончить университет, так как может быть в любой момент отчислен по той же причине. Н.Н. окончил, сдав за один год 40 экзаменов, университет и был взят папой в аспирантуру. Н.Н. часто подкармливался у нас, жил с нами летом в доме отдыха, словом, был своим человеком в семье. Мне было 4–5 лет, когда, по рассказу Н.Н. (я этого сам не помню), я потребовал, чтобы и он называл меня по имени и отчеству и на "Вы". Наум Натанович счел это неудобным — могли сказать, что он подлизывается к своему профессору. Я заявил тогда, что иначе буду называть его на "ты" и Наумкой! Наум Натанович пожаловался папе. Папа заявил, что считает меня неправым, однако не считает возможным применить родительскую власть, так как я защищаю, как теперь принято говорить, свои права человека, Наум Натанович махнул рукой: "— Зови как хочешь!". Разумеется, через пару часов все вернулось на круги своя.

Я вообще не помню ни одного случая, чтобы папа с кем-нибудь говорил неуважительно, так сказать, "ругался" (кроме одного случая, но о нем позже). В семье, говоря с мамой или со мной, папа никогда не повышал голоса, — другое дело, что мы часто разговаривали громко. Никогда не было ни одной ссоры; никогда не было разногласий относительно моего воспитания. Если у мамы с папой были тут какие-нибудь разночтения, то они решались в мое отсутствие. Многое тут следует, вероятно, отнести на счет большого такта обоих, и особенно моей мамы. И ведь это при папином взрывчатом характере! Если папа бывал чем-нибудь возмущен, он был способен буквально взорваться гневом, и гнев его был королевский, испепеляющий! Впрочем, если он начинал гневаться на меня, стоило мне услышать: "Григорий, будь так добр!!

. . . ” и я мгновенно сдавался, так как чувствовал, что дальше может быть что-то ужасное. И ведь при этом ни папа, ни мама меня в жизни пальцем не тронули. Правда, папа порол меня дважды — один раз, когда я засветил фотографические картинки, второй — точно не помню, порол классически, сняв штаны и положив поперек колена. Мне было тогда 3–4 года, помню только, что боли не было, но было очень стыдно. Мама же в крайних случаях переставала на время со мной разговаривать — это было очень тяжелое наказание. Случай же, который я упомянул выше, таков. Во время войны нас, школьников, послали почти на три месяца в совхоз, в район Набережных Челнов, и папа однажды туда смог наведаться. Случилось, что лошадь разбила копытом губу одному из моих товарищей, его спешно надо было везти за 12 километров на главную ферму, где был врач. Но конюх не давал подводу и крепко выматерился. При папе! Папа взорвался, он закричал: “— Да как Вы смеете!” — таким страшным голосом, что конюх задрожал от страха, и тут же выполнил все, что требовалось.

Папа был брезглив. Он не ел из одной тарелки с другими, не пил из одного стакана, не выносил пенок, жилок в мясе и т.п. Однажды, совсем маленьким, я взял в рот конфету, обсосанную моим товарищем. Папа, увидев, так на меня закричал . . . , что я больше никогда так не делал.

Он был стыдлив. При всей вольности в одежде, он никогда не показывался на людях в подтяжках, в нижнем белье. Он любил купаться без трусов (плавки были тогда не распространены, да вряд ли он ими пользовался бы), и потому, купаясь, уходил от всех чуть ли не на километр.

Некоторые знакомые называли папу парадоксалистом, человеком парадоксального ума, парадоксального поведения; некоторые — чудаком. Вот что писал он в одном из писем сам о себе: “— Я считаю себя вполне современным человеком. Я давно “отряхнул от своих ног прах старого мира”, то есть сеть предрассудков, которые составляют основу обывательски-мещанского мировоззрения. К сожалению, большинство людей, с которыми я повседневно сталкиваюсь, в большой мере ими пропитано. Я поставил себе девизом — не придерживаться тех мнений, которые я не могу логически обосновать. На этой почве у меня с моими сослуживцами часто возникают споры. Они ни к чему не приводят, так как мои собеседники в конечном итоге опираются на доводы: “так принято думать”, или что-нибудь в этом роде, и тогда я бессилен сдвинуть их с мертвой точки”.

Несколько маленьких примеров. Когда я в шестом классе готовился к экзамену по географии и ныл, что не смогу его сдать, папа сказал: “Хорошо. Если ты получишь отлично, я дам тебе копейку, если хорошо — 10 копеек, удовлетворительно — рубль, неудовлетворительно — 10 рублей, а если очень плохо — 100 рублей.” Так сказать, компенсация за моральный ущерб. Я получил отлично, и мне был вручен лист бумаги с копейкой, обведенной карандашом.

Другой пример. Какой-то студент явился к папе домой и просил поставить ему отметку без экзамена, ссылаясь на какие-то обстоятельства, и обещая осенью сдать экзамен на отлично. Папа взял у моей мамы иглу Франка, уколол студенту палец и заставил дать своей кровью письменное обязательство.

Летом, в доме отдыха, папа носил рубашки с открытым воротом, специально сшитые холщевые брюки типа бриджей, с манжетом ниже колен, сандалии на босу ногу, или даже ходил босиком. Некоторых дам это шокировало.

Можно ли считать это парадоксальным поведением? По тем временам в той среде такая одежда считалась экстравагантной. Если тут и было желание фраппировать общественное мнение, в этом желании папа был безусловно искренен. На замечания, что так никто не делает, он обычно отвечал, что должен же кто-то быть первым! Для папы вообще было характерно привнесение в жизненные ситуации элемента игры. Недаром в математике папа высоко ставил спортивный интерес, советовал молодежи относиться к математике как к спорту. Прикладная сторона математики, хотя он не мог не ценить ее, не была его областью. Он подчеркивал, что если бы люди не могли заниматься чистой, “бесполезной” математикой, то очень скоро прикладники, инженеры разучились бы производить свои простейшие расчеты вследствие падения общей математической культуры народа.

Трудно отрицать некоторую парадоксальность или, скажем, нетривиальность, необычность его жизненных установок; недаром среди его любимых писателей — Бернард Шоу. Но это никак не сводилось к намеренному оригинальничанью.

Я уже отмечал, что у папы не было серьезных хобби, увлечений вне математики. Как же он развлекался?

Говорят, что математики любят играть в шахматы (и многие действительно любят). Папа к шахматам был совершенно равнодушен. Был как-то случай: приехавший гроссмейстер давал в университете сеанс одновременной игры. Папу уговорили и усадили за одну из первых досок. Он выскочил одним из первых, с гордостью восклицая: "А я уже проиграл!" Вообще папа не занимался и не интересовался спортом, хотя плавал очень хорошо. В молодости, в Одессе, он выплывал на внешний рейд (около пяти километров). Однажды во время такого заплыва у него свело судорогой руку и ногу, и ему с трудом удалось выплыть. Но при мне, в Казани, он Волгу не переплывал, вероятно, не желая огорчать мою маму, которая была большой трусихой и во время папиного купания кричала: "Никола, не заплывай далеко!". Впрочем, папа входил в университетскую стрелковую команду и был "ворошиловским стрелком". Летом папа с П.А. Широковым чуть не ежедневно играл в домино, причем они разыгрывали с большим увлечением какие-то серьезные партии. Он с удовольствием играл в крокет. Эта игра теперь вышла из моды, и не удивительно. Ведь пока один из игроков гоняет свой шар по площадке, остальные наблюдают за ним, беседуя между собою, и в этой беседе чуть ли не весь смысл игры. В доме же отдыха после ужина составлялись партии в шарады, в чем папа принимал горячее участие. Он с профессором А.А. Агафоновым (известный в Казани детский врач) обычно руководили соперничающими партиями. Изредка собиралась партия в преферанс, но это достаточно редко.

Я уже говорил, что папа любил людей и легко вступал с ними в контакт. У него было много хороших знакомых — это и его казанские ученики: Морозов, Адо, Мейман, Дороднов, и Б.Л. Лаптев, и, позже, А.П. Норден, и многие другие. Но близких друзей было немного. В молодости были, конечно, друзья в Одессе, в Киеве, в Москве (например, В.В. Степанов). В казанский период я могу назвать только П.А. Широкова и А.В. Бирилева.

С Петром Алексеевичем Широковым папа познакомился в Москве в середине 20-х годов; именно П.А. вместе с Н.Н. Парфентьевым убедили папу сменить Одессу на Казань. Здесь, в Казани, Широковы были, пожалуй, единственными, с кем мы встречались семьями; чаще мы приходили к ним, так как у них был собственный дом (часть дома) с садом, на краю города.

Папа и Петр Алексеевич были очень различными по складу характера, по темпераменту. Петр Алексеевич был человеком системы и человеком долга. Он серьезно относился к жизни. Внешне был замкнут, сдержан, строг по отношению к себе и к другим. Как-то мы с Сашей (сыном Петра Алексеевича, Александром Петровичем Широковым, моим другом с детства), начитавшись "Спартака" Джованиоли, затеяли на даче сложную игру. Увидев это, Петр Алексеевич неодобрительно сказал: "Опять вы в Суллу играете! Пошли бы лучше в деревню, поискали масла!" Однажды мы с Широковыми ехали в Шелангу по Волге на речном трамвайчике и попали в бурю. Мы с Сашей затеяли катанье на трюмных перилах, П.А. прикрикнул на нас: "Как вы можете играть в такой момент!" Папа возразил: "Пусть дети последнюю минуту жизни проведут весело!" Папа вносил во все, к чему прикасался, момент игры. Его жизненная философия содержала элемент риска. Поощряя меня на рискованные решения (чему я обычно сопротивлялся), он говорил: "Пусть лучше один из тысячи детей сорвется с крыши и убьется, зато остальные вырастут ловкими и счастливыми". Петр Алексеевич, человек осторожный и ответственный, так учил Сашу грести: сажал его в ялике на весла, сам садился за руль, и они ездили в нескольких метрах от берега вверх и вниз по течению.

Но при всем различии характеров и даже вкусов (П.А. любил Чайковского, Чехова, Достоевского, папа — Бетховена и Шопена, Шоу) они были долгие годы, до кончины в 1944 г. Петра Алексеевича самыми близкими друзьями и глубоко уважали друг друга, при этом П.А. мягко подсмеивался над некоторыми папиными экстравагантностями. Например, любил рассказывать, как папа, провалив однажды студента на экзамене, смутился, бегал по всему университету, разыскивая его, и сказал: "Знаете, я подумал и решил, что Вам можно поставить тройку!"

Однажды, это было в 1937 или 38 году, у нас в квартире раздался звонок, и совершенно незнакомый старик, слепой, спросил Николая Григорьевича. Оказалось, это бывший адвокат Александр Васильевич Бирилев, слышавший много хорошего о папе и пришедший, без церемоний, с ним познакомиться. С тех пор до самой папиной смерти они были близкими друзьями. Александр Васильевич сам был очень интересным человеком. Он ослеп лет пяти после перенесенной кори, и был первым в России слепым, окончившим университет. Круг его интересов был чрезвычайно широк, и была удивительная способность творчески перерабатывать все, что он узнавал. По возрасту Александр Васильевич годился мне в деды, и действительно, его внучка училась на год моложе меня. Он имел двух дочерей, старшая, Евгения Александровна, тоже адвокат и вообще очень интересный человек, также была другом нашей семьи. Жена Александра Васильевича — в молодости одна из первых красавиц города, вышла в свое время замуж за слепого и, надо сказать, не слишком красивого человека, к ужасу своей семьи. Они прожили вместе долгую и счастливую жизнь. Я затруднюсь сказать, о чем беседовали папа с Александром Васильевичем — темы были самыми разнообразными.

А.В. охотно общался и со мною. Летом 1939 г. и мы, и они снимали дачу в Займище под Казанью. А.В. решал со мною задачи по геометрии из задачника Рыбкина, складывая листочек бумаги в качестве чертежа. Позже он рассказал мне, чем занимается философия, а еще позже читал со мною (читал, понятно я, а он комментировал) “Грамматику науки” Пирсона. Кстати замечу, что папа, не очень увлекаясь философией, придерживался в ней позитивистских взглядов и передавал суждение известного физика акад. Мандельштама, что физик или математик не может не быть махистом.

Война застала меня в доме отдыха, так что эпизод с попыткой папы записаться добровольцем на фронт я знаю только по рассказу молодых университетских аспирантов, призывавшихся в армию и говоривших об этом случае несколько скептически.

Вскоре началась массовая эвакуация с запада на восток. Многие математики, проезжавшие через Казань, получали от общих знакомых наш адрес и останавливались у нас, так что иногда в квартире ночевало одновременно более 20-ти человек; спали на рояле и под роялем и на полу на матрасах.

К осени мы начали голодать. На базаре, которым жила Казань, цены полетели вверх. Иждивенческих 400 г хлеба не хватало. Наша семья выросла — приехали из Москвы два моих двоюродных брата и двоюродная сестра со своей мамой. Одну комнату в квартире занимала семья Ландсбергов (известный физик). Вся Казань была переполнена эвакуированными. Актовый зал университета, зал во Дворце Труда были сплошь уставлены кроватями. В Казань, кроме заводов, эвакуировалась часть московских и ленинградских академических институтов.

Зима была лютая, без единой оттепели, температура падала до -42° С. Все голодали и мерзли. В нашем доме лопнуло центральное отопление, температура в комнатах доходила до -15° С. В течение месяца нам пришлось разъехаться по знакомым. Папа еженощно дежурил в университете и спал на диване в предректорской, мама — в госпитале, где она работала.

На продуктивности папиной работы тяжелые условия отражались мало. Он, как и все, работал с полной отдачей. Как и многие ученые, папа взял оборонную тему — о вибрации стволов морских орудий при выстреле, изучил необходимые разделы механики, теории упругости и сделал нужные расчеты.

С лета 1942 года АН как-то наладила питание своих сотрудников, раздали по две сотки под картошку, и последующие военные годы не имели для нас того апокалиптического характера, как зима 1941–42 года.

Мне нелегко рассказывать о папиных политических взглядах прежде всего потому, что у нас в доме обычно не велось разговоров на политические темы. Какое-то представление о них я могу составить лишь анализируя редкие высказывания родителей.

Я полагаю, что до революции папа придерживался левых взглядов, может быть, спровоцированных консервативными симпатиями своей матери. Вспоминая 1916 год, он бросает фразу: “Меня гораздо больше занимала мысль об эксплуатации трудящихся". В 20-ом году папа оказывается лектором в Чапаевской дивизии (случайно? добровольно?), и только сыпняк помешал ему проделать с ней польскую кампанию. Думаю, что он разделял распространенное тогда среди интеллигенции чувство долга перед народом и отвращение к "буржуазно-мещанскому" образу жизни. Во время революции и позже он не мог не видеть нелепостей, делавшихся большевиками, но относился к ним с довольно добродушной иронией, тем более что сам был погружен в математику, а лишения переносил легко как по молодости, так и по убеждению. Как-то раз он сказал мне, что по политическим убеждениям он анархо-синдикалист. Отвращение к мещанскому благополучию было в нем сильно до конца его дней.

Еще маленьким (мне было года четыре) я помню такой случай. Мы жили на ул. Щапова, в большой коммунальной квартире. У кого-то из соседей оказались старые, царские деньги, они попали к ребятам. Ребята затеяли играть в ГПУ — обыск, реквизиция. Когда папа узнал, что я играл в эту "игру", он пришел в неистовство. Закричал, что если так, то я ему не сын, что он немедленно отдаст меня в детский дом. Я страшно ревел, тем не менее мама меня молча одела (была зима). Не помню, как дело уладилось, но случай этот запомнил на всю жизнь, и с тех пор ни в ГПУ, ни с ГПУ не играю.

Страшные 37–38 годы.... Как это ни странно, в нашем доме не чувствовалась та атмосфера ужаса, о которой рассказывают в воспоминаниях о тех годах. К нам приходили родственники репрессированных, рассказывали о своем горе, родители их сочувственно выслушивали. Иногда папа делал попытки помочь, понимая, что не может сделать много. Например, в инженерно-строительном институте работал проф. П.Д. Кушников (зять известного казанского физика Гольдгаммера), он прочел по просьбе студентов несколько лекций по теории относительности. Партбюро придралось к этому (все относительно? и справедливость марксизма-ленинизма?), и началась открытая травля Кушникова. Папа написал в президиум АН просьбу разобраться, Кушников ездил в Москву, откуда дал телеграмму: "Реабилитирован полностью". Конечно, через несколько месяцев его посадили.

Сходную историю, где папа тоже принимал участие, рассказывает Е.К. Завойский в своих воспоминаниях. Помню еще, что когда арестовали бывшего ректора нашего университета Н.З. Векслина, с дочкой которого я учился в одном (третьем) классе, родители взяли меня и пошли к его жене выразить свое сочувствие. В начале 38-го года в Москве арестовали маминого брата, папа приехал в Москву и пришел к ним как раз в момент ареста. НКВД звонило в Казань и наводило справки о папе. Вернулся папа в Казань, и они с мамой сейчас же уехали в Москву, чтобы как-то поддержать тетю Мери, жену арестованного, и пробыли там месяц, ходя по тюремным очередям и т. п. Меня же, больного (с воспалением среднего уха) оставили одного на домработницу, ничего мне, разумеется, не объяснив. Объяснений не было и потом (я лишь случайно узнал через год об аресте дяди Шуры), но, вернувшись, они привезли мне роскошные подарки, какими меня, вообще говоря, в детстве не баловали.

Тем не менее у нас дома и в это время не было атмосферы постоянного страха, ожидания ареста (папа довольно наивно говорил, что тюремное заключение ему не страшно, так как у него всегда есть математические проблемы, над которыми он может размышлять). Но отношение к НКВД было, как теперь говорят, однозначным: отвращение и ненависть. Услышав об очередном аресте, папа принимался быстро ходить или бегать по квартире с искаженным от гнева лицом, что-то бормоча сквозь зубы; мама тщетно пыталась его успокоить, видимо, боясь, чтобы он не выдал себя открытым и бесполезным поступком. Понятно, что такое отношение даже без слов передавалось мне.

Теперь я хочу рассказать о папе как о преподавателе и лекторе. Я уже упоминал, что в молодости он имел неважную репутацию как преподаватель. Вот что вспоминал о нем проф. П.А. Кузьмин, бывший много лет зав. кафедрой механики в казанском авиаинституте: “— В 1929 году алгебру читал у нас Н.Г. Чеботарев. Он начал курс с теории определителей. Вряд ли Н.Г. готовился к лекциям — не по недостатку добросовестности, но по склонности к экспромтам. Читал с вдохновением, держался раскованно: садился верхом на стул, подкидывал в руках перочинный ножик на цепочке. Мог неожиданно отбежать к окну, затем с типичным возгласом: “А-о-о!” подбежать к доске, завершая доказательство. Сильно перемазывался мелом.” Я слушал два папиных курса, будучи студентом: теорию функций комплексного переменного и теорию Галуа. Первый из них был, на мой взгляд, прочитан хорошо, а второй — отлично. Но, понятно, мое знакомство с папиным преподаванием началось намного раньше.

Папа не торопился обучать меня математике раньше времени. Я слышал много терминов и иногда спрашивал, например, что такое предел? Папа говорил: “— Вот ты бежишь, а я тебе — предел!”, и он останавливал мой бег рукой. Позже папа рассказывал мне, что у одного математика был маленький сын. Однажды к ним домой пришел экзаменоваться студент, получил задание .... Вдруг входит мальчик лет пяти, смотрит на листок студента и спрашивает: что, не получается? — Нет. — А Вы попробуйте взять по частям! — Студент попробовал — интеграл взялся. Моя мама потом сказала, что это все происходило у нас.

Когда я учился в 4–5 классах, папа иногда приглашал к нам в выходной нескольких моих одноклассников и решал с нами задачи, рассказывал теорему Пифагора, об извлечении квадратного корня, неопределенные уравнения. Перейдя в 6-ой класс, я заинтересовался математикой, за два года выучил школьный курс, решал много задач, а после 7-го класса, в лето перед войной и в начале войны, выучил аналитическую геометрию и основы анализа по учебнику Власова для пединститутов. После 8-го класса нас послали в совхоз и папа меня навестил — я об этом писал выше. Неделю я провалялся с ангиной в сарае, где мы жили, и папа рассказал мне вполне понятно теорему Дирихле о равномерном распределении простых чисел по арифметическим прогрессиям. Как он сумел это сделать, я не мог понять позже, когда в аспирантуре учил теорию алгебраических чисел и теорию полей классов!

Папа любил учить математике, он предлагал свою помощь буквально всем, кто в ней нуждался. Мне же, когда я заинтересовался математикой и освоил начала высшей математики, т. е. в 1942 г. и позже, папа читал “лекции на ходу”. Нам с ним приходилось работать на огороде; по дороге на огород, да и вообще когда мы ходили по улицам, он рассказывал о математике, рассказывал не понижая голоса, так что прохожие на нас оглядывались. В начале я стеснялся, потом привык; позже я понял, что это одесский обычай — громко разговаривать среди толпы. Таким образом, я “с голоса” выучил основы теории функций комплексного переменного и многие вещи из теории чисел. Конечно, дома я читал по этим предметам и книги, но основы были заложены папиными “лекциями”.

В середине 30-ых годов папа задумал написать учебник для школы по геометрии в духе реформ Ф. Клейна. Он предложил участие Я. Перельману, известному популяризатору, автору знаменитых книжек “Занимательная геометрия”, “Знаете ли вы физику” и т.п., но тот отказался. Папа постоянно возвращался к работе над этим учебником, и вчерне закончил его в больнице Склифосовского, откуда выйти папе было не суждено. Учебник получил высокую оценку специалистов, но издан не был, так как требовал доработки.

П.А. Широков основал казанскую школу геометров. Папа, будучи сам математиком широкого диапазона, получившим в разных областях математики глубокие результаты, имевший сильных учеников в различных частях бывшего Советского Союза (Украина, Грузия, Москва, Казахстан, Чувашия, конечно, Казань — список далеко не полон), не оставил после себя сильной школы[1], в частности, никого, кто продолжал бы продуктивно работать в области, которую он сам считал для себя основной: теория Галуа и теория алгебраических чисел.

И папа, и Петр Алексеевич сумели поддержать наш факультет на высоком научном и моральном уровне в самые для него тяжелые тридцатые — сороковые годы. И если папины ученики, окрепнув, выбрали свои пути в науке — это вовсе не плохо. И они помнили папу и как своего учителя, и как нравственный образец.

[1]Мы не хотим вступать в спор с автором, но по поводу отмеченного предложения позволим себе процитировать Анатолия Ивановича Мальцева: “…Н.Г. Чеботарев в 1928 г. окончательно переходит на работу в Казанский университет, где ему удается не только выполнить ряд блестящих работ, но и создать одну из главных советских алгебраических школ. В 30–40-е годы Москва и Казань были главными нашими центрами, где велись основные работы по теории групп Ли”. (А.И. Мальцев. Избранные труды. Том I. Классические алгебры. “К истории алгебры в СССР за первые 25 лет” Наука. Москва. 1976 г. стр. 476.) (Прим. Ю.Б. Ермолаева.)

Вот пример этого. В день своего 80-летия первый по времени папин ученик, крупнейший математик с мировым именем, Марк Григорьевич Крейн в интервью газете “Вечерняя Одесса”, говорит:

“Еще вопрос, стал бы я дальше заниматься математикой, если бы не Николай Григорьевич Чеботарев? Это не только замечательный ученый, но и необыкновенной души человек. Он заинтересовался моей работой, взял к себе, помог подготовиться и поступить в аспирантуру”.

— На стене, отмечает корреспондент газеты, висит портрет Н.Г. Чеботарева, и, рассказывая о своей жизни, Марк Григорьевич нет-нет да и обернется к нему, как бы призывая в свидетели своего бывшего учителя, своего лучшего друга.

— Благодаря Николаю Григорьевичу я успешно закончил аспирантуру, полюбил алгебраическую технику, механику, научился связывать сложные математические задачи с механическими соображениями”.

Ноябрь-декабрь 1993

ПИСЬМА И ВОСПОМИНАНИЯ *

Ниже приводятся фрагменты из рукописей и писем Николая Григорьевича Чеботарева, а также из воспоминаний людей, знавших его. Они содержатся в архивах Н.Г. Чеботарева и В.В. Морозова. Мы выражаем нашу благодарность Г.Н. Чеботареву и Н.П. Заботиной за возможность ими воспользоваться. Точные даты писем в большинстве случаев, к сожалению, не известны. По словам Григория Николаевича, письма его отца относятся к концу тридцатых — началу сороковых годов. Мы постарались расположить записи по "темам", но тем не менее они носят несколько разрозненный характер. Однако, нам они кажутся интересными (даже если они спорны) и мы приводим их в качестве дополнения к очерку В.В. Морозова о Николае Григорьевиче и с той же целью, которую обозначил в этом очерке В.В.: сохранить, насколько возможно, живым облик этого весьма замечательного человека.

Из архива В.В. Морозова: "Заметки к биогр. НГЧ"

Мария Александровна: когда НГ уезжал за границу, для него собирали все деньги, какие были, я же оставалась совсем без денег. Теперь я не могу понять, на что же я, собственно, жила тогда. Мы совсем не имели представления о том, что можно занимать деньги и жить в долг. . .

На Цюрихский съезд НГ попал неожиданно. Туда была составлена делегация — Александров и Кольман.

> Кольман в то время делал карьеру на диалектике в математике; как рассказывал НГ, он на съезде привел западных математиков в изумление, сообщив им, что у них в математике — кризис, о чем они сами, видимо, догадаться не могли. Его быстрое восхождение оборвалось после выпуска им "знаменитой" книги "Предмет и метод современной математики", славной более всего

*Сб. Николай Григорьевич Чеботарев/под ред. Ю.Б. Ермолаева. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. — С. 69–85.

> тем, что начальные буквы глав ее составляют посвящение “моей Катинке”.

Но в последний момент пришло требование, дабы НГ немедленно явился в Москву. В КГУ денег на командировку не было и НГ выдали чек на банк, предоставив получать деньги, как знает. После неудачной попытки НГ вернулся к М.А.: “Пойдем вместе, без тебя ничего не выйдет, только нужно шикарнее одеться!” (Только НГ смог бы сказать так — кому? — М.А.!). М.А. надела какую то старинную шляпку и, приняв, таким образом, шикарный вид, отправилась с НГ в банк (НГ, как всегда, когда ему приходилось хлопотать о себе, поник весь и сложил руки — последнее в буквальном смысле). После разговоров там и тут они попали к управляющему; говорила М.А., а НГ присутствовал; наконец управляющий сказал НГ: “А у вас адвокат хороший” и дал свою визу.

> Этот интересный прием и я испытал на себе: когда человеку необходимо нужно было выдать деньги, а в кассе их не было, выдавали чек на банк. Легковерный гражданин расписывался в получении чека и мчался в банк, думая, что чек — те же деньги (иллюзия, возникающая при чтении западных романов), а в банке ему отвечали, что денег нет. Если бедняга начинал уж очень сильно кучиться, его направляли к управляющему. Так было и со мной — но на мое счастье управляющий оказался отцом одного незадачливого (по математике) студента КИИКС, он знал мою фамилию и без разговоров дал визу.

Из рукописей Н.Г.

...И когда настало время нашему поезду коснуться своими колесами почвы благодатной Швейцарии, наступила тьма, и продолжалось так ровно две минуты и девятнадцать секунд. Ибо мы проезжали туннель. И когда показался свет, до нас донеслись звуки дивной музыки. И спросили друг друга мои соседи: что означает эта музыка? Не едет ли с нами тот, кому мы не достойны развязать шнурки от ботинок? И тогда я открылся им. И они ужаснулись мне и спросили: неужели Вы и есть тот советский математик Чеботарев, который произвел в математике революцию, подобную той, которую Ваш вождь Ленин произвел в политической жизни Вашей страны? Знайте, что в честь Вашего приезда каждый кантон прислал свой наилучший оркестр к границе Швейцарии. Но я приказал им молчать, доколе мы не вступим в пределы Цюриха, заветной цели моего путешествия. И когда наш поезд остановился на твердом грунте Цюрихского вокзала, мы увидели большое стечение народа. И был впереди толпы некий человек на белом коне, в драгоценном одеянии. Ибо сам мэр города Цюриха выехал приветствовать меня. И тогда я обратился к мэру и сказал ему:

— Знайте, что наступила пора, и вот приехал на Ваш съезд в Цюрих я, знаменитый математик Казанского университета Николай Чеботарев. Знайте также, что я призван ликвидировать идеализм как класс на базе внедрения в математику основ диалектического материализма. Знайте, наконец, что во главе нашего Университета стоит Носибер Векслин, самый знаменитый из всех директоров всех существующих на свете университетов, которому предстоит участвовать в президиуме Менделеевского съезда.

И мэр ужаснулся мне, и все бывшие с ним ужаснулись мне. И вот взяли меня на автомобиль, лучший автомобиль города Цюриха, и привезли меня туда, где происходил съезд. И спросил меня председатель съезда: не Вы ли тот самый который? И я ответил ему: я и есть тот самый который.

И содрогнулись в душе своей бывшие на съезде идеалисты, которые примешивали к математике поповский дурман, и приступили ко мне, и спросили меня: неужели исполнилась мера дней наших, и вот возмездье ждет нас за дела наши? И я ответил им: еще не пришло время мое. Пока не поздно, покайтесь и отрекитесь от дел Ваших. Но скоро наступит время, когда взвешены будут дела Ваши, и воздано будет Вам по делам Вашим. И Вы будете вычищены из вузов без права поступления в вузы. И никакой пощады не будет дано Вам, ибо велик вред, содеянный Вами.

И возликовали бывшие на съезде материалисты, и приступили ко мне, и пребыли со мной до конца съезда.

Из письма Н.Г. (*3.7.1945*)

Многоуважаемый Михаил Ильич!

По-видимому, высказывания, которые Вы хотите приписать мне, составляют тезисы Вашей диссертации. Слышать их, как принадлежащие мне, Вы не могли, так как каждый, кто хоть немного меня знает, никак не сможет представить меня высказывающим такого рода мыли. Эти тезисы обрисовывают "общепринятое" мнение об образе ученого; боюсь, что такого рода ученые в действительности или не существуют, или во всяком случае, крайне редки. Если вы хотите провести эти тезисы во что бы то ни стало, то поищите для них более подходящие объекты; но какую научную ценность будут представлять тезисы, для которых надо подыскивать объекты?

Основная Ваша ошибка состоит в том, что Вы пытаетесь для образа жизни и мыслей ученого найти трафарет. В действительности же типов ученых так же много, как пород растений. Вы описываете нежную розу, которая для своего произрастания требует подпорок, удобренной почвы, поливки и т.п. Наша же суровая действительность воспитала скорее чертополохи, дающие грубоватые, но красивые цветы при всяких условиях. Что бы было с нашей наукой, если бы наши ученые могли работать только при условии тишины или "не громкой, но хорошей музыки" в своих кабинетах? Я принадлежу к старшему поколению советских ученых, сформировавшихся в условиях гражданской войны. Свою лучшую работу я обдумывал, нося воду из нижней части города (Пересыпи в Одессе) в верхнюю, или нося ведра с капустой на базар, где моя мать ее продавала и тем прокармливала всю семью. Моя работа по поверхностям переноса была написана в Москве в 1924 году, когда я жил в 2 комнатах с большой семьей родственников или в общежитии, где в комнате жило 4 человека. А работу по проблеме резольвент (1930–31 годы) я написал, имея 6-ти часовую педагогическую нагрузку в день без отдыха (тогда в вузах была "непрерывная неделя"). Это были мои лучшие работы первого периода, и я уже приобрел достаточную известность, поскольку в следующем, 1932 году, меня пригласили на международный съезд прочесть обзорный доклад. В военное время я тоже недурно поработал, ночуя ежедневно в дежурной комнате в университете, поскольку в нашей квартире лопнула отопительная система, и температура была -10.

Условия работы следующих поколений были еще тяжелее. Общежития никак не давали уединения и тишины. А стояние в очереди за обедом? А между тем не кто иные как все эти поколения составили славу советской науке. Они работали гораздо лучше, чем их дореволюционные предки и притом в несравненно более тяжелых условиях. Не знаю, что было бы, если бы нас с самого начала поместить в условия ваших “тихих кабинетов”. Это Ваше дело — исследовать этот вопрос. Думаю, что, после прожитой в бивуачных условиях жизни, я бы не мог вынести описываемой Вами регулярной жизни.

Из архива В.В. Морозова: “Заметки к биогр. НГЧ”

Я не решился привести одно высказывание НГ: “Математика — чтобы избранным развлекаться, а остальных водить за нос”.

“Геометрия”, — говорил НГ, — “это алгебра, в которой не пишут знака суммы”.

Из рукописей Н.Г. (*из письма*)

Когда мне говорят, что культура страны определяется ее экономикой, мне хочется сформулировать наоборот: тем, что остается от экономики, запасом досуга у населения, его тяготением к тому, что не надоело, как предмет повседневного обихода. Точно так же и с отдельными людьми: его вкусы и эстетические потребности определяются тем, чего он не видит каждый день при своих профессиональных занятиях, хотя бы эти занятия составляли основное призвание в жизни.

Я хочу поговорить о своем отношении к красоте и потому прежде всего расскажу о своей профессии и о своем отношении к ней. В математике красота играет громадную роль. Не математик может убедиться в этом внешним образом, перелистывая математические работы и видя на каждом шагу выражения “изящный вывод”, “элегантная теорема” и т.п. При этом споров об изяществе не бывает, так что, по-видимому, вкусы математиков более или менее совпадают. Красота в математике идет рука об руку с целесообразностью и экономией мысли: мы редко называем изящными рассуждения, не приводящие к законченной цели или более длинные, чем это представляется необходимым.

Я представляю собой типичного эстета, скорее строгих форм, чем импрессиониста, и скорее дилетанта, чем глубокого исследователя. У меня нет исследований, которые бы пролагали в математике новые пути и открывали бы новые области. С другой стороны, нет такой области, в которой я бы чувствовал себя большим специалистом: мои знания касаются довольно многих областей, но они не исчерпывающие, а сводятся только к общему знакомству с предметом и методом и к схватыванию главного. Мои работы редко возвращаются к старым темам, и их тематика весьма пестра. Моя же ценность в математике состоит в том, что я берусь за проблемы, которые безуспешно пытались решать другие, и решаю их, пользуясь для этого часто неожиданными приемами, заимствованными часто из других отделов математики. Таким образом, я чаще привожу в законченный вид отделы математики, чем начинаю их.

Первым по времени и, пожалуй, произведшим наибольшие изменения в структуре отделов математики (в данном случае теории алгебраических чисел) был мой результат по нахождению плотности множества простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок (1922). Этот результат не удалось получить Фробениусу, который в 1896 году развил всю теорию простых чисел, принадлежащих к классам подстановок, но не мог получить окончательного результата, хотя энергично добивался его и в попытках создал весьма важную теорию групповых характеров. Я добился этого более простым путем: присоединил к полю большое количество корней из единицы. Мой метод, который немцы назвали Kreiskörpererweiterung, дал возможность Артину (нем. мат.) доказать свой общий закон взаимности, который коренным образом перестроил теорию полей классов (Klassenkörper). По поводу этого метода со мной за границей произошел такой курьезный случай. При мне немцы заговорили о каком-то Kreiskörpererweiterung. Я спросил у них, что это такое, сказав, что никогда не слыхал об этом. Немцы сделали удивленные лица и сказали, что ведь я сам придумал этот метод. Он в их руках так изменил свою форму и терминологию, что я его не узнал.

Второй случай, связанный с весьма небольшим результатом, но очень характерный для моего подхода к проблемам, произошел со мной в 1925 году за границей. В Геттингене я познакомился с неким Островским, бывшим киевлянином и учеником Граве, который, как еврей, должен был учиться за границей. Теперь он профессор Базельского Ун-та. Это был очень мрачный, угрюмый человек, который держал меня на положении бедного родственника. Когда я говорил ему по математике глупости (я часто высказываю предположения, хорошенько не обдумав: я называю это "мыслить приближенно"), он шокировался и давал мне понять, что разговор останется между нами тайной. Вообще подчеркивал, что я —"деревня". Ему понадобилось для его исследований по теории аналитических функций (отдел, весьма далекий от алгебры и теории чисел) показать, что все миноры Вандермондова определителя, составленного из корней единицы, не равны нулю. Трудность вопроса состояла в том, что эти миноры являются комплексными числами, а потому про них нельзя было утверждать, что они положительны или отрицательны. Самому Островскому удалось доказать свое утверждение для миноров трех низших и трех высших порядков. Я же в Геттингене как раз возился с определителями подобного вида. Поэтому способы их преобразования стояли у меня перед глазами. Но вместо установления неравенств мне пришло в голову применить чисто арифметический прием — узнать, на какую степень простого числа делится каждый минор. Эта мысль довольно быстро привела меня к цели. Островский говорил об этом решении задачи, что он не занимался никогда теорей чисел и что ему бы никогда не пришло в голову употребить прием, столь чуждый его основной теме. Помещая это решение в свою статью, он несколько раз повторяет по его адресу комплименты. И в самом деле оно удовлетворяет требованиям математической эстетики.

Замечу кстати, что мне никогда не приходилось сталкиваться с недобросовестностью среди математиков, а наоборот, меня всегда поражали их исключительная щепетильность и доброжелательное отношение.

К такого рода проблемам относится задача по квадрируемым луночкам. Эта задача — из теории Галуа, т.е. по моей официальной специальности. Ее поставил в 1847 году Клаузен, в 1903 году продвинул крупный математик Ландау, а в последнее время в ней копался незначительный болгарский математик Чакалов. Сама по себе она не представляет интереса, но мне при составлении книги понадобился пример, и я стал смотреть, как бы упростить исследования Чакалова. И решил половину всей проблемы. При этом даже нельзя сказать, что я пользовался чем-нибудь существенно отличным от метода Ландау и Чакалова. Только несравненно глубже копнул.

В январе–феврале 1938 года я окончательно доделал теорию представлений простых групп Ли, доказав, что в полупростых группах подгруппы максимального порядка должны быть регулярны. Здесь результат был получен самым простым, почти детским способом, и прямо непонятно, как он не пришел в голову Картану, который наметил всю проблему в 1894 году. Но я имею от Картана письмо, где он признает, что я "весьма простым образом заполнил пробел в теории представлений". Правда, чтобы выдумать этот простой вывод, я бился около двух месяцев.

Наконец, упомяну еще о "неоднородной теореме Минковского", для которой я получил в 1934 году грубый результат $2^{-n/2}$. Недавно оказалось, что в зап. Европе в 1937 году "впервые" получен несравненно более грубый результат, хотя значительно более сложными и "учеными" средствами. Это очень яркий пример торжества дилетантизма над углубленным научным изучением вопроса (я в этой области никогда не работал и поэтому имею право считать себя дилетантом). Вообще дилетанты дают для науки гораздо больше, чем мы это себе представляем. Я уверен, что если бы наука (какая угодно) не принимала особых мер для своей недоступности (научная терминология, предъявляемые к сочинениям традиционные требования относительно цитат и т.п.), а наоборот, стремилась бы путем популярных сочинений стать ближе к широким слоям населения, то она продвигалась бы несравненно быстрее. Мы, математики, в этом деле грешим меньше других. Я приведу выдержку из сочинения молодого немецкого профессора Крулля "Эстетический способ рассмотрения в математике": "Да, как видите, мы опять попадаем в точку, где мы математики болезненно чувствуем нашу изолированность. Чем больше мы сами вдохновляемся красотами математики, тем сильнее мы сожалеем, что мы можем дать принять участие в этом наслаждении столь немногим. Однако утешение мы имеем как раз от школы абстрактной математики: чем яснее и прозрачнее мы ведем наше изложение, тем мы делаем его по необходимости более понятным, и подумайте, что 400 лет тому назад арифметические действия были трудным искусством! Меланхтон никогда не доверял среднему студенту действительное проникновение в тайны вычислений с дробями. Теперь же этими вещами должен овладевать школьник. Может быть, когда-нибудь, рано или поздно, мы придем к тому, что, например, красоты высшей арифметики, о которых я Вам в течении моей речи давал некоторые намеки, сделаются доступными всякому образованному человеку. Эта мысль может показаться Вам утопией, даже, может быть, такова она и есть. Мне же она дает утешение всякий раз, когда я с болезненным сожалением констатирую, что я не могу дать своим лучшим друзьям точного представления о природе очарования, в силу которого я всей душой предан математике". И это для нас, каждый из которых испытывал в той или иной степени нечто подобное,— не голая фраза. Мы стараемся втянуть в математическую жизнь школьников, организуя олимпиады. Мы стараемся продвинуть способную молодежь, даже (без среднего образования) если она не имеет надлежащего образовательного ценза (я провел в аспирантуру двух математиков даже без среднего образования, и теперь один из них — лучший профессор на Украине, а другой уже защитил докторскую диссертацию. А мой учитель Граве. Как он упорно и самоотверженно боролся с академическим средневековьем!

Интересно, что специалисты в моей области считают меня чуть ли не самоучкой и во всяком случае не эрудированным ученым. В то же время более широкие математические круги чуть ли не выставляют меня примером академического хорошего тона. Был такой случай. Я как-то послал решение задачи, опубликованной математиком-любителем Цейцом (директором банка). Вскоре Цейц умер, и в его некрологе написали, что хотя он и любитель, но выставленные им задачи решались, напр., Чеботаревым.

У меня есть две работы с самостоятельно выбранными направлениями и с довольно широкими перспективами. Но в обеих я продвинулся недалеко. Чтобы закончить их, нужно еще несколько сильных ударов. Я думаю, что мне недостает внутренней уверенности в правильности и важности их направлений. Когда я работаю по чужому направлению, то у меня является чисто спортивное желание взять рекорд. А здесь — надо быть слишком уверенным в себе, чтобы убедить других, что в избранном направлении можно получить интересные вещи. Два этих направления — поверхности переноса и проблема резольвент.

Таким образом, эстетические эмоции доставляются мне моей основной профессией, так что для других видов красоты у меня нет потребности. Кроме того, красота в математике всегда имеет какую-нибудь идею, вносит какую-нибудь рационализацию. В подавляющем же большинстве других видов эстетики мы видим скорее обратное, особенно в эстетике бытового порядка. В убранстве комнаты часто вопросы удобства расположения вещей тормозятся соображениями: а будет ли это красиво? Из-за эстетики приходится отказываться от подвешивания к стенам удобных полок, ящиков и т. п., так как они некрасивы. Особенная пошлость этого рода наблюдается в архитектуре, где "творцы" выбирают стиль здания, рабски копируя старину, и в соответствии со стилем назначают число и расположение окон, лестницу и т.п., нисколько не сообразуясь с удобствами тех, кто будет жить в этом здании.

Особенной остроты конфликт между эстетикой и рациональностью происходит в вопросе об одежде. ...Мне говорили наши студентки, что ректор и деканы преследуют тех из них, которые ходят на занятия в спортивных костюмах, останавливают в коридорах и делают внушения в самом оскорбительном тоне.

...я всегда чувствую большую неловкость, когда в мою большую квартиру приходят люди, сами ютящиеся в большом числе в одной комнате. Эта неловкость бы удвоилась, если бы вдобавок наша квартира была роскошно обставлена.

Остаются области искусства, в которых эстетика играет определяющую роль: литература, живопись, музыка. В них, кроме музыки, отсутствует (или почти отсутствует) элемент подлинного творчества, т. е. создание существенно новых образов. В большинстве произведения искусства копируют природу и человеческие отношения так, как они есть. Прогресс в искусстве состоит или в новом комбинировании уже известных переживаний, или в улучшении техники воспроизведения природы. Небольшой элемент творчества состоит или в стилизации, т. е. искажении восприятия и впечатления от давно знакомых предметов (напр., японская живопись), или в попытках создать то, чего нет (напр., картины Чюрлениса). Но, создавая то, чего нет, нужно хоть сколько-нибудь убедить, что оно в чем-нибудь лучше и интереснее того, что есть. Этого же никогда не делается. Последнее относится и к музыке. Для сочинения музыкальных произведений существуют более или менее твердые правила. Но почему нужно соблюдать именно их, а не что-нибудь другое, этого никто из музыкантов не знает. Если они говорят, что правила созданы веками и породили величайшие произведения музыкальных классиков, то такой аргумент в их пользу, если его принять, опасен тем, что оставляет музыкальную культуру на какой-то традиции, в данном случае на стиле европейской музыки. Но музыка могла бы идти совсем по другой дороге, вплоть до изменения гаммы. Наш математик-музыкант В.Л. Гончаров математически ставит вопрос о наилучшей гамме, и приходит к выводу, что кроме европейской 12-тонной гаммы, должны быть хороши 31-, 41- и 53-тонная гаммы. Для их осуществления должен быть построен совсем другой рояль, и аккорды тогда не будут иметь ничего общего с нашими аккордами. Некоторое различие в гамме представляет восточная музыка.

В литературе авторы иногда наряду со своими наблюдениями жизни навязывают читателям свои мысли об улучшении человеческой жизни. Эти мысли бывают в подавляющем большинстве крайне убоги. Взять хотя бы колосса в литературе Л.Н. Толстого. Что он предлагает? Отказ от всех удобств, связанных с культурой, превращение жизни в тяжелое и скучное добывание средств, к существованию кустарным путем, а в семейном быту — возвращение к Домострою и превращение женщин в родильные машинки. Кому это нужно?

То же можно сказать и о стихах. Только здесь главным содержанием являются “мысли”, весьма образные, легко запоминающиеся, но, в сущности столь же убогие и главное бескрылые, не дающие ничего для конкретного действия.

Есть однако вид эстетики, который производит на меня потрясающее впечатление. Это эстетика человеческих поступков.

Здесь, кроме бескорыстности, как необходимого условия для эстетической ценности поступка, решающую роль играют смелость и быстрота находчивости. Что может выработать эти последние свойства? Ясно, что упражнения в смелости и находчивости.

К сфере отношений между людьми сказанное мною применимо в еще большей степени. Здесь нужно во время давать быстрый удар, одновременно учитывая возможную реакцию. Здесь нужен большой опыт. Если нужно — одновременно решительность и уверенность в тоне, соединенная со спокойствием и отсутствием рывков.

Из письма Н.Г.

Вообще когда я думаю, как мне поступить, я вспоминаю Кантовское правило: делать так, чтобы мой поступок мог служить общим правилом. ...Теперь я, впрочем, весьма часто отступаю от этого принципа.

Из воспоминаний о Н.Г. (А.В. Бирилев)

Не буду искать системы для изложения своих воспоминаний. Не смогу дать им и исчерпывающей полноты; может быть, я упущу много значительного и остановлюсь на мелочах, но я хотел бы, чтобы в моем изложении, хотя бы отчасти, мне удалось сделать живым образ ушедшего от нас и всеми любимого Николая Григорьевича.

Вот как еще до второго июля 47 года в квартире, где уже не было уехавшего в Москву хозяина, не было ни жены, ни сына Николая Григорьевича, пониженным тоном рассказывала мне их домашняя работница Катя.

“Ведь он какой, знаете. Привел однажды с улицы какого-то грязного, оборванного старика. Пахнет от него, ботинки рваные, грязные, мокрые. И прямо к себе в кабинет. Долго что-то разговаривал, потом вышел ко мне и будто стесняясь просит: принесите, Катя, ко мне в кабинет ему что-нибудь поесть и чаю. Я сказала: больно он грязный, Николай Григорьевич! Он только рукой махнул. Принес ему что-то из своей обуви, одеться дал, верно уж и денег тоже. А я пол в прихожей подтерла. Накормил, напоил и отпустил. Осень была, грязь. Ну, кто эдак возиться станет со стариком грязным, нищим”.

Учитель-математик М.П. Зинин рассказывал, как встретил, идя с Николаем Григорьевичем, какую-то девушку, поклонившуюся Н.Г. В руках у нее были два тяжелых чемодана. Ответив на поклон, Н.Г. спросил: “Куда это Вы?” — “На вокзал, профессор.” Но Н.Г. шепнул мне: “Не знаю, кто такая, знаю только, что была моей ученицей.” И добавил: “Ну, Михаил Петрович, видно, придется нам проститься. Нельзя же “гражданке” тащить на вокзал самой чемоданы”. Взял чемоданы и пошел в другую сторону.

От самого Николая Григорьевича слышал, что он как-то встретил незнакомую студентку с поношенными калошами в руках. “Я спросил: почему же у Вас калоши не на ногах, и Вы идете в туфлях? — Продавать несу, — ответила студентка. — А сколько Вы думаете за них взять? — Да, может быть, 300 рублей дадут. — Ну, так продайте мне за 300 рублей. — Девица сконфузилась: — Зачем же Вам калоши, женские? — Так мне они совсем не нужны, Вы их пока оставьте у себя, и носите. — А как же деньги? — А когда кончите курс, отдадите. — Насилу уговорил.” Таких случаев у Н.Г. бывало немало; он о них не рассказывал, разве случайно. Шутя, я как-то спросил его: — Всегда ли он успевает донести деньги до дому?

Кто из товарищей встречал у него отказ в помощи, и сколько студентов были обязаны ему в трудную минуту?

...когда была запрещена выдача иностранной литературы научным работникам, Н.Г., не допуская возможности такого ограничения ...подал мотивированную докладную записку на имя Президента Академии и Министерства Народного Образования, и заявил, что если научные работники не будут иметь возможности пользоваться иностранной литературой, он не будет в состоянии руководить работой Математического Института, и просит освободить его от этой должности. Был получен дипломатический ответ с извещением, что ректору по этому предмету послано соответствующее разъяснение.

Николай Григорьевич отнюдь не обладал свойствами умелого, делового администратора. Если он много сделал для Университета, для математического Казанского гнезда и сумел собрать вокруг себя преданных науке людей, даже не алгебраистов, то это явилось результатом его чистой преданности науке, любви к

Казанскому университету и совершенно неотразимой обаятельности. Можно сказать, что напротив, иногда было странно наблюдать, как неумело и даже как будто по-детски он выступал в некоторых личных вопросах.

Как глубоко захватывал Н.Г. интерес к людям, можно видеть из того огромного круга близких и далеких знакомств, которые имел Н.Г. ... Узнав от меня, о слепнущей старой женщине, одинокой и материально нуждающейся, и что ей могут помочь очки, которых в Казани достать было нельзя, он потребовал рецепт и на здешнем оптическом заводе, где он имел математические связи, получил для нее очки, и старая женщина свободно стала ходить по улице, чего делать раньше не могла. Смеясь, он говорил, что он хорошо умеет ставить банки. Оказалось, что он систематически ходил к какой-то старухе для этой цели.

Как прост был Н.Г., это поражало многих.

Из воспоминаний о Н.Г. (*Г.Мальковский, 12/П 1965 г.*)

Во время войны Н.Г. Чеботарев сам из патриотических побуждений (принести хоть какую-то пользу в эти тяжелые времена) участвовал почти во всех субботниках, в том числе и на разгрузке дров. Я лично два раза разгружал баржу на Волге с дровами вместе с Н.Г. Чеботаревым и мог видеть, каким он был неугомонным. Когда ему предлагали: "Николай Григорьевич, отдохните", то на это он отвечал, что он еще не выполнил норму и т.д.

... Например, я помню, как долго один раз не открывал Н.Г. заседание физмат-общества и когда ему был задан вопрос (кажется, задал его Кузьмин из КАИ): "Почему Вы, Н.Г., не открываете заседание?" На это Н.Г. ответил: "А я жду представителя пионерской организации". Конечно, сразу появился хохот и тут же выяснилось, что в то время, оказывается, было решено, что на заседании физмат-общества должны присутствовать представители общественных организаций. Пришел на заседание Ким Р.Ц., а Н.Г. все заседание еще не открывал, так как Ким представлял тогда только партийную или комсомольскую организацию.

Я очень хорошо помню и такой анекдотический случай. Было указание из Министерства, чтобы каждый ученый сотрудник вуза указал свое рабочее место. Так вот, когда по просьбе И.А. Дюкова лаборантка пошла на квартиру к Н.Г. Чеботареву, чтобы уточнить его рабочее место, то Н.Г. Чеботарев тут же перед лаборанткой продемонстрировал, как он работает и где работает. Лег на кровать, повернулся, ногу удобно закрепил на задней части кровати и начал писать. Тогда лаборантка убежала, пришла к И.А. Дюкову и доложила, что Н.Г. Чеботарев над ней издевается и выслушать ее не захотел. Помню и серьезный разговор И.А. Дюкова и Н.Г. Чеботарева на эту тему в ректорате, где Н.Г. Чеботарев доказывал И.А. Дюкову, что более 50% научных трудов им написано в такой позе и что он 6 часов за столом в институте без работы сидеть не будет.

Из письма Н.Г.

Когда религиозный человек говорит с атеистом о необходимости существования религии, он обыкновенно приводит примеры того, как мало знает человечество о природе, о том, что, казалось бы, человеку необходимо знать в первую очередь, и на что наука до сих пор не может дать ответа. Если оба собеседника более интеллигентны, то религиозный отмечает, что и те небольшие знания, которыми наука располагает, не могут считаться незыблемыми: с течением лет или веков точка зрения меняется, и то, что раньше казалось несомненным или даже доказанным (как мы доказываем в экспериментальных науках?), теперь оказывается в корне неверным. Таким образом, наука в смысле достоверности своих знаний как будто не имеет перед религией никаких преимуществ.

В действительности наука стоит значительно ниже религии в смысле категоричности утверждаемых ею фактов. Здесь ничего не поделаешь: человеку даны слишком малые познавательные средства. Он может только наблюдать явления на частных примерах, и отсюда уже должен распространять свои выводы на все явления жизни. Такой перенос частных наблюдений на все явления в мире носит название *индукции* (наведения — перехода от частного к общему). Разумеется, логически он не вполне безупречен (мы, математики, никогда не считаем факт доказанным, если он только проверен на примерах, как бы много этих примеров ни было проделано); но для изучения природы другого метода нет, и приходится довольствоваться таким индуктивным методом, который плох не только логически, а часто и на самом деле подводит нас. Даже в таких наиболее “точных” науках, как физика и химия, нередко приходится отказываться от законов, которые веками считались бесспорными, а потом, с усовершенствованием экспериментальных приборов, оказывались несостоятельными (будем лучше говорить осторожнее — неточными). Например, закон Лавуазье о сохранении массы (= веса) вещества потерял свою точность при современном взгляде на атомы вещества, которые представляются чем-то вроде солнечных систем: в центре атома находится заряженное положительным электричеством *ядро*, вокруг которого вращаются отрицательно заряженные *электроны*, которые могут под влиянием внешних условий *менять орбиту* (т. е. перескакивать на большее расстояние от ядра) и даже совсем покидать ядро. В связи с этим оказалось, что масса (вес) атома находится в зависимости от электрического заряда, числа электронов вокруг ядра и размеров орбит. Были открыты так называемые *изотопы*, т. е. вещества одинаковой природы, но с неодинаковыми, хотя и близкими атомными весами. Например, изотопы хлора, а также *тяжелая вода*, т. е. вода несколько более тяжелого веса, присутствию которой в небольшом количестве в обыкновенной воде приписывается причина умирания тканей и организмов: попав в тканевую клетку, молекула тяжелой воды не может из нее выйти; клетка постепенно наполняется тяжелой водой, делается неактивной и умирает. Говорят, что в Америке выпускают бутылки с "легкой водой", т. е. водой, лишенной тяжелой воды, употребление которой дает долгую жизнь и предохраняет против старости. Таким образом, закон постоянства массы оказался поколебленным. Точно так же оказался поколебленным закон неизменности химических элементов (радиоактивные элементы; в последнее время удалось разложить кислород на азот и водород).

Обратим внимание также на характер получаемых в науке результатов. Эти результаты редко претендуют на вскрытие причин явлений или нахождение их "истинной сущности", как этого бы хотелось непосвященным. Они только указывают, что должно произойти при таких то и таких то условиях, и дают, таким образом, возможность предсказывать события. В лучшем случае они дают схему ("модель"), которая, будучи положена в основу объяснения явлений, объясняет в большей или меньшей степени совершенно наблюдаемые факты; часто при этом такие схемы дают возможность объяснить разнородные явления с одной общей точки зрения. К числу таких схем относится, например, описанное выше движение электронов вокруг ядра, которого никто, конечно, не наблюдает. Сюда же относится теория “боковых цепей” Эрлиха. Наконец, сюда же можно причислить более старое открытие всемирного притяжения, сделанное Ньютоном (конец 17-го века). ...

Но Ньютоновский закон тяготения не мог объяснить всех возмущений. В частности, ближайшая к солнцу планета — Меркурий — в течение 100-летия отклонилась на $43''$ от своего теоретически вычисленного пути. Это отклонение удалось объяснить Эйнштейну при помощи своего “общего принципа относительности”, согласно которому закон тяготения Ньютона есть только приближение (хотя и очень близко совпадающее) к действительному положению вещей.

Вообще можно сказать, что хотя наука и часто отказывается от своих достижений, но даже то, от чего она отказывается, объясняет и предсказывает много явлений, и довольно точно, и лишь повышающееся требование к точности заставляет от них отказываться. В биологических и социальных явлениях дело, конечно, обстоит хуже, но и там существует немало объясненных и предсказанных явлений.

В противоположность науке, религия вполне категорически и незыблемо делает свои утверждения.

При этом для того, чтобы заставить людей верить в них, применяются угрозы вечными муками на том свете, а часто и реальными наказаниями при жизни. По поводу такого способа убеждения прекрасно сказал академик Марков (математик) в своем “Исчислении вероятностей”:

“...ясно, что к рассказам о невероятных событиях, будто бы происшедших в давно минувшее время, следует относиться с крайним сомнением.”

И мы не можем согласиться с Буняковским, что необходимо выделить известный класс рассказов, сомневаться в которых он считает предосудительным.

В данном случае мое разногласие с Буняковским выходит уже из области математики и касается шаткой области желаний и личных интересов людей. Не вдаваясь в эту область, приведем здесь замечание Лапласа, по поводу одного парадокса Паскаля, которое можно найти в статье "De la probabilité des témoignages", помещенной во введении к его классическому труду "Théorie analytique des probabilités". Тот, кто обещает за доверие к своим утверждениям награду, а за недоверие наказание, не увеличивает таким обещанием, а уменьшает степень доверия к себе; если же размер обещаний становится безграничным, то степень доверия, какого они заслуживают, падает до нуля".

К этому же кругу вопросов нужно отнести вопрос об управлении миром, в частности, о так называемом "промысле Божьем". Наблюдаемые нами явления никак не подтверждают этого утверждения. Совершающиеся с людьми несчастья не находятся ни в какой связи с их моральными качествами; в борьбе обыкновенно побеждают более ловкие и более бесстыдные люди. Одним словом, Положение с промыслом вполне оправдывает слова С. Прюдона: "Единственным оправданием для Бога служит то, что его нет".

…какой нравственный облик стремится выработать религия в человеке? Основное требование, предъявляемое к человеку — это вера в Бога. Эта вера должна быть лишена всякого критического подхода: недаром апостол Павел рекомендовал: "в вопросах веры быть простым, как голуби, а в вопросах неверия — мудрыми, как змеи", а один из древних отцов церкви, Тертуллиан говорит:

"Credo, quia absurdum" (верю, *потому что* нелепо). Такая безграничная преданность догмату соответственным образом воспитывается. …Ценных же людей: изобретателей, исследователей, которые бы так или иначе двигали человечество вперед, такая система воспитать не может (средние века), так как она изгоняет критический дух и прививает вкус к шаблону (этому способствуют еще обряды).

Почему я так подробно останавливаюсь на ценности этических норм религий и особенно христианства? Потому, что весьма распространен взгляд на мифологию в религии, как на сказку, которая имеет целью в "символической" популярной форме сообщить людям, как они должны жить и поступать: так что вера в то, что в этой сказке все правда, необязательна для верующих людей. Так вот я имел целью показать, что и мораль этой сказки весьма несовершенна.

В детстве я был очень религиозным. В молодости я вполне осознал неправдоподобие того, чему учит религия, но держался за нее из этических побуждений. Уже будучи студентом, я прочел рассказ Короленко “Сократ”, который помог моему полному раскрепощению. Я рассудил, что никак нельзя вменять себе в заслугу легковерное отношение к неправдоподобным рассказам, и если меня за недоверие к ним посадят в ад, то это несправедливая религия, и стыдно даже ее придерживаться. Со стороны Бога было бы просто издевательством — обставить людей так, чтобы истина и способ ее узнавания были как можно более неправдоподобными, а потом наказывать людей за то, что они не поверили!

Из письма Н.Г.

. . . в основу всякого мнения или убеждения в общественно-политических вопросах, кроме накопленного опыта, кладется та или иная цель, к которой люди, разделяющие это убеждение, стремятся.

. . . К слову о будущем. Мне часто приходится слышать слово “современный” в ироническом смысле. Современность — это вся жизнь, это мост к будущему. Надо жить современным, воспринимать его лучшее и бороться с его злом. Но хаять и отрицать современное в целом — значит закрывать себе дорогу к будущему. И такое употребление слова “современный” в кавычках встречалось в каждую эпоху. Это во все времена делала реакционная прослойка, осуждаемая на отсутствие перспектив и вымирание.

П р и л о ж е н и е[*]

к статье “Из воспоминаний об отце” Г.Н. Чеботарева

Когда эта книга была уже в наборе, я получил[1] из архива АН СССР (ф.411, о.4а, No 49, л.6.) обнаруженный Н.Е. Завойской документ:

Х А Р А К Т Е Р И С Т И К А

Ч Е Б О Т А Р Е В Николай Григорьевич, профессор математики Казанского Государственного Университета, доктор математических наук и член корреспондент Академии Наук СССР; год рождения 1894, русский, б/п, по социальному происхождению сын председателя окружного суда, / отец был почетным гражданином– коллежский секретарь/, имеет за границей брата.

В Казанском Государственном Университете проф. Чеботарев Н.Г. работает с декабря 1927 года; за время пребывания в КГУ неоднократно противопоставлял себя общественным организациям Университета в подборе кадров, протаскивал в аспирантуру чуждых и отводимых партогранизацией людей / Меймана — сына крупного лесопромышленника и др./, что и проявляется у него и до настоящего времени. Преподавательскую работу проф. Чеботарев выполняет добросовестно, принимает активное участие в проведении математических олимпиад для учеников старших классов средних школ гор. Казани.

В кружках по изучению Марксизма–Ленинизма, организованных парткомом для научных работников, не принимал и не принимает никакого участия.

По своей идеологии проф. Чеботарев относится к реакционной части профессуры. Вследствие чего, выдвижение проф. Чеботарева в действительные члены Академии Наук — не желательно.

Партийная организация Казанского Государственного Университета не рекомендует проф. Чеботарева Н.Г. в действительные члены Академии Наук С.С.С.Р.

Директор КГУ проф. /СИТНИКОВ/

Секретарь парткома КГУ /Потапов/

---

[*]Сб. Николай Григорьевич Чеботарев/под ред. Ю.Б. Ермолаева. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. — С. 91–92.

[1]т. е. Ю.Б. Ермолаев.

Замечание редактора[1]:

Этот документ относится к 1938 году и, как говорится, комментариев не требует. Однако, нам очень не хотелось бы, чтобы он воспринимался как попытка кого-либо разоблачить или опорочить. Мы слишком мало знаем. Например, как тогда оформлялись характеристики (по принципу факультет затем университет или непосредственно ректорат-партком)? И, если "партийная организация университета" была против, то кто выдвигал Николая Григорьевича кандидатом в академики? Ясно одно, что внутренний конфликт, о котором пишет В.В. Морозов (см. стр. 35) действительно существовал и был достаточно серьезен.

[1]Ю.Б. Ермолаева.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АВТОБИОГРАФИЯ *

Н.Г. Чеботарев

§1. Школьные годы

Я определил свою будущую профессию — математику — довольно рано, еще находясь в младших классах гимназии. Помню, как еще в Елисаветграде (я переехал из Елисаветграда в Каменец-Подольск в 1907 г., перейдя в четвертый класс) сестра моей бабушки, тетя Маша, с убеждением говорила, что из меня выйдет математик. Может быть, эти ее слова сыграли роль внушения. С другой стороны, весьма вероятно, что к занятиям математикой меня толкали объективные обстоятельства. Дело в том, что согласно твердым воспитательным принципам моих родителей все наши действия, и в том числе развлечения, строго регламентировались. Математика была единственным убежищем, куда не мог проникнуть контроль старших и где я был себе полным хозяином. Всякая другая наука потребовала бы расходов на оборудование, а у меня карманных денег не было.

В четвертом классе я прошел почти весь учебник геометрии Киселева и решал большинство задач из смешанного отдела задачника Рыбкина. В пятом классе в моих занятиях существенного прогресса не было. Летом 1909 г., перейдя в шестой класс и живя в Крыму, где у моих родителей была дача, я услышал от одной старшей гимназистки о теореме Ферма (малой). В одну жаркую ночь, когда мы не могли спать из-за москитов, я доказал эту теорему. Мое доказательство состояло в разложении выражения $(a+1)^p - (a+1)$, использовании делимости биномиальных коэффициентов C_p^k на p и применении индукции от a к $a+1$. Это — хорошо известное доказательство. В это же лето (тогда я отбил себе почку и около месяца пролежал в постели) я изучил по учебнику алгебры Полякова логарифмы, бином Ньютона и неопределенные уравнения. Долго думал над законом следования простых чисел, но, конечно, ни к чему не пришел.

*Н.Г. Чеботарев *Собрание сочинений.* Т. 3, М.–Л., Изд-во АН СССР, 1950. — С. 92–163.

В шестом классе я соревновался по математике с Симой Гершманом, который был лучшим математиком в основном классе, в то время как я — в параллельном. Сима давал мне читать задачник Александрова (задачи на построения) и рассказывал мне о свойствах конических сечений, о которых он читал, кажется, в алгебре Маракуева. Я, услышав о свойстве директрисы эллипса и гиперболы, применил его к трисекции угла при помощи гиперболы с эксцентриситетом $e = 2$. Я даже придумал для этой цели прибор, который назвал трисектографом. Впоследствии я увидел свой способ изложенным в учебнике Адлера по геометрическим построениям.

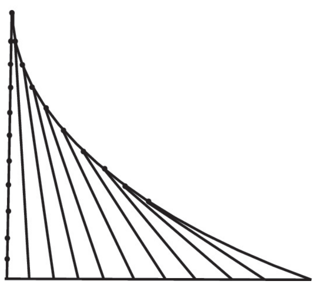
Тогда же у меня возникли идеи нескольких задач, для решения которых у меня не хватало знаний. Помню, я долго и бесплодно думал над выводом закона падения атмосферного давления с высотой (гипсометрическая формула), а также над задачей о погонной линии. Первая из задач у меня каким-то странным образом связывалась с задачей об арифметико-геометрической средней. Тогда я не знал, что все эти задачи были давно поставлены и решены. Я не имел возможности раздобыть какой-нибудь учебник по высшей математике, так как все курсы высшей математики, имевшиеся в Каменец-Подольске, были сосредоточены в гимназической фундаментальной библиотеке и находились в долгосрочной аренде у гимназиста Штаермана, бывшего двумя годами старше меня (впоследствии профессора механики в Киеве).

Весной 1910 г. я заболел экссудативным плевритом в довольно тяжелой форме и проболел до конца учебного года. Летом, по дороге в Крым, мы пробыли несколько дней в Одессе, где мне разрешили купить несколько книг по математике. Мы с отцом зашли в лучший в Одессе книжный магазин Суворина; я остался выбирать книги, а отец ушел, обещав через час зайти. Я облюбовал себе несколько книг по дифференциальному и интегральному исчислению. Однако, вернувшись в магазин, отец выразил сомнение, пойму ли я эти книги; мне было неловко оспаривать это сомнение, так как покупка этих книг требовала расхода со стороны отца; поэтому я отказался от выбранных книг и ограничился покупкой учебника аналитической геометрии Пржевальского (для кадетских корпусов) и статьи Лобачевского “О началах геометрии”, изданной с примечаниями Желтухина. Летом я прошел аналитическую геометрию, а статьи Лобачевского в этот год так и не мог понять.

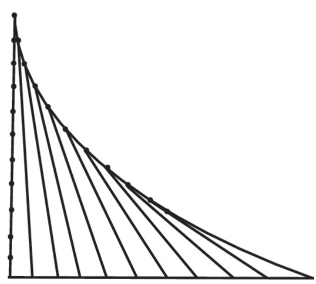
Осенью 1910 г. у меня систематически повышалась температура, и меня с матерью и братом повезли лечиться за границу, в городок Бордигера в итальянской Ривьере, где я основательно заболел воспалением легких. Весной, выздоравливая, я тратил все свое время на подготовку к экзамену в восьмой класс, так что математикой в том году мне заниматься не пришлось. Выдержав экзамен, я опять поехал на лето в Крым, купив в Одессе на этот раз 1-ю часть "Элементов высшей математики" Лоренца. Летом 1911 г. мои занятия математикой были весьма плодотворны. Изучив высшую математику по курсу Лоренца, я прочел там вывод гипсометрической формулы, а также получил возможность решить задачу погонной линии. Ее решение мне казалось весьма сложным: это было интегрирование дифференциального уравнения 2-го порядка. Поэтому, не вполне доверяя своему решению, я предпринял проверку своего результата, выражавшегося формулой

$$x = \frac{y^2 - a^2}{4a} - \frac{a}{2} \lg \frac{y}{a}, \tag{1}$$

при помощи построения по точкам. Представив себе движение поезда и велосипеда прерывным и приняв $a = 10$, я вычертил ломаную по схеме фиг. 1 и 2. Эти схемы отличались друг от друг тем, что согласно фиг. 1 первый скачок делает поезд (прямолинейный путь), а согласно фиг. 2 первый скачок делает велосипед (криволинейный путь). Ни одна из этих схем не дала удовлетворительного совпадения с траекторией, вычисленной по формуле



Фиг. 1

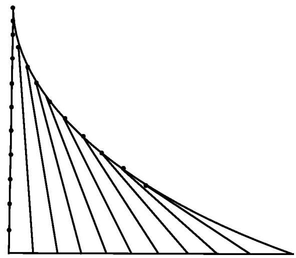


Фиг. 2

(1). Тогда я принял схему, согласно которой велосипед делает первый скачок, но величиной в половину клетки (фиг. 3). Эта схема совпала с вычислениями вполне удовлетворительно, и я счел свое решение проверенным при помощи такого "экспериментального" пути.

Другой подобного рода "эксперимент" был проделан мною над охлаждением горячей воды. Я наливал в стакан горячую воду, куда также погружал водяной термометр, и после того как ртуть в термометре переставала повышаться и начинала падать, я отмечал каждые 10 сек. показания термометра. С другой стороны, я вычислил кривую падения, исходя из закона Ньютона (скорость падения пропорциональна разности температур) и вычисляя константы из данных, полученных из моего стакана. Однако я не получил удовлетворительного совпадения и объяснил это тем, что термометр начинал охлаждаться, еще не успев принять температуру воды.

Кроме того, в это лето я одолел статью Лобачевского. Правда, я так и не сумел разобрать по этой статье вывода формулы для угла параллельности. Но, пользуясь этой формулой как данной, я научился выводить формулы, связывающие стороны и углы треугольников в геометрии Лобачевского, а также решать некоторые более сложные задачи. В частности, я заинтересовался вопросом о том, какая кривая получится в результате постепенного выпрямления окружности, а затем предельной окружности в плоскости Лобачевского. Будем безгранично увеличивать радиус окружности, оставляя ее все время касательной к постоянной прямой в постоянной точке M. Известно, что в плоскости Лобачевского в пределе получится не прямая, а отличная от прямой кривая, называемая "предельной окружностью". Эта кривая, наряду с прямой и окружностью, обладает свойством допускать скольжение вдоль самих себя. Этим свойством обладают также "кривые равных расстояний", т. е. геометрические места точек, отстоящих от прямой на одном и том же расстоянии. Я сделал догадку об общности аналитической природы всех этих кривых и задался целью найти уравнение, содержащее параметр, при одних значениях которого получаются окружности, а при других — кривые равных расстояний. Я решил не пользоваться декартовыми координатами, так как в плоскости Лобачевского их



Фиг. 3

нельзя определить естественным путем. Я предпочел полярные координаты, выбрав в качестве начала точку M, а в качестве оси — касательную MN (фиг. 4). Для нахождения уравнения окружности опустим из ее центра O перпендикуляр OK на MA (фиг. 5). В прямоугольном треугольнике OMK имеем

$$OM = R, \qquad MK = \frac{\rho}{2}, \qquad \angle M = 90^\circ - \theta,$$

откуда формула

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos A$$

(см., напр., Лукьянченко, Элементы неевклидовой геометрии. ГТТИ, 1933, стр. 51, формула IV) дает

$$\cos \Pi\left(\frac{\rho}{2}\right) = \cos \Pi(R) \sin \theta. \tag{2}$$

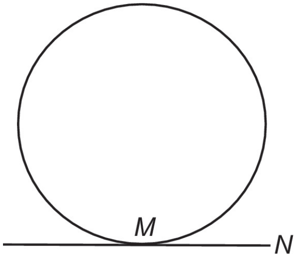
Для получения уравнения кривой равных расстояний воспользуемся соотношением между сторонами и углами четырехугольника Ламберта, у которого три угла прямые (фиг. 6):

$$\cos \alpha = \cos \Pi(a) \cos \Pi(b). \tag{3}$$

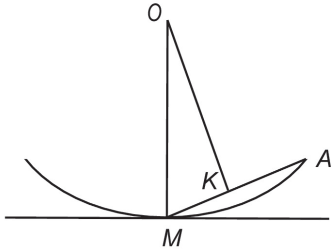
Это соотношение может быть выведено, если мы разделим 4-угольник диагональю на два треугольника и воспользуемся формулами для косоугольных треугольников (см. Лукьянченко, стр. 54–55, формулы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$).

Для составления уравнения кривой равных расстояний обратим внимание на то, что 4-угольник $MABN$ (фиг. 7) имеет осевую симметрию с осью KL; 4-угольник $MKLN$ ламбертов, и в нем

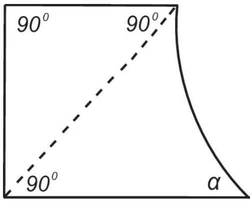
$$MK = \frac{\rho}{2}, \qquad MN = l, \qquad \angle M = 90^\circ - \theta.$$



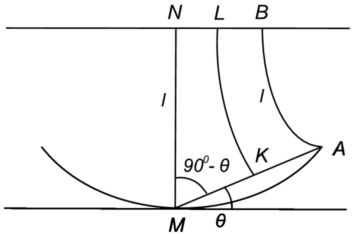
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Применяя формулу (3), получим

$$\cos \Pi \left(\frac{\rho}{2}\right) = \sec \Pi(l) \sin \theta. \tag{4}$$

Сопоставляя формулы (2) и (4), мы видим, что уравнение

$$\cos \Pi \left(\frac{\rho}{2}\right) = a \sin \theta \tag{5}$$

дает или окружность, или кривую равных расстояний, в зависимости от того, будем ли мы иметь $a < 1$ или $a > 1$. В первом случае для определения радиуса окружности надо положить

$$a = \cos \Pi(R);$$

во втором случае для определения расстояния l надо положить

$$a = \sec \Pi(l).$$

Эта работа, которую можно считать моим первым математическим результатом, впоследствии (в 1929 г.) была помещена в Журнале казанского студенческого математического кружка под названием “Формула геометрии Лобачевского”.

Зиму 1911/12 года я провел в Ялте, так как мое здоровье не позволяло мне вернуться домой и заниматься в гимназии. К весне 1912 г. я выдержал выпускной экзамен и был принят в Киевский университет, так как мой отец был переведен на службу в Киев. Мои родители удерживали меня от поступления на физмат, так как, с одной стороны, у них составилось преувеличенное мнение о его трудности, с другой стороны, им казалось весьма тяжелой профессия педагога. Но я вполне твердо решил сделаться математиком.

§2. Студенческие годы
(1912–1915)

На первом курсе университета я занимался главным образом учебными предметами. Летом при переходе на второй курс я перевел на русский язык бóльшую часть сокращенного учебника алгебры Вебера, и благодаря этому, с одной стороны, овладел немецким языком, а с другой — изучил теорию Галуа, которую профессор Д.А. Граве читал в курсе алгебры на 3-м семестре.

На втором курсе я принимал участие в семинаре, который в том году Д.А. Граве вел по алгебре. Темами семинара были конечные группы ортогональных подстановок и теория алгебраических функций. Я взял доклад по реферированию работы Фробениуса (J. für Math., **84**), где давалось параметрическое представление ортогональных матриц, и работы Чебышева “О непрерывных дробях”, где была построена ортогональная матрица, зависящая от нескольких параметров. Вопреки мнению Граве, который предполагал, что это представление дает самую общую ортогональную матрицу, я показал, что для этого в этом представлении недостаточно параметров.

На втором своем докладе я предложил простое доказательство теоремы Бертрана о границе индексов симметрической группы. Это доказательство впоследствии я включил в свои “Основы теории Галуа”.

Вместе с тем, начиная со второго курса, я занимался теорией аналитических функций (Goursat, t. 2; Burkhardt), а также теорией алгебраических функций, которую изучал главным образом с арифметической точки зрения. Прочитав статью Дедекинда–Вебера (Journ. tür Math., **92**), я долго читал книгу Гензель–Ландсберга, а также книгу Фильдса. Указанное мне Граве место из книги Жордана, где говорится о группе монодромии, дало мне мысль обосновать при помощи теории Галуа инвариантные свойства полей алгебраических функций. Существенное различие между полями алгебраических чисел и алгебраических функций состоит в том, что для первых область рациональности фиксирована, в то время как для вторых мы можем выбирать область рациональности по произволу, и от этого выбора зависит группа Галуа, которая, таким образом, в своем первоначальном определении не инвариантна относительно бирациональных преобразований. Я сделал попытку (вряд ли удачную) определить группу преобразований (бесконечную), инвариантную относительно бирациональных преобразований. Я надеялся, в частности, получить отсюда группу так называемых преобразований в себя, которая, как известно, при ранге $p > 1$ конечна. Я воспроизвожу текст листочка, сохранившегося у меня как воспоминание об этой попытке.

"Пусть поле алгебраических функций ранга $p > 1$ определяется уравнением

$$f(\overset{n}{x}, \overset{m}{y}) = 0. \tag{1}$$

Зададим переменной x некоторое трансцендентное значение x (или в кронекеровском смысле слова, или в обычном понятии трансцендентного числа, — все равно). Этому значению соответствуют m значений переменной y:

$$y_1, y_2, \ldots, y_m. \tag{2}$$

С другой стороны, значению y_1 соответствуют n значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{3}$$

Значению x_2 пусть соответствуют

$$y_1' = y_1, y_2', \ldots, y_m'. \tag{4}$$

Переход от точек

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_1, y_m) \tag{5}$$

к точкам

$$(x_2, y_1'), (x_2, y_2'), \ldots, (x_2, y_m'), \tag{6}$$

где мы заставим x_1, а с ним и остальные числа, пробегать всевозможные числовые значения, будет, очевидно, автоморфным преобразованием. (Примечание: Это неверно!) Ряд других автоморфных преобразований мы получим при помощи подстановок $[x_1, x_3], \ldots, [x_1, x_n]$, а также тех подстановок, которые будут переводить x_1 в значения x_*, соответствующие $y_2, \ldots, y_m, y_2', \ldots, y_m'$ и другим значениям y, получаемым попутно.

Пусть число автоморфных преобразований конечно, т. е. после конечного ряда операций значения x и y начнут повторяться. Тогда мы получим полную систему значений x и y:

$$x_1, x_2, \ldots, x_M, \tag{7}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_N, \tag{8}$$

так что каждому числу ряда (7) соответствует m чисел ряда (8), а каждому числу ряда (8) соответствует n чисел ряда (7).

Решим теперь такой вопрос. Если нам дана полная система

$$y_1, y_2, \ldots, y_m, \tag{2a}$$

то каким значениям x, кроме x_1, она соответствует? Напишем уравнение (1) так:

$$f_0(x_1)y^m + f_1(x_1)y^{m-1} + \cdots + f_m(x_1) = 0, \tag{9}$$

где $f(x)$ суть целые функции от x. Пусть уравнение

$$f_0(\xi)y^m + f_1(\xi)y^{m-1} + \cdots + f_m(\xi) = 0 \tag{10}$$

имеет корнями тоже систему (2a). Тогда должно быть

$$\frac{f_1(x_1)}{f_0(\xi)} = \frac{f_1(x_1)}{f_1(\xi)} = \cdots = \frac{f_m(x_1)}{f_m(\xi)}, \tag{11}$$

или

$$\begin{array}{c} f_1(\xi)f_0(x_1) - f_1(x_1)f_0(\xi) = 0, \\ f_2(\xi)f_0(x_1) - f_2(x_1)f_0(\xi) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(\xi)f_0(x_1) - f_m(x_1)f_0(\xi) = 0. \end{array} \tag{12}$$

Все уравнения (12) имеют общим делителем $\xi - x_1$. Пусть их общий наибольший делитель есть $R(\xi, x_1)$. Тогда корни уравнения

$$R(\overset{r}{\xi}, x_1) = 0 \tag{13}$$

будут искомыми значениями x. Люрот доказал (Math. Ann., Bd. 9; Weber, Bd. 2, стр. 473), что уравнения (12) не имеют кратных корней; поэтому системе (2a) соответствует система

$$x_1, x_2, \ldots, x_r = X_1. \tag{14}$$

Эта система должна быть частью системы (3) и аналогичных ей систем. Далее, она должна быть их пересечением. Докажем, что r делит M и n. В самом деле, каждому числу системы (7) соответствует определенная система чисел, подобно (14). Если две такие системы имеют общий член, то они тождественны, так как соответствуют одной и той же системе m элементов системы (8). Система (7) разбивается на группы по r элементов каждая

$$X_1, X_2, \ldots, X_{M'}, \tag{15}$$

где

$$M = rM'.$$

Далее, если один элемент x_1 системы X_1 входит в систему

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{3a}$$

то и вся система должна входить в (3a). Это вытекает из того, что если x_1 соответствуют $y_1, y_2, \ldots, y_m$, то X_1 есть пересечение систем x, соответствующих $y_1, y_2, \ldots, y_m$, а (3a) есть одна из этих систем. Поэтому система (3a) также распадается на группы по r элементов

$$X_1, X_2, \ldots, X_n', \tag{16}$$

где

$$n = r \cdot n'.$$

Подобным же образом, если

$$y_1, y_2, \ldots, y_s = Y_1, \tag{17}$$

то система (8) представится так:

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N'}, \tag{18}$$

где

$$N = sN',$$

а система (2) так:

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m'}, \tag{19}$$

где

$$m = sm'.$$

Докажем теперь следующее важное соотношение:

$$mM = nN. \tag{20}$$

Для этого выпишем все значения y, соответствующие системе (15):

$$\begin{array}{c|l} X_1 & Y_1,\ Y_2, \ldots, Y_{m'} \\ X_2 & Y_1',\ Y_2', \ldots, Y_{m'}' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_M' & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{21}$$

Этих значений будет $m'M'$. С другой стороны, здесь фигурируют N' систем (18), а каждая Y_1 попадается столько раз, сколько систем соответствуют ей, т. е. n' раз. Отсюда следует, что

$$m'M' = n'N', \tag{22}$$

откуда, умножая на rs, мы придем к равенству (20).

Преобразования эти (т. е. автоморфные) нетрудно получить в более явной форме. Пусть точки (x_1, y_1) и (x_1', y_1) удовлетворяют уравнениям

$$f(x_1, y_1) = 0 \text{ и } f(x_1', y_1) = 0.$$

Тогда, исключив y_1, получим соотношение между x_1 и x_1'

$$R(x_1, x_1') = 0. \tag{23}$$

Таким образом, задав какое-либо значение x_1, мы получим значения x, имеющие общее значение y. Путем дальнейшего саморезультирования (23) и результирования полученных результантов во всевозможных комбинациях мы получим все члены ряда (7). Впрочем процесс этот может идти до бесконечности."

Видя, что описанное здесь сопоставление точек является "соответствием", изученным Шалем и Гурвицем, я пытался читать работу Гурвица (Math. Ann. **28**), но не разобрал ее, не будучи знаком с принципом обращения абелевых интегралов. К этим вопросам я вернулся еще раз в 1932 г. (см. Comm. Math. Helv., Bd. 6, стр. 242–244).[1]

Параллельно с теорией алгебраических функций я изучал алгебраические числа по Гензелю, т. е. в связи с p-адическими разложениями. Последние, по аналогии с теоремой монодромии для

[1] [Собр. соч., т. III, стр. 11–13].

алгебраических функций, привели меня к арифметической теореме монодромии, о которой я буду говорить в следующем параграфе, так как эта теорема составляет существенную часть моей дипломной работы.

§3. Саратов. Дипломная работа
(1915–1916)

Осенью 1915 г. Киевский университет был в связи с войной эвакуирован в Саратов. Мне предстояло или ехать в Саратов, где ввиду отсутствия библиотеки можно было заниматься только учебой, или переводиться в другой университет, в котором была библиотека, но зато не было данных, позволяющих мне надеяться на оставление при университете, так как за год профессора не могли бы со мной в достаточной мере ознакомиться.

Элементарная добросовестность подсказывала мне второй вариант, так что, проезжая с университетским эшелоном через Харьков (у меня там жили родственники), я сделал попытку перевестись в Харьковский университет. Пользуясь тем, что наш эшелон стоял в Харькове ночь и утро, я отправился в университет и имел беседу с деканом, проф. Струве. Несмотря на то, что я предъявил ему лекционную книжку, в которой у меня были зачтены на “весьма” все предметы, кроме идущих на государственный экзамен, декан не мог решиться принять меня без совета с проректором. — “Уже прошло полсеместра. Поговорите с проректором; но сегодня у него нет приема, а он не любит, чтобы к нему обращались в неприемные дни”.

Ждать следующего дня — значило потерять свой эшелон, и без твердой надежды на поступление я не решился на это. Пришлось ехать в Саратов. Жизнь в Саратове была заполнена бытовыми заботами: общежитие, поиск комнаты, работа в “вокзальной комиссии”, т. е. дежурство на вокзале с целью направлять прибывающих студентов в общежития и т. п. Лекции у нас читались, но главная библиотека была в ящиках и работала только маленькая (без журналов) библиотека математического кабинета.

Еще в Киеве, занимаясь p-адическими разложениями алгебраических чисел, я нашел арифметическую теорему монодромии. В современной формулировке она выражается так:

Композит всех групп инерции нормального поля есть группа Галуа этого поля.

Однако более естественно представить себе эту теорему формулированной в терминах p-адических чисел. Как раз через p-адические числа я пришел к этой теореме. Будем исходить из того, что корни заданного уравнения разлагаются *по целым* степеням любого простого числа, кроме тех простых чисел, которые входят делителями в дискриминант поля, образованного корнями этого уравнения (критические простые числа). Если же мы пожелаем разложить эти корни по степеням критического простого числа, то придется ввести *дробные* степени. Теорема Миньковского: “Дискриминант поля всегда больше единицы”, — может быть, таким образом, сформулирована так:

Всякое иррациональное алгебраическое число не может разлагаться по целым степеням всех простых чисел.

Назовем p-адической (или локальной) группой Галуа уравнения группу Галуа, если за область рациональности взять поле элементов, разлагаемых по целым степеням p. Нетрудно видеть, что p-адическая группа Галуа есть не что иное, как группа инерции поля, образованного корнями уравнения. Эта группа циклическая, если критическое простое число p регулярно (в частности, это всегда имест место, если p взаимно просто с порядком группы Галуа).

Установим для групп инерции единую нумерацию корней. Для этого выразим все корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в виде функций от одной величины ξ, которая пусть является корнем неприводимого уравнения

$$F(\xi) = 0.$$

В p-адическом поле будем называть x_k тот корень, который выражается как $\phi_k(\xi)$, где ξ — произвольный корень p-адического уравнения

$$F(\xi) = 0 \quad (p).$$

Пусть H — подгруппа группы Галуа, содержащая все группы инерции (их композит). Функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащая к H, разлагается по целым степеням всех простых чисел, т. е. в силу теоремы Миньковского равна рациональному числу. Отсюда следует, что H совпадает с группой Галуа и теорема монодромии доказана.

С этой теоремой я поехал к Б.Н. Делоне, который тогда был аспирантом и жил в предместьи Саратова. Б.Н. объяснил мне, что теорема монодромии сама по себе ничего не представляет и может иметь значение только тогда, когда при ее помощи будет получен какой-нибудь существенный результат. Вместе с тем он рассказал мне о своих результатах и проблемах и ввел меня в курс современных проблем теории алгебраических чисел, так что должен считаться моим первым учителем. В частности, он обратил мое внимание на теорему Дедекинда:

Группа Галуа уравнения $f(x) = 0$ *содержит подстановку, состоящую из циклов порядков* $n_1, n_2, \ldots, n_k$, *если сравнение* $f(x) \equiv \equiv 0 \pmod p$ *разлагается на неприводимые множители степеней* $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и предложил мне дать для нее доказательство, не зависимое от теории идеалов. Данные мною доказательства он несколько раз отвергал как недостаточно отшлифованные, и уже по приезде в Киев (осенью 1916 г.) мое доказательство, прочитанное мною на семинаре, происходившем на квартире О.Ю. Шмидта, было признано удовлетворительным. Впоследствии я поместил это доказательство в своей статье “К задаче нахождения алгебраических уравнений с наперед заданной группой” (Изв. Каз. ФМО (3) **1**, 1926, стр. 26–32).[1]

Б.Н. также рассказал мне об обращении теоремы Дедекинда, известном под названием теоремы Фробениуса, о существовании бесчисленного множества простых чисел, по модулю которых левая часть уравнения разлагается на неприводимые множители степеней $n_1, n_2, \ldots, n_k$, если группа Галуа этого уравнения содержит подстановку с циклами порядков $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Он рассказал мне еще о более точной формулировке этой теоремы, которую Фробениус не мог доказать в полном объеме (см. §16).

Об этой задаче Б.Н. узнал от Ландау, который рассказал ему в поезде об этой задаче. Впоследствии ее решение послужило темой моей диссертации.

От Б.Н. я услышал о теореме Кронекера–Вебера:

Все поля с абелевой группой Галуа в поле рациональных чисел суть поля деления круга.

---

[1] [Собр. соч., т. I, стр. 87–94]

В то время он придумал новое доказательство этой теоремы, основанное на применении закона взаимности Эйзенштейна. Доказательство относилось только к случаю, когда дискриминант был взаимно прост со степенью.

Я рассказал Б.Н. первому о своей идее находить уравнения с заданной группой при помощи теоремы Дедекинда. Он указал мне, что в общем виде таким образом задача не может быть решена, но что таким образом можно решить ее для случая симметрической группы, если только можно найти цикленные типы подстановок, содержащиеся в симметрической группе, но не содержащиеся сразу ни в одной из ее подгрупп. Я нашел, что такими цикленными типами могут служить три следующие: 1) цикл n-го порядка, 2) цикл $(n-1)$-го порядка, 3) транспозиция.

Переехав в Киев и отыскав литературу по этому вопросу, я нашел свое решение в статье М. Бауэра (Math. Ann. **64**, 1907), с тою только разницей, что вместо цикла $(n-1)$-го порядка он берет цикл p-го порядка, где p — простое число между $\frac{n}{2}$ и n. Таким образом, я избавляюсь от необходимости пользоваться теоремой Чебышева о простых числах между $\frac{n}{2}$ и n. Кроме того, вместо цикла n-го порядка М. Бауэр применяет обычный критерий Эйзенштейна, что не давало ему возможности считать свой способ дающим все без исключения уравнения без аффекта, тогда как мой способ, на основании теоремы Фробениуса, давал эту возможность.

Наконец, упомяну о своей идее подсчитывать плотности (или вероятности) того, что данное уравнение содержит подстановки заданных цикленных типов. Этот способ основан на подсчете числа неприводимых по простым модулям множителей данных степеней. В моих руках этот способ был настолько несовершенен, что ни на одном примере не привел к результату, т. е. к доказательству существования уравнений с какой бы то ни было заданной группой, что составляло основную цель этой идеи. Впоследствии же эта идея, независимо от меня, составила тему для статьи ван-дер-Вардена “Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und...” (Monatsh. Math. u. Phys. **43**, 1936). Этой же идеей воспользовались Б.Н. Делоне и Д.К. Фаддеев для доказательства существования уравнений 4-й степени со всевозможными группами Галуа (кроме знакопеременной).[1] Их форма применения этой идеи наиболее совершенна.[2]

Моя дипломная работа состояла из конспекта по теории p-адических чисел, который я готовил для какого-то несостоявшегося семинара. Конспект был составлен довольно плохо и даже содержал ошибки, но он включал в себя теорему монодромии, доказательство теоремы Дедекинда и способ нахождения уравнений без аффекта. Д.А. Граве, не читая, сделал на конспекте одобрительную надпись, на основании которой государственная комиссия поставила мне за него "весьма удовлетворительно".

---

[1] Тут Н.Г. совершенно ошибается. Мы в нашей с Д.К. Фаддевым книге не доказываем существования уравнений с данной группой при помощи предварительного установления "плотности". Наоборот, решив задачу построения уравнений с заданной группой непосредственно, мы находим затем "плотности" таких уравнений.

[2] "Плотность" или "относительная плотность" в том смысле, как мы ее рассматривали в 1916 г. с Н.Г. в Саратове, или как ее определяет в своих статьях ван-дер-Варден, не что иное, как отношение числа целых точек полей с длиной группой, лежащих в большом кубе вокруг начала, к числу целых точек полей с другой данной группой, лежащих в том же кубе. Это *несовершенное* определение позволяет только попытаться показать, что уравнения с такой-то группой лежат плотнее, чем с другой. Однако пока никому не удалось показать в этом направлении ничего кроме того, что "плотность" уравнений с симметрической группой такова же, как и плотность всех уравнений. Это мы показали с Н.Г. еще в 1916 г., причем выражали это так: "вероятность того, чтобы уравнение имело симметрическую группу, равна 1". В 1934 г. в Math. Ann. появилась работа ван-дер-Вардена, в которой он, очевидно не зная о нашем результате, так как мы о нем только кое-кому рассказывали, но его не напечатали, в точности повторил наше доказательство 1916 г. Я помню, что, гуляя в морозный вечер 1916 г. с Н.Г. по Саратову, мы договорились, что, если мы не найдем никакой группы, для которой эта "вероятность" не будет отлична от 1 и 0, мы печатать статьи об этом не будем. Ван-дер-Варден поступил иначе и, может быть, правильно, так как и результат, что "почти все" уравнения имеют симметрическую группу, тоже интересный.

В 1935 г. мне пришла совершенно новая идея рассматривать не эти "плотности", а ассимптотические формулы, показывающие, как растет число целых точек полей с данной группой в кубе или шаре вокруг начала при возрастании этого куба или шара. Я показал, что число N всех целых точек всех полей данного порядка n растет при этом, как $cr = \frac{n(n+1)}{2}$, где c — некоторая константа, а r — радиус шара, а также, что число точек, соответствующих неприводимым уравнениям, растет ровно так же, тогда как число точек, соответствующих всем приволимым уравнениям n-й степени растет существенно медленнее, а именно, не быстрее чем $c_1 r^{\frac{n(n+1)}{2}} - (n-1)$. Это содержится в нашей с Фаддеевым книге "Теория иррациональностей 3-й степени"(стр. 24–25). Позже, в 1938 г., в одном докладе в совете МИАН я дал соответственные асимптотические формулы для всех четырех групп уравнений 3-й степени (симметрическая, циклическая, полуприводимая и совсем приводимая). Этот доклад не был напечатан. В своем докладе на алгебраической конференции 1939 г. Д.К. Фаддеев дал аналогичные формулы для всех 11 групп неприводимых и приводимых уравнений 4-й степени, кроме знакопеременной. Эти формулы напечатаны в Изв. АН СССР, серия мат. 4, 1940, стр. 133. Они следующие:

Группа симметрии	8-го пор.	6-го пор.	4-го пор.	4-го цикл.	4-го	3-го пор.	2-го пор.	2-го пор.	1-го пор.
$N = c_1 r^{10}$	$c_2 r^8 \ln r$	$c_3 r^7$	$c_4 r^6$	$c_5 r^4 \ln r$	$c_6 r^4 \ln^3 r$	$c_7 r^4 \ln r$	$c_8 r^5$	$c_9 r^4 \ln r$	$c_{10} r^4$
Остаточный член $O(r^9)$	$O(r^6)$	$O(r^6)$	$O(r^5)$	$O(r^4)$	$O(r^4 \ln^2 r)$	$O(r^4)$	$O(r^4)$	$O(r^4)$	$O(r^3)$

Надо заметить, что как мои формулы для всех четырех групп уравнений 3-й стелени, так и эти формулы Фаддеева для десяти групп уравнений 4-й степени получены лишь после того, как для соответственной группы дано решение обратной задачи теории Галуа. (Примечание Б. Делоне.)

§4. Оставление при университете (1916 — 1918)

Киевский период (1918 — 1921)

Осенью 1916 г. Д.А. Граве оставил меня при университете “для приготовления к профессорскому званию”, или, выражаясь по современному, сделал меня аспирантом. Во время аспирантуры я преподавал в средних школах и готовился к магистерскому экзамену. Экзамен нельзя было бы считать особенно трудным, так как киевские математики того времени не держались в курсе современной математики, кроме Д.А. Граве, который был врагом магистерских экзаменов и советовал нам не тратить на них много времени, а готовиться так, чтобы только что не провалиться. Однако педагогическая нагрузка, экзамены, а также военная обстановка не позволили мне в этот период заниматься математикой на собственные темы. Во всяком случае я не могу вспомнить, какими из тем киевского периода я начал заниматься в аспирантские годы. Впрочем одну из них, в ту эпоху не приведшую ни к какому удовлетворительному результату, я использовал в качестве пробной лекции перед получением звания приват-доцента, из чего можно заключить, что я занимался ею в аспирантский период. Это — попытка обобщить комплексное умножение эллиптических функций на гармонические функции трех переменных. Эту тему предложил мне Д.А. Граве, указавший притом, что основы их теории, по аналогии с обычными аналитическими функциями, были разработаны Аппелем (Acta Math. **4, 8**). Продолжая выкладки Аппеля, я получил несколько формул, выражающих трояко-периодические функции от кратных аргументов через трояко-периодические функции от простых аргументов. Однако получить какие-либо результаты, аналогичные тем, которые составляют теорию умножения эллиптических функций, мне не удалось, так как последние существенным образом опираются на следующий факт теории аналитических функций:

Аналитическая функция от аналитической функции есть опять аналитическая функция.

Если рассмотреть вещественные части от аналитических функций, т. е. произвольные гармонические функции от двух аргументов, то этот факт окажется равносильным следующему:

Если $\Phi(u, v)$ — произвольная гармоническая функция и если в нее подставить

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial f}{\partial y},$$

где $f = f(x, y)$ — тоже произвольная гармоническая функция, то в результате опять получится гармоническая функция от x, y.

Этот факт легко проверить непосредственно. На гармонические функции от трех аргументов он не может быть перенесен. Более того: зададимся целью найти наиболее общий класс функций $\Phi = (u_0; u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, u_1^{(3)}; u_2^{(1)}, u_2^{(2)}, u_2^{(3)}, u_2^{(4)}, u_2^{(5)}, u_2^{(6)}; \dots)$, обладающих тем свойством, что при подстановке

$$u_0 = f(x, y, z),$$

$$u_1^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad u_1^{(2)} = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad u_1^{(3)} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$u_2^{(1)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad u_2^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad u_2^{(3)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad u_2^{(4)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$u_2^{(5)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \quad u_2^{(6)} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

. . . .

где $f(x, y, z)$ — произвольная гармоническая функция, мы будем получать всегда гармонические функции от x, y, z. Оказывается, что Φ может быть только линейной функцией от своих аргументов.

Я доказал в те времена это утверждение для случая вторых и третьих производных от u, входящих в выражение Φ. Для произвольного же порядка мне не удалось его доказать. Можно было бы высказать более общее предположение:

Если оператор $\Phi(u)$ обладает таким свойством, что всякий раз когда функция u гармоническая, то и $\Phi(u)$ есть гармоническая функция, то это — линейный оператор с постоянными коэффициентами.

Таким образом, обобщение теоремы умножения эллиптических функций, а также их комплексного умножения, на гармонические функции от трех аргументов невозможно. Тем не менее геометрическая картина комплексного умножения сравнительно легко обобщается на многомерные пространства. В своей пробной лекции, которая в то время требовалась для получения звания приват-доцента, я проделал это обобщение для трехмерного пространства, а также применил к построению соответствующих гармонических функций. Впоследствии, в 1928 г., я обобщил эту картину на пространства любого числа измерений. Задача была поставлена так:

В n-мерном пространстве дана сеть параллеолоидов. Требуется повернуть ее вокруг одной из вершин и увеличить ее в каком-то масштабе так, чтобы при этом каждая из новых вершин сети попала в положение одной из вершин старой сети.

Обозначая через Λ обобщенную ортогональную матрицу, соответствующую повороту и увеличению, через A — матрицу, строки которой образованы из составляющих векторов, порождающих сеть, и через Z — некоторую целочисленную матрицу, мы придем к соотношению

$$A \cdot \Lambda \cdot A^{-1} = Z,$$

откуда следует, что характеристическое уравнение матрицы Λ (и также Z) имеет целые коэффициенты и корни одного и того же абсолютного значения. Общий способ образования корней такого рода уравнений таков:

Возьмем произвольное уравнение с вещественными корнями ξ, абсолютные значения которых не превышают M; найдем корни уравнений

$$z^2 - \xi \cdot z + a = 0,$$

где $a \geq \frac{M^2}{4}$ — одно и то же для всех ξ, и извлечем из z корень любой степени.

Построив такого рода уравнение, мы можем построить обобщенную ортогональную матрицу и целочисленную матрицу, для которых это уравнение будет характеристическим. Далее, необходимо построить все такого рода матрицы. Вопрос может быть приведен к определению классов матриц, подобных данной целочисленной матрице, если считать две матрицы лежащими в одном классе, когда они преобразуются друг в друга при помощи целочисленной унимодулярной матрицы. Оказывается, что число этих классов конечно, если характеристическое уравнение не имеет кратных корней. В случае, когда оно неприводимо, число классов просто равно числу идеальных классов, образованного его корнем поля. Наконец, нахождение всех сетей сводится к нахождению всех матриц, перестановочных с Z. Этот результат опубликован в статье "Über Drehungen von mehrdimensionalen Gittern" (Изв. Каз. ФМО (3) **3**, 1928, стр. 70–76).[1]

В.А. Тартаковский распространил решение задачи на тот случай, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни (см. Изв. АН СССР **4**, 1940, стр. 128).

Моя вторая пробная лекция на назначенную факультетом тему "О геодезической кривизне поверхностей" интереса не представляла.

Написанная мною на магистерском экзамене работа "О модулярных функциях многих переменных" представляет собой пересказ результатов Блюменталя (Math. Ann. **58**) и Гекке (Math. Ann.**71**). У меня сохранился ее черновик.

После экзамена я работал над несколькими небольшими темами, список которых привожу:

1) Выделение алгебраической части в абелевых интегралах.

2) Обобщенные характеристики ϑ-функций.

Обе перечисленные темы предложены мне Д.А. Граве.

3) Задача, обратная обращению абелевых интегралов. Эта тема привела меня к двум следующим:

4) Поверхности переноса.

5) Результант от трансцендентных функций. Последняя тема привела меня к следующей:

6) Критерий вещественности корней трансцендентных уравнений.

Работа Б.Н. Делоне привела меня к теме:

7) Задача, обратная задаче Чирнгаузена.

Наконец, я занимался следующей темой:

8) Ширина контуров и тел.

Эти темы будут описаны в следующих параграфах.

[1] [Собр.соч., т. II, стр. 278–285]

§5. Выделение алгебраической части в абелевых интегралах

Д.А. Граве, предлагая мне эту тему, оставил листок со своими выкладками, который сохраняется у меня. Я придумал для решения этой задачи алгоритм, обобщающий деление. Воспроизвожу текст сохранившегося у меня черновика (самая работа не была опубликована):

“Пусть требуется проинтегрировать в конечном виде $\frac{fx}{Fx\cdot\theta x^{\frac{1}{m}}}dx$, где $fx, Fx, \theta x$ — целые рациональные функции. Результат интегрирования, как нетрудно убедиться путем подстановки взамен $\theta^{\frac{1}{m}} - e^{\frac{2\pi i}{m}}\theta^{\frac{1}{m}}, e^{\frac{2\pi i}{m}2}\theta^{\frac{1}{m}}, \ldots$ и суммирования, можно привести к виду

$$\int \frac{fx}{Fx\theta x^{\frac{1}{m}}}dx = \frac{P}{Q}\theta^{\frac{m-1}{m}} + \sum A\lg W. \qquad (1)$$

Чтобы выяснить природу введенных нами функций, продифференцируем (1). Тогда

$$\frac{fx}{Fx\theta^{\frac{1}{m}}} = \frac{P'Q\theta^{\frac{m-1}{m}} + \frac{m-1}{m}PQ\theta^{-\frac{1}{m}}\theta' - PQ'\theta^{\frac{m-1}{m}}}{Q^2} + \sum A\frac{W'}{W}. \qquad (2)$$

Легко доказать (см. Пташицкий, стр. 8 и далее), что выражение $\sum A\frac{W'}{W}$ можно представить в виде $\frac{V}{U\theta^{\frac{1}{m}}}$, причем U не содержит кратных множителей и взаимно просто с θ, а степень этого выражения не превышает -1. Итак, формулу (2) можно переписать таким образом:

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{(P'Q - PQ')\theta + \frac{m-1}{m}PQ\theta'}{Q^2} + \frac{V}{U}. \qquad (3)$$

Ясно, что U не содержит множителей, отличных от множителей Fx. Действительно, пусть $x - a$ множитель, входящий в U, но не в Fx. Тогда он должен войти в Q, например, q раз. В большом члене в (3) в знаменатель он войдет $2q$ раз, а в числитель — $q-1$ раз (во все члены, кроме — $PQ'\theta$, он войдет по крайней мере q раз, а потому в числитель он войдет в большей степени только тогда, когда P и θ делится на $x - a$, чего мы не предполагаем). Значит, после сокращения знаменатель будет содержать $x-a$ $q+1$ раз, т. е. по крайней мере два раза, чего не может быть, так как вся дробь равна выражению

$$\frac{fx}{Fx}-\frac{V}{U},$$

куда $x-a$ войдет в знаменатель всего один раз. Подобным же образом убедимся, что Q не содержит множителей, отличных от множителей Fx и θx. Чтобы узнать значение Q, предположим, что $x-a$ входит в Q q раз, в Fx ϕ раз, в θx t раз. Тогда в знаменатель большой дроби он войдет 2 q раз, а в числитель ровно $q+t-1$ раз (в нем коэффициент при $(x-a)^{q+t-1}$ равен $-q+\frac{m-1}{m}t$, т. е. равен дробному числу, так как $t<m$ и, следовательно, не может быть нулем). В общем же знаменателе выражения

$$\frac{fx}{Fx}-\frac{V}{U}$$

$x-a$ входит φ раз. Пусть в числитель этого выражения $x-a$ входит h раз. Тогда должно быть

$$\varphi-h=2q-q-t+1,$$

откуда

$$q=\varphi+t-1-h.$$

В дальнейшем мы будем полагать

$$q=\varphi+t-1;$$

в случае же, если $h\neq 0$, мы будем умножать P и Q на $(x-a^h)$, вследствие чего предположение, что P и Q взаимно просты, должно отпасть. Выражение для q дает возможность найти Q. Из простых алгебраических соображений следует, что Q есть общий наибольший делитель Fx и $\frac{d}{dx}(Fx\cdot\theta x)$.

Остается найти P и U. Перепишем формулу 3 так:

$$fx=\frac{FX\cdot\theta x}{Q}\frac{dP}{Dx}+\left(\frac{m-1}{m}\frac{Fx\cdot\theta' x}{Q}-\frac{Fx\cdot\theta x\cdot Q'}{Q^2}\right)P+\frac{Fx}{U}\cdot V. \tag{4}$$

Выражения

$$\frac{F\cdot\theta}{Q},\frac{F\cdot\theta'}{Q},\frac{F\cdot\theta Q'}{Q^2},\frac{F}{U}$$

являются целыми рациональными функциями. Сомнение может возникнуть лишь относительно $\frac{F\cdot\theta Q'}{Q^2}$, но оно рассеется, если мы обратим внимание на то, что $x-a$ входит в него (прежние обозначения)

$$\varphi+t+(\varphi+t-2)-2(\varphi+t-1)=0$$

раз, т. е. ни один множитель из Q не войдет с отрицательным показателем. Выясним еще природу $\frac{F}{U}$. Множитель $x-a$ войдет сюда

$$\varphi-1=(\varphi+t-1)-(t-1),$$

т. е. столько раз, как в $\frac{Q}{D}$, если через D обозначить общий делитель θx и $\theta' x$. Поэтому можно положить $\frac{F}{U}=\frac{Q}{D}$ или $U=\frac{F\cdot D}{Q}$.[1]

Ограничимся сперва задачей *выделения алгебраической части.* Для этого достаточно подобрать P и V так, чтобы

$$\delta\left(\frac{V}{U}\right)\leq\delta\left(\frac{\theta}{D}\right)-2.$$

В самом деле, если в подинтегральной функции было бы

$$\delta\left(\frac{f}{F}\right)\leq\delta\left(\frac{\theta}{D}\right)-2 \tag{5}$$

и

$$\delta\left(\frac{f}{F}\right)>\delta\left(\frac{\theta^{\frac{1}{m}}}{D}\right)-1 \tag{6}$$

[отсюда следовало бы

$$\delta\left(\frac{\theta}{D\theta^{\frac{1}{m}}}\right)>1,$$

или

$$\delta\left(\frac{D}{\theta^{\frac{m-1}{m}}}\right)<-1],$$

причем F состояло бы из простых множителей, не входящих в θ, то интеграл не мог бы быть взят в одних алгебраических функциях и логарифмах. Действительно, тогда $Q=D$, и имело бы место равенство

$$\frac{fx}{Fx\theta^{\frac{1}{m}}}dx=\frac{P}{D}\theta^{\frac{m-1}{m}}=P\cdot\frac{\theta}{D}:\theta^{\frac{1}{m}},$$

[1] Здесь ошибка, так как $\varphi-1=(\varphi+t-1)-t$. (Ред.)

где $P \cdot \frac{\theta}{D}$ — целая функция. Но это невозможно, так как

$$\delta\left(P\frac{\theta}{D}\right) \geq \delta\left(\frac{\theta}{D}\right),$$

$$\delta\left(\frac{f}{F}\right) \leq \delta\left(\frac{\theta}{D}\right) - 2,$$

в то время как степень интеграла отличается на единицу от степени подинтегральной функции, степень же члена

$$\delta\left(\frac{V}{U\theta^{\frac{1}{m}}}\right) < -1$$

и в силу неравенства (6)

$$\delta\left(\frac{f}{F}\right) > \delta\left(\frac{V}{U}\right),$$

т. е.

$$\delta\left(\frac{P\delta}{D}\right) > \delta\left(\frac{V}{U}\right).$$

Поэтому нашей ближайшей целью будет подобрать P и V так, чтобы удовлетворить формуле (4) и чтобы $\delta(V)$ было не выше одного из чисел

$$\delta(U) + \delta\left(\frac{\theta}{D}\right) - 2 = \delta\left(\frac{FD}{Q}\frac{\theta}{D}\right) - 2 = \delta\left(\frac{F\theta}{Q}\right) - 2, \tag{7}$$

или

$$\delta(U) + \delta\left(\theta^{\frac{1}{m}}\right) = \delta\left(\frac{FD}{Q}\theta^{\frac{1}{m}}\right) - 1. \tag{8}$$

Заметим, что если мы достигнем первого неравенства, а второе не будет иметь места, то наш интеграл не сможет быть выражен ни в алгебраических функциях, ни в логарифмах. Это будет тогда, когда

$$\delta\left(\frac{\theta}{D}\right) - 2 > \delta\left(\theta^{\frac{1}{m}}\right) - 1.$$

Но $\delta\left(\frac{\theta}{D}\right)$ всегда $> \delta(\theta^{\frac{1}{m}})$. Поэтому это неравенство во всяком случае будет иметь место, если

$$\delta\left(\theta^{\frac{1}{m-1}}\right) - 1 > \delta\left(\theta^{\frac{1}{m}}\right),$$

или
$$\delta\theta > m(m-1).$$
Для $m=2$ получим условие $\delta\theta > 2$.

Необходимо еще упомянуть про случай, когда, понижая степень $\frac{fx}{Fx}$, мы придем к тому, что дальнейший подбор коэффициента в P будет бесполезен, так как последний уничтожится в выражении (1). Это будет тогда, когда
$$\delta P + \frac{m-1}{m}\delta\theta - \delta Q = 0.$$
Но при подобном подборе должно быть
$$\delta f = \delta F + \delta\theta + \delta P - \delta Q - 1,$$
откуда
$$\frac{m-1}{m}\delta\theta + \delta f - \delta F - \delta\theta + 1 = 0,$$
т. е.
$$\delta\left(\frac{f}{F\cdot\theta^{\frac{1}{m}}}\right) = -1.$$
Ясно, что в этом случае нужно подыскивать для интеграла логарифмическое выражение.

Таким образом, подбор алгебраической части приводится к нахождению полиномов P и V, которые удовлетворяли бы уравнению (4), которое можно переписать так:
$$f = A\frac{dP}{dx} + BP + CV, \tag{9}$$
где f, A, B, C — заданные полиномы. Условия (7) и (8) равносильны тому, чтобы $\delta(V)$ была меньше, чем δB, в то время как $\delta A = \delta B + 1$.

Чтобы разъяснить сущность этого алгоритма, который на прилагаемом отрывке только намечен, приведем несколько примеров.

П р и м е р 1. Дан интеграл
$$\int \frac{\frac{5}{3}x^6 + \frac{11}{3}x^4 + x^2 - 1}{(x^2+1)^2(x^4-1)^{\frac{1}{3}}}dx.$$
Имеем
$$\theta(x) = x^4 - 1, \quad \theta'(x) = 4x^3, \quad D = (\theta, \theta') = 1, \quad F = (x^2+1)^2,$$

$$Q = (F, (F \cdot \theta)') = \big((x^2+1)^2, ((x^2+1)^3(x^2-1))'\big) = (x^2+1)^2,$$

$$U = \frac{F \cdot D}{Q} = 1,$$

$$\frac{F \cdot \theta}{Q} = \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}(x^4-1) = x^4 - 1,$$

$$\frac{F \cdot \theta'}{Q} = \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}4x^3 = 4x^3,$$

$$\frac{F \cdot \theta \cdot Q'}{Q^2} = \frac{(x^2+1)^2(x^4-1) \cdot 4(x^2+1)x}{(x^2+1)^4} = 4x(x^2-1),$$

$$\frac{F}{U} = (x^2+1)^2.$$

Подставим в (4). Задача приведется к нахождению полиномов P и V такого рода, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\frac{5}{3}x^6 + \frac{11}{3}x^4 + x^2 - 1 = \left(-\frac{4}{3}x^3 + 4\right)P + (x^4-1)\frac{dP}{dx} + (x^2+1)^2 V$$

и чтобы при этом степень полинома V была возможно более низкой. Располагаем действия подобно тому, как это делается для деления, но с двумя “делителями” и подбираем “частные” так, чтобы второе “частное” было производным от первого:

$$
\begin{array}{r|c|c}
\frac{5}{3}x^6 + \frac{11}{3}x^4 + x^2 - 1 & -\frac{4}{3}x^3 + 4x & x^4 - 1 \\ \cline{2-3}
+\frac{4}{3}x^6 - 4x^4 \qquad\qquad & x^3 + x & 3x^2 + 1 \\
-3x^6 \qquad +3x^2 \qquad & & \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{3}x^4 + 4x^2 - 1 & & \\
+\frac{4}{3}x^4 - 4x^2 \qquad & & \\
-x^4 \qquad\quad +1 & & \\ \cline{1-1}
0 \quad & &
\end{array}
$$

Пусть старший член полинома P есть kx^α, полинома $\frac{dP}{dx}-\alpha kx^{\alpha-1}$. Тогда должно быть

$$\frac{5}{3}x^6 = -\frac{4}{3}kx^{\alpha+3} + \alpha kx^{\alpha+3},$$

откуда

$$\alpha = 3, \qquad k = 1, \qquad kx^\alpha = x^3.$$

Вычитая из “делимого” оба произведения “делителей” на члены “частных”, получим первый остаток

$$-\frac{1}{3}x^4 + 4x^2 - 1.$$

Снова подбираем старший член “частных”:

$$\text{в } P \cdots kx^\alpha, \text{ в } \frac{dP}{dx} \cdots \alpha kx^{\alpha-1},$$

$$-\frac{1}{3}x^4 = -\frac{4}{3}kx^{\alpha+3} + \alpha kx^{\alpha+3},$$

$$\alpha = 1, \quad k = 1, \quad kx^\alpha = x.$$

Точно так же вычитаем произведения. Получаем в остатке нуль. Итак,

$$P = x^3 + x, \quad V = 0,$$

откуда

$$\int \frac{\frac{5}{3}x^6 + \frac{11}{3}x^4 + x^2 - 1}{(x^2+1)^2(x^4-1)^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{(x^3+x)(x^4-1)^{\frac{2}{3}}}{(x^2+1)^2} + C = \frac{x(x^4-1)^{\frac{2}{3}}}{x^2+1} + C.$$

Проверка дифференцированием показывает правильность результата.

П р и м е р 2. Дан интеграл

$$\int \frac{16x^6 + 5x^5 - 16x^4 - 20x^3 - 9x^2}{(x-1)^2(x^4+x^3)^{\frac{1}{4}}}dx.$$

Имеем

$$\theta = x^4 + x^3, \qquad \theta' = 4x^3 + 3x^2, \qquad D = x^2, \qquad m = 4,$$

$$F = (x-1)^2,\ Q = (F, (F\theta)') = ((x-1)^2,\ ((x-1)^2x^3(x+1))') = x-1,$$

$$U = \frac{FD}{Q} = x^2(x-1),$$

$$\frac{F\theta}{Q} = (x-1)x^3(x+1) = x^5 - x^3,$$

$$\frac{F\theta'}{Q} = (x-1)(4x^3+3x^2) = 4x^4 - x^3 - 3x^2,$$

$$\frac{F\theta Q'}{Q^2} = x^4 + x^3, \qquad \frac{F}{U} = \frac{x-1}{x^2}.$$

Мы приходим к решению неопределенного уравнения

$$16x^6 + 5x^5 - 16x^4 - 20x^3 - 9x^2 = \left(2x^4 - \frac{7}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2\right)P +$$
$$+ (x^5 - x^3)P' + \frac{x-1}{x^2}V.$$

Расположим действия, как показано в примере 1:

$$
\begin{array}{r|c|c}
16x^6 + 5x^5 - 16x^4 - 20x^3 - 9x^2 & 2x^4 - \frac{7}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 & x^5 - x^3 \\ \cline{2-3}
-8x^6 + 7x^5 + 9x^4 \phantom{{}- 20x^3 - 9x^2} & 4x^2 + 4x + 4 & 8x + 4 \\
-8x^6 \phantom{{}+ 7x^5} + 8x^4 \phantom{{}- 20x^3 - 9x^2} & & \\ \cline{1-1}
12x^5 + x^4 - 20x^3 - 9x^2 & & \\
-8x^5 + 7x^4 + 9x^3 \phantom{{}- 9x^2} & & \\
-4x^5 \phantom{{}+ 7x^4} + 4x^3 \phantom{{}- 9x^2} & & \\ \cline{1-1}
8x^4 - 7x^3 - 9x^2 & & \\
-8x^4 + 7x^3 + 9x^2 & & \\ \cline{1-1}
0 \phantom{{}+ 7x^3 + 9x^2} & &
\end{array}
$$

Таким образом,

$$\int \frac{16x^6 + 5x^5 - 16x^4 - 20x^3 - 9x^2}{(x-1)^2(x^4+x^3)^{\frac{1}{4}}}dx = \frac{4x^2+4x+4}{x-1}(x^4+x^3)^{\frac{3}{4}} + C.$$

§6. Обобщенные характеристики ϑ-функций

Д.А. Граве обратил внимание на то, что выкладки в статье Браунмюля "Über Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, ..." (Math. Ann. **37**, стр. 60–99) справедливы только при простом n, в то время как автор не делает об этом оговорки. Он поручил мне произвести все выкладки для произвольного целого n. У меня сохранилась работа об этом, которую я и воспроизвожу.

"В статье Браунмюля, помещенной в т. 37 Math. Ann. под заглавием "Ueber Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, ..." (стр. 60–99), произведен подсчет характеристик с данным характером. Рассуждения в этой статье безукоризненны, если только считать n простым числом. Однако в статье это не оговорено и отнюдь не вытекает из смысла задачи.

Поэтому в настоящей статье мы позволим себе указать, как должно было быть произведено вычисление.

Будем обозначать число характеристик n-го порядка с характером m через $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$. Нетрудно убедиться, что $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ может быть составлено так:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_p,\ k \\ \zeta'_1,\zeta'_2,\ldots,\zeta'_p}} \tau^{[(\zeta_1\zeta'_1+\zeta_2\zeta'_2+\cdots\zeta_p\zeta'_p+m)]k}, \tag{1}$$

где τ — первообразный корень n-й степени из единицы, а k; $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$; $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_p$ пробегают полные системы вычетов по модулю n. Обозначая сокращенно $\zeta_1\zeta'_1 + \zeta_2\zeta'_2 + \cdots + \zeta_p\zeta'_p$ через $|\zeta|$, вычислим выражение

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \tau^{\delta} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + \tau^{(n-1)\delta} \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\zeta,k} \tau^{|\zeta|k} + \frac{1}{n}\tau^{\delta} \sum_{\zeta,k} \tau^{(|\zeta|-1)k} + \cdots + \frac{1}{n}\tau^{(n-1)\delta} \sum_{\zeta,k} \tau^{(|\zeta|-\overline{n-1})k} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\zeta} (1 + \tau^{\delta} + \cdots + \tau^{(n-1)\delta}) + \frac{1}{n} \sum_{\zeta} \tau^{|\zeta|} \left(1 + \tau^{\delta-1} + \cdots + \right.$$

$$+\tau^{(n-1)(\delta-1)}\Big) + \frac{1}{n}\sum_{\zeta}\tau^{(n-1)|\zeta|}\left(1+\tau^{\delta-\overline{n-1}}+\cdots+\tau^{(\delta-\overline{n-1})(n-1)}\right). \tag{2}$$

Все члены последнего выражения, кроме $(\delta+1)$-го, обратятся в нуль. Этот же последний может быть преобразован следующим образом:

$$\frac{1}{n}\sum_{\zeta}\tau^{\delta|\zeta|}n = \frac{n}{n}\sum_{\zeta}\tau^{\delta(\zeta_1\zeta_1'+\zeta_2\zeta_2'+\cdots+\zeta_p\zeta_p')} =$$

$$\sum_{\zeta_1,\zeta_1'}\tau^{\delta\zeta_1\zeta_1'}\sum_{\zeta_2,\zeta_2'}\tau^{\delta\zeta_2\zeta_2'}\cdots\sum_{\zeta_p,\zeta_p'}\tau^{\delta\zeta_p\zeta_p'} = \left(\sum_{\substack{0\le\zeta\le n-1\\ 0\le\zeta'\le n-1}}\tau^{\delta\zeta\zeta'}\right)^p. \tag{3}$$

Рассмотрим выражение

$$\sum_{\zeta,\zeta'}\tau^{\delta\zeta\zeta'} = \sum_{\zeta'}(1+\tau^{\delta\zeta'}+\tau^{2\delta\zeta'}+\cdots+\tau^{(n-1)\delta\zeta'}).$$

Каждый член этой суммы не равен нулю только тогда, когда $\delta\zeta'\equiv 0 \pmod{n}$; в этом случае он равен n. Таких значений для ζ' всего (n,δ). Поэтому

$$\begin{bmatrix} n\\ 0\end{bmatrix} + \tau^{\delta}\begin{bmatrix} n\\ 1\end{bmatrix} + \cdots + \tau^{(n-1)\delta}\begin{bmatrix} n\\ n-1\end{bmatrix} = n^p(n\delta)^p. \tag{4}$$

Напишем равенства (4) для $\delta = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, умножим каждое, соответственно, на $1, \tau^{-d}, \tau^{-2d}, \ldots, \tau^{-(n-1)d}$ и сложим. Тогда получим

$$\begin{bmatrix} n\\ 0\end{bmatrix}\sum_{\delta=0}^{n-1}\tau^{-d\delta} + \begin{bmatrix} n\\ 1\end{bmatrix}\sum_{\delta=0}^{n-1}\tau^{-(d-1)\delta} + \cdots + \begin{bmatrix} n\\ n-1\end{bmatrix}\sum_{\delta=0}^{n-1}\tau^{-(d-\overline{n-1})\delta} =$$

$$= n^p\sum_{\delta=0}^{n-1}\tau^{-d\delta}(n,\delta)^p. \tag{5}$$

В левой части здесь пропадают все члены, кроме $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} n$. Поэтому формулу (5) можно переписать так:

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = n^{p-1} \sum_{\delta=0}^{p-1} \tau^{-d\delta} (n, \delta)^p. \tag{6}$$

Будем группировать вместе числа δ, имеющие с n один и тот же общий наибольший делитель, который мы также обозначим через δ. Тогда получим выражение

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = n^{p-1} \sum_{\delta/n} \delta^p \sum_{\left(s, \frac{n}{\delta}\right)=1} \tau^{-d\delta s} = n^{p-1} \sum_{\delta/n} \delta^p \sum_{\left(s, \frac{n}{\delta}\right)=1} t^{ds}, \tag{7}$$

где $t = \tau^{-}\delta$ — первообразный корень $\frac{n}{\delta}$-ой степени. Здесь внешняя сумма распространена на все делители n, включая и само n, а внутренняя — на числа s, взаимно простые и не превышающие $\frac{n}{\delta}$. Обозначая внутреннюю сумму символом $\begin{Bmatrix} n \\ \delta \end{Bmatrix}$, перепишем формулу (7) так:

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = n^{p-1} \sum_{\delta/n} \delta^p \begin{Bmatrix} \frac{n}{\delta} \\ d \end{Bmatrix}. \tag{7'}$$

Заметим, что как $\begin{Bmatrix} \frac{n}{\delta} \\ d \end{Bmatrix}$, так $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}$ не изменится, если d заменить через kd, где $\left(k, \frac{n}{d}\right) = 1$; другими словами, они зависят не от самого d, а от (d, n). Поэтому впредь мы можем считать d делителем n. Исследуем выражение $\begin{Bmatrix} n \\ d \end{Bmatrix}$. Докажем, что если n и n_1 — два взаимно простых числа, то имеет место равенство

$$\begin{Bmatrix} n \\ d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} nn_1 \\ dd_1 \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Действительно,

$$\begin{Bmatrix} n \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \sum_{(s,n)=1} t^{ds} \sum_{(s_1,n_1)=1} t_1^{d_1 s_1} = \sum_{s,s_1} \tau^{dd_1\left(\frac{n_1}{d_1}s + \frac{n}{d}s_1\right)},$$

где $\tau^{n_1} = t, \tau^n = t_1$. В то время, как $s\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)}$ раз пробежит систему чисел, взаимно простых с $\frac{n}{d}$, а s_1 — $\frac{\varphi(n_1)}{\varphi\left(\frac{n_1}{d_1}\right)}$ раз систему чисел, взаимно простых с $\frac{n_1}{d_1}$, выражение $\frac{n_1}{d_1}s + \frac{n}{d}s_1$пробежит

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)}\frac{\varphi(n_1)}{\varphi\left(\frac{n_1}{d_1}\right)} = \frac{\varphi(nn_1)}{\varphi\left(\frac{nn_1}{dd_1}\right)}$$

раз систему чисел, взаимно простых с $\frac{nn_1}{dd_1}$. Таким образом,

$$\tau^{dd_1\left(\frac{n_1}{d_1}s+\frac{n}{d}s_1\right)}$$

пробежит

$$\frac{\varphi(nn_1)}{\varphi\left(\frac{nn_1}{dd_1}\right)}$$

раз систему первообразных корней $\frac{nn_1}{dd_1}$-ой степени из единицы, т. е. ту же систему, что и $\tau^{dd_1 s}$, если s будет пробегать систему вычетов, взаимно простых и не превышающих nn_1. Это вполне доказывает равенство (8). Заметим, что при доказательстве нет необходимости считать d и d_1 делителями n и n_1. Достаточно, чтобы было

$$(d, n_1) = (d, d_1) = (d_1, n) = 1.$$

Перейдем к доказательству равенства

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nn_1 \\ dd_1 \end{bmatrix} \text{ при } (n, n_1) = 1. \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = n^{p-1}n_1^{p-1}\sum_{\delta/n}\delta^p \begin{Bmatrix} \frac{n}{\delta} \\ d \end{Bmatrix} \sum_{\delta_1/n_1}\delta_1^p \begin{Bmatrix} \frac{n_1}{\delta_1} \\ d_1 \end{Bmatrix} =$$

$$= (n, n_1)^{p-1} \sum_{\substack{\delta/n \\ \delta_1/n_1}} (\delta\delta_1)^p \begin{Bmatrix} \frac{n}{\delta} \\ d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{n_1}{\delta_1} \\ d_1 \end{Bmatrix}. \tag{10}$$

Если δ пробегает систему всех делителей n, а δ_1 — систему всех делителей n_1, то $\delta\delta_1$, пробежит полную систему делителей nn_1. Кроме того, так как $d\delta$ содержит только множители n, а $d_1\delta_1$ —

только множители n_1 и $(n,n_1)=1$, то должно быть: $(d\delta, d_1\delta_1) = \left(d, \frac{n_1}{\delta_1}\right) = \left(d_1, \frac{n}{\delta}\right) = 1$, откуда

$$\begin{Bmatrix} \frac{n}{\delta} \\ d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{n_1}{\delta_1} \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{nn_1}{\delta\delta_1} \\ dd_1 \end{Bmatrix}.$$

Подставляя это в равенство (10), легко убедиться в справедливости (9).

Формулы (8) и (9) дают нам возможность свести вычисления символов $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ к нахождению их для степеней простых чисел.

Рассмотрим выражение $\begin{Bmatrix} l^k \\ l^{k_1} \end{Bmatrix} = \sum\limits_{(s,l^k)=1} \tau^{l^{k_1}s}$. Необходимо различать два случая: $k_1 \geq k$ и $k_1 < k$.

В первом случае каждый член суммы равен единице, а потому

$$\begin{Bmatrix} l^k \\ l^{k_1} \end{Bmatrix} = \varphi(l^k) = l^{k-1}(l-1).$$

Во втором случае мы воспользуемся равенством

$$1 + \tau^{l^{k_1}} + \tau^{l^{k_1}\cdot 2} + \cdots + \tau^{l^{k_1}(l^k-1)} = 0.$$

В этом равенстве оставим в левой части те члены, в которых коэффициенты при l^{k_1} взаимно просты с l. Правая же часть будет заключать все возможные члены, коэффициенты при l^{k_1} в которых делятся на l. Поэтому при $k_1 < k$

$$\begin{Bmatrix} l^k \\ l^{k_1} \end{Bmatrix} = -\sum_{s=0}^{l^{k-1}-1} \tau^{l^{k_1+1}s}. \tag{11}$$

Здесь опять могут встретиться два случая: $k_1+1=k$ и $k_1+1<k$. В первом случае каждый из членов обратится в единицу, и потому

$$\begin{Bmatrix} l^k \\ l^{k-1} \end{Bmatrix} = -l^{k-1}.$$

Во втором же случае сумма обратится в нуль. Итак, мы получим

$$\left\{l^k l^{k_1}\right\} \begin{aligned} &= l^{k-1}(l-1) \qquad \text{при } k_1 \geq k, \\ &= -l^{k-1} \qquad \text{при } k_1 = k-1, \\ &= 0 \qquad \text{при } k_1 < k-1. \end{aligned} \tag{12}$$

Перейдем теперь к вычислению символа $\begin{bmatrix} l^k \\ l^{k_1} \end{bmatrix}$. Сумма в выражении (7′) будет пробегать ряд чисел

$$l^k, l^{k-1}, \ldots, l, 1,$$

и это выражение перепишется так:

$$\begin{bmatrix} l^k \\ l^{k_1} \end{bmatrix} = l^{k(p-1)} \sum_{s=0}^{k} l^{ps} \begin{Bmatrix} l^{k-s} \\ l^{k_1} \end{Bmatrix} =$$

$$l^{k(p-1)} \left[l^{pk} \begin{Bmatrix} 1 \\ l^{k_1} \end{Bmatrix} + l^{p(k-1)} \begin{Bmatrix} l \\ l^{k_1} \end{Bmatrix} + \cdots + l^{p(k-k_1)} \begin{Bmatrix} l_{k_1} \\ l^{k_1} \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. + l^{p(k-k_1-1)} \begin{Bmatrix} l^{k_1+1} \\ l^{k_1} \end{Bmatrix} + \cdots + l^{p\cdot 0} \begin{Bmatrix} l_k \\ l^{k_1} \end{Bmatrix} \right]. \tag{13}$$

Пользуясь таблицей (12), получим окончательно

$$\begin{bmatrix} l^k \\ l^{k_1} \end{bmatrix} = l^{k(p-1)} [l^{pk} + l^{p(k-1)}(l-1) + l^{p(k-2)+1}(l-1) +$$

$$+ \cdots + l^{p(k-k_1)+k_1-1}(l-1) - l^{p(k-k_1-1)+k_1}] =$$

$$= \frac{l^{p(k-k_1-1)+k_1}(l^p-1)(l^{(p-1)(k_1+1)}-1)}{l^{p-1}-1} \tag{14}$$

при $k_1 < k$. При $k_1 \geq k$ мы будем иметь

$$\begin{bmatrix} l^k \\ l^{k_1} \end{bmatrix} = \frac{l^{pk-1}(l^p-1) - l^{k-1}(l-1)}{l^{p-1}-1}. \tag{14′}$$

Общее выражение для $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}$ мы получим по формуле

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^{k_1} l_2^{k_2} \cdots l_s^{k_s} \\ l_1^{k_1'} l_2^{k_2'} \cdots l_s^{k_s'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^{k_1} \\ l_1^{k_1'} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} l_2^{k_2} \\ l_2^{k_2'} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} l_s^{k_s} \\ l_s^{k_s'} \end{bmatrix}". \tag{15}$$

§7. Задача, обратная обращению абелевых интегралов

Задача обращения абелевых интегралов ранга p приводит к ϑ-функциям от p-переменных. Шоттки указал, что при $p \geq 4$ эти ϑ-функции не самого общего вида, и для $p = 4$ нашел соотношение между параметрами, необходимое и достаточное для того, чтобы ϑ-функция от четырех переменных происходила от абелевых интегралов ранга 4. Пуанкаре дал подобное соотношение для малых значений параметров, но зато дал перспективу общего решения задачи, указав на ее связь с задачей о поверхностях переноса.

Мои занятия этим вопросом привели меня к нижеследующему плану, который сохранился в моих бумагах.

"Задача, обратная проблеме обращения абелевых интегралов
(Проспект)

Для того чтобы каждая задача могла считаться вполне решенной, необходимо уметь решать или по крайней мере точно формулировать сущность задачи, ей обратной. Это следовало бы помнить авторам, занимающимся проблемой обращения абелевых интегралов. Задача, ей обратная, должна заключаться в том, что должны быть указаны пути, по которым возможен переход от ϑ-функций к соответствующим им алгебраическим образам. Ведь смысл различных методов задачи обращения, разрабатываемых с такими деталями до настоящего времени, может быть выяснен только тогда, когда будет известно, в каком отношении стоит результат к исходному пункту; а для этого необходимо уметь совершить обратный процесс. Иначе для оценки того или другого метода мы не будем иметь никакого критерия, и все они будут носить характер выкладок, лишенных какой-либо руководящей идеи. Мы не знаем в самом деле, к чему мы должны стремиться при выборе той или иной комбинации ϑ-функций, если не знаем, какие комбинации достаточны и, с другой стороны, наиболее удобны для того, чтобы привести нас к алгебраическим функциям, от которых мы исходили.

Между тем названная задача едва только намечена в сравнительно немногих статьях, притом намечена настолько неясно, что многие специалисты по алгебраическим функциям не отдают себе отчета в том, что обратный переход представляет собой особую, притом гораздо более трудную, задачу. Так, Шталь, цитируя в 130 томе Journ. f. Math. “Abriss” Шоттки, говорит, что “Шоттки выбирает обратный путь”, но ни слова не упоминает о том, что только такой путь дает настоящее решение задачи и что поэтому работа Шоттки представляет собой существенный шаг вперед по сравнению с более ранними исследованиями по теории абелевых функций 3-го ранга.

История интересующей нас задачи такова. Для $p = 1$ она решается весьма просто. Все необходимое для ее решения было сделано еще Абелем и Якоби. Лиувилль первый отметил важность задачи тем, что начал теорию эллиптических функций с изучения функций двоякопериодических. Гораздо труднее решается задача для $p = 2$. Тем не менее первые исследователи этого случая, Гепель и Розенгейн, начинают свою теорию как раз с ϑ-функций двух переменных, которые приводят их к ультраэллиптическим интегралам 1-го класса. Для $p = 3$ обратная задача была поставлена уже не сразу. Риман и Вебер (Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3, Berlin, 1876) исследовали этот случай, начиная с алгебраических кривых, и только вслед за этим Шоттки (“Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen vom drei Variablen”, Lpz., 1880) вполне решил обратную задачу.

Хуже обстоит дело для случаев $p \geq 4$. Задача усложняется тем, что, как известно, обычная задача обращения решается посредством ϑ-функций не общего типа, а некоторых особенных, между модулями которых существует

$$\frac{p(p+1)}{2} - (3p-3) = \frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

соотношений. Шоттки нашел эти соотношения для $p = 4$ (здесь существует единственное соотношение, так как $\frac{(4-2)(4-3)}{2} = 1$) в Bd. 102 Journ. f. Math. В своем исследовании он применяет частный прием, который не поддается непосредственному обобщению для большего числа переменных. Что касается задачи перехода к алгебраическим функциям, то даже в том случае, когда удовлетворено соотношение, она еще ждет своего разрешения.

Между тем решение задачи возможно и в общем случае, как утверждал Вейерштрасс (Journ. f. Math. 89) и окончательно доказали Пуанкаре и Пикар (C.R. **97**, 1883). Конечно, при этом ранг полученных алгебраических функций, должен быть больше числа переменных в ϑ-функциях. Вопросом о роли так наз. "неримановых ϑ-функций" в алгебраических функциях занимались Шоттки (Journ. f. Math. 106 и несколько статей в Sitzber. Berl. Akad.) и Юнг (Journ. f. Math. 126, 128, 130 и статьи в Sitzber. Berl. Akad.). Исследования у них производятся так: из алгебраических функций особого вида (квадратные радикалы из алгебраических функций) получаются ϑ-функции, которые разлагаются на два множителя; затем доказывается, что одни из множителей не принадлежат к риманову типу, и подсчитывается число параметров. Юнгу удалось получить функции от четырех переменных с 10, т. е. максимальным числом параметров. Но как произвести обратный переход Юнг не знает.

Существует другое направление в нашей задаче, которое позволяет более определенно наметить общий ход задачи. При исследовании поверхностей переноса Ли открыл, что поверхности могут быть образованы посредством двух существенно разных параллельных переносов кривой в пространстве тогда и только тогда, когда координаты поверхностей могут быть выражены в виде сумм абелевых интегралов 1-го рода (Lpz. Ber., 1896, 1897). Эта теорема была доказана Пуанкаре для пространств любого числа измерений (Bull. Soc. Math. Fr. **29**, 1901). При помощи этой теоремы решение нашей задачи представляется в таком виде: заданная ϑ-функция p переменных приравнивается нулю. Известно, что такое уравнение удовлетворится, если вместо переменных мы подставим суммы $p-1$ вполне определенных абелевых интегралов 1-го рода. Новые независимые переменные войдут так, что получится поверхность переноса. Все это, разумеется, в предположении, что мы имеем дело с римановыми ϑ-функциями. Теорема Ли учит нас обратному: если окажется, что наша поверхность есть поверхность двойного переноса и если мы сумеем найти на ней *линии переноса*, то отсюда мы уже легко найдем все независимые интегралы 1-го рода, т. е. так наз. *главную кривую* искомого поля алгебраических функций. Главная же кривая вполне определяет поле (за исключением случая ультраэллиптических интегралов).

Пуанкаре в своей статье в Journ. de math **1**, стр. 5, 1895, идет приблизительно таким путем для нахождения условий того, чтобы данная ϑ-функция была римановой. Но так как нахождение на поверхностях линий переноса предстевляло собой неразобранную задачу, то Пуанкаре вынужден был ограничиться тем, что решил задачу для ϑ-функций, *весьма близких к эллиптическим*, даже не повторив, таким образом, результатов Шоттки.

Такое положение вопроса заставило меня прежде всего заняться нахождением линий переноса, если они существуют, на заданной поверхности. Я нашел, что линии переноса удовлетворяют трем уравнениям

$$\begin{aligned}
&z - f(x, y) = 0,\\
&p + q\tau - \zeta = 0,\\
&r + 2s\tau + t\tau^2 + q\tau' - \zeta' = 0;
\end{aligned}$$

$\tau, \zeta, \tau', \zeta'$ здесь постоянны вдоль каждой линии переноса и меняются при переходе с одной линии на другую. Обратно, пользуясь методом, аналогичным доказательству Коши–Липшица существования интеграла, можно доказать, что если приведенные три уравнения допускают континуум решений, то этот континуум и будет линией переноса. Получаемое при этом соотношение между τ и ζ дает уравнение так наз. характеристики линий переноса. Результат допускает легкое обобщение на любое число измерений.

Итак, чтобы решить основную задачу, необходимо выписать для поверхности $\vartheta = 0$ приведенные три уравнения. Чтобы они допускали континуум решений, необходимо, чтобы третье уравнение было следствием двух других. Чтобы избежать задачи исключения переменных из трансцендентных уравнений, обратим внимание на то, что при $\vartheta = 0$ частная производная $\frac{\partial\vartheta}{\partial u_i}$ равна выражению,

$$\frac{1}{\vartheta_\alpha}\left[\vartheta_\alpha \frac{\partial\vartheta}{\partial u_i} - \theta \frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial u_i}\right],$$

где ϑ_α — функция с другой характеристикой. Последнее же выражение есть ϑ-функция. Подобным же образом можно выразить через ϑ-функции все три уравнения. Соотношение же между ϑ-функциями всегда должно быть, как известно, алгебраическим.

Поэтому нахождение условий того, чтобы наши уравнения находились между собой в зависимости, есть задача алгебраическая. Если задача допускает решение, то мы должны будем получить зависимость между τ и ζ. Легко понять, что последняя зависимость и будет уравнением главной кривой искомого поля алгебраических функций?.

В дальнейшем мне не удалось выполнить ни одного из заданий, намеченных в этом плане. Техника вычислений с ϑ-функциями затрудняла меня и осталась до сих пор мне недоступной. Но этот план натолкнул меня на два новых круга вопросов: поверхности переноса, с одной стороны, и исключение переменных из трансцендентных уравнений, с другой. Второй из этих вопросов побудил меня заняться исследованием корней целых трансцендентных функций и, в частности, вопросом об их вещественности.

§8. Поверхности переноса

Я поставил себе задачу: найти на заданной поверхности

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

линию переноса, т. е. линию, которую можно передвигать параллельно самой себе, не сводя ее с поверхности. Для этого необходимо существование бесконечно малого, но постоянного вдоль линии вектора $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, не сводящего линии с поверхности. Обозначая $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ соответственно через τ и ζ, получим для линии переноса уравнение

$$p + q\tau - \zeta = 0, \tag{2}$$

где τ, ζ — постоянные, а $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Кроме того, после сдвига линия тоже должна удовлетворять уравнению типа (2) с другими значениями постоянных τ, ζ . Поскольку ζ остается постоянным на линиях, на которых постоянно τ, его можно на всей поверхности считать функцией от τ. Полагая $\zeta' = \frac{d\zeta}{d\tau}$ и обозначая через ψ новую постоянную вдоль линии переноса, мы получим третье условие в следующем виде:

$$r + 2s\tau + t\tau^2 + (q - \zeta')\psi = 0, \tag{3}$$

где

$$r = \frac{\partial^2 f}{dx^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Оказалось, что существование зависящих друг от друга функций τ, ζ, ψ, точки на поверхности (1), удовлетворяющих условиям (2) и (3), достаточно для того, чтобы поверхность (1) была поверхностью переноса. Я доказал это не сразу, а предварительно убедился на примерах в том, что система уравнений (1), (2), (3) приводит к нахождению линий переноса для поверхностей, про которые я заранее знал, что они являются поверхностями переноса. Теорема о достаточности представлялась мне теоремой того же типа, как, например, следующая:

Если кривая имеет в каждой точке порядок касания выше нормального (*т.е. по крайней мере* 4-*го*) *со своим кругом кривизны, то она сама есть окружность.*

Наконец, мне удалось доказать достаточность этой теоремы путем разделения траектории линии на сколь угодно большое число отрезков. Особо выделился случай линейчатых поверхностей, когда линия не пробегает всей поверхности, а скользит вдоль себя. Это доказательство опубликовано в [1].

Я сделал об этих своих результатах доклад, на котором присутствовал А.П. Котельников. Через некоторое время А.П. Котельников сделал доклад, в котором предложил новое, более простое и естественное доказательство этой теоремы. Впоследствии я восстановил это доказательство по памяти и опубликовал его в [3].

Пользование этим методом для нахождения линий переноса на поверхностях требует исключения переменных из системы уравнений, так что может быть применимо только к алгебраическим поверхностям. Желание применять его к трансцендентным поверхностям заставило меня заняться вопросом об исключении переменных из трансцендентных уравнений (см. след. параграф). Это оказалось бесполезным для поверхностей переноса, тем более что в одесский период (около 1924 года) я вновь занялся поверхностями переноса и получил метод, не требующий применять исключение.

Вскоре по приезде в Одессу я познакомился с книгой Бляшке "Differentialgeometrie" и узнал, что Рейдемейстер получил признак того, что поверхность есть поверхность переноса (он состоит из двух уравнений 5-го порядка и настолько сложен, что в явном виде никем не был написан), а также получил весьма простой вывод результатов Ли о поверхностях двойного переноса. Результаты Рейдемейстера были получены при помощи результатов аффинной геометрии, в частности теории кубических дифференциальных форм и, таким образом, доступны только специалистам-геометрам. Более элементарный вывод был дан Шефферсом; однако ему было не известно уравнение (3); вместо него он пользовался соотношением

$$r + s(\tau_1 + \tau_2) + t\tau_1\tau_2 = 0 \tag{4}$$

для сопряженных значений функции τ. Это не давало ему возможности распространить теорию на поверхности, образуемые движениями более сложного типа, чем параллельный перенос.

Занявшись поверхностями переноса во второй раз, я выразил условие (3) в виде равенства нулю якобиана от выражения τ и $\psi = \frac{r+2s\tau+t\tau^2}{\zeta'-q}$ и получил уравнение в полных дифференциалах

$$M(R_x dx + R_y dy) - DCd\tau = 0 \tag{5}$$

относительно x, y, τ, которое интегрируется тогда и только тогда, когда поверхность (1) есть поверхность переноса. Здесь

$$R = p + q\tau,\ C = r + 2s\tau + t\tau^2,\ M = C_x R_y - C_y R_x,\ D = rt - s^2.$$

Если условие интегрируемости уравнения (5) выполняется тождественно, то τ, как функция от x, y, удовлетворяющая уравнению (5), содержит произвольную постоянную, а потому поверхность (1) допускает континуум систем линий переноса. Может еще случиться, что условие интегрируемости

$$f(\tau) = \left(\frac{M}{D}\right)_x R_y - \left(\frac{M}{D}\right)_y R_x = 0 \tag{6}$$

тождественно не выполняется, но определяет τ, как функцию от x, y, удовлетворяющую уравнению (5). В этом случае, поскольку $f(\tau)$ есть полином 4-й степени относительно τ, поверхность (1) имеет или 2, или 4 системы линий переноса (они всегда входят попарно). Отсюда получается теорема:

А) *Поверхность переноса имеет или* 2, *или* 4, *или континуум систем линий переноса.*

Все получаемые уравнения значительно упрощаются, если мы перейдем к лежандровым координатам p, q. Уравнение (5) имеет вид

$$N(dp+\tau dq)-Cd\tau=0, \tag{5'}$$

где

$$C=r+2s\tau+t\tau^2, \qquad N=C_p\tau-C_q;$$

уравнение (6) — вид

$$f(\tau)=N_p\tau-N_q=0. \tag{6'}$$

Эти формулы дают возможность получить простые выражения для декартовых координат поверхности, когда уравнение ($6'$) удовлетворяется тождественно. Получаются интегралы от полных дифференциалов, имеющих вид дробных рациональных функций от p, q; в знаменателе их стоит полином 4-й степени. Окончательно я не получил общих формул; они, впрочем, были давно получены Ли совсем другим путем.

В случае, когда все 4 корня уравнения (6) удовлетворяют уравнению (5), этот же метод дает возможность получить выражения декартовых координат поверхности в виде суммы абелевых интегралов.

Описанный метод дал мне также возможность доказать этот факт для случая пространства любого числа измерений. Для случая 4 измерений он был доказан Ли. Пуанкаре дал очень короткое доказательство для общего случая, но при этом он опирается на следующую сомнительную теорему:

Б) *Если кривая $f(x,y)=0$ пересекается любой прямой не более чем в n точках, то это алгебраическая кривая степени не выше n.*

Я доказал эту теорему для того случая, когда решения уравнения в полных дифференциалах, соответствующего уравнению ($5'$), не содержит ни одной произвольной постоянной. Остальные случаи не были исследованы ни Ли, ни Пуанкаре, ни мной.

После того как было доказано, что декартовы координаты выражаются как суммы абелевых интегралов, затруднение вызвало определение ранга алгебраического образа, которому они соответствуют. Мне удалось преодолеть это затруднение, воспользовавшись теоремой Клиффорда, которая в терминах арифметической теории алгебраических функций формулируется так:

Если m — порядок и s — измерение какого-нибудь класса дивизоров, то

$$m \geq 2s - 2.$$

Если $m = 2s - 2$, то класс совпадает с классом дифференциалов, за исключением случая, когда поле алгебраических функций (= образ) ультраэллиптическое.

Как раз случай $m = 2s - 2$ имеет место в многомерных поверхностях переноса. Отсюда следует, что ранг поля равен s, т. е. в нашем случае $n + 1$, где n — измерение пространства, в котором задана поверхность переноса.

Я придумал для теоремы Клиффорда доказательство, основанное на арифметической теории алгебраических функций. Впоследствии, уже в начале казанского периода, я решил обобщить теорему Клиффорда. Полученное мною обобщение опубликовано в "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo"[5] и формулируется так:

Если поле алгебраических функций содержит "специальный" класс дивизоров измерения n и порядка

$$m = 2 + r - 2,$$

где

$$2n - r - 4 > 0,$$

то для ранга p этого поля имеет место

$$p \leq n + 2r + \left[\frac{2r(r+1)}{2n - r - 4}\right],$$

если только поле не ультраэллиптическое.

Описанный метод допускает обобщение на группы других преобразований, чем параллельных переносов. Задача формулируется так. В 3-мерном пространстве заданы поверхность и группа преобразований G. Требуется найти на поверхности систему таких линий, чтобы через каждую точку поверхности проходила одна линия и чтобы для каждой пары этих линий в группе G можно было найти преобразование, переводящее каждую точку первой линии в какую-то точку второй. Если такие линии существуют, то будем говорить, что поверхность допускает системы импримитивности относительно G. Если в качестве G взята (6-параметрическая) полная группа движений, то поверхностями, удовлетворяющими условиям задачи, являются те, которые могут быть получены произвольным движением пространственной кривой.

Чтобы найти линии импримитивности на заданной поверхности, составляем уравнения

$$\sum \lambda_j X_j(z-f) = 0, \tag{7}$$

$$\sum \lambda_i \lambda_j X_i X_j(z-f) + \psi \sum X_j(z-f)\lambda_j(\lambda_1) = 0, \tag{8}$$

где

$$X_j(r-f) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

— инфинитезимальные операторы группы G, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_r; \psi$ — функции точки поверхности, остающиеся вдоль искомых линий постоянными. Исключая $\lambda_3, \ldots, \lambda_r, \psi$, мы получим систему из $r-1$ уравнений в частных производных $(r-2)$-го порядка, определяющих функцию λ_2. Их условия интегрируемости представятся в виде $(r-1)$-го уравнения в частных производных $(2r-1)$-го порядка от z по x, y.

Особый интерес представляют случаи $r = 3$, к которым относятся и поверхности параллельного переноса. Если группа G не коммутативна, то линии импримитивности уже не могут меняться ролями с траекториями их точек, так как последние являются линиями импримитивности со взаимной группой, которая совпадает с G только в случае коммутативности. Здесь тоже справедлива теорема о том, что поверхность может иметь или континуум систем импримитивности, или не более четырех; вопрос о том, может ли она иметь все 4 или не более 2, остается нерешенным. Кроме того, интересен вопрос, к каким новым функциям, обобщающим абелевы интегралы, приводит поверхность с максимальным числом систем импримитивности.

В 1925 г. я был на съезде в Данциге, где делал доклад о поверхностях переноса и виделся там с Рейдемейстером. При проезде через Берлин я зашел к Шефферсу, который показал в своей тетради, что он доказал теорему A). Он не мог, как он сказал мне, обобщить свой метод на случай не коммутативной группы, и хотел, чтобы я получил поверхность, допускающую более чем две системы импримитивности для общей группы движения.

§9. Результант от трансцендентных функций

Как я уже упоминал, желание получить условие того, чтобы $\vartheta = 0$, где $\vartheta - \vartheta$ — функция, была поверхностью переноса, привело меня к задаче исключения переменных из трансцендентных уравнений.

Если заданы полиномы $f(x), g(x)$, имеющие корнями, соответственно, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, то, с точностью до постоянной, их результант можно представить в виде

$$\prod_{\mu,\nu} \left(1 - \frac{\alpha_\mu}{\beta_\nu}\right).$$

Естественно рассмотреть полином

$$h(x) = \prod_{\mu,\nu} \left(x - \frac{\alpha_\mu}{\beta_\nu}\right).$$

имеющий корнями *частные* $\frac{\alpha_\mu}{\beta_\nu}$ от корней обоих заданных полиномов, а потом считать результант значением этого полинома при $x = 1$. Однако если обобщить понятие $h(x)$ на случай, когда $f(x)$ и $g(x)$ — целые трансцендентные функции, то $h(x)$ уже не будет целой функцией, так как ее корни, $\frac{\alpha_\mu}{\beta_\nu}$, будут иметь точкой сгущения не только $x = \infty$, но и другие, в частности $x = 1$. Поэтому мы должны составлять результант от функций, имеющих точки сгущения нулей в разных местах. Проще всего составить результант от функций $g(x)$ и $f\left(\frac{1}{x}\right)$ где $g(x)$ и $f(x)$ — целые трансцендентные функции. Если последние имеют корнями

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$$
$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots,$$

то в качестве $h(x)$ мы должны взять функцию, имеющую корнями всевозможные *произведения* $\alpha_\mu\beta_\nu$, которые имеют точкой сгущения только $x = \infty$. Поэтому в качестве $h(x)$ всегда можно взять целую трансцендентную функцию.

Обратимся на время опять к полиномам. Коэффициенты полинома $h(x)$ выражаются через коэффициенты $f(x)$ и $g(x)$ весьма сложно. Мне пришло в голову выразить через суммы степеней

$s_k = \sum \frac{1}{\alpha_\mu^k}$ корней $f(x)$ и $\sigma_k = \sum \frac{1}{\beta_\mu^k}$ корней $g(x)$ суммы Σ_k степеней корней $h(x)$. Получился весьма простой и очевидный результат

$$\Sigma_k = s_k \sigma_k. \tag{1}$$

Впоследствии, уже в 1936 г., изучая сочинения Лагранжа, я увидел, что у него была довольно близкая идея, руководившая им при составлении результанта от полинома. Я отметил это в юбилейной статье об алгебраических и арифметических работах Лагранжа [3].

Из соотношений (1) было нетрудно перейти к логарифмическим производным $\frac{f'(x)}{f(x)}$ и $\frac{g'(x)}{g(x)}$, имеющим, как известно, $-s_k$ и $-\sigma_k$ в качестве коэффициентов разложения

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -s_k - s_2 x - s_3 x^2 - \ldots,$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = -\sigma_k - \sigma_2 x - \sigma_3 x^2 - \ldots .$$

Из (1) следует, что функция $\frac{h'(x)}{h(x)}$ имеет коэффициентами разложения — $\sigma_k s_k$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = -s_1\sigma_1 - s_2\sigma_2 x - s_3\sigma_3 x^2 - \ldots .$$

Вместе с тем точки α_μ служат полюсами функции $\frac{f'(x)}{f(x)}$, β_ν — функции $\frac{g'(x)}{g(x)}$, $\alpha_\mu\beta_\nu$ — функции $\frac{h'(x)}{h(x)}$. Чтобы перейти от аналогии с полиномами, надо было доказать теорему:

Если мероморфные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют только простые полюсы, притом в точках α_μ и, соответственно, β_ν, то функция $\theta(z)$, получаемая из $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ так:

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

$$\psi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

$$\theta(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \ldots,$$

имеет также простые полюсы, притом в точках $\alpha_\mu\beta_\nu$.

Ее доказательство оказалось очень простым. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — система наименьших по модулю полюсов функции $\varphi(x)$, и A_1, A_2,

$\ldots, A_m$ — их вычеты, то

$$\varphi(z) - \frac{A_1}{z - \alpha_1} - \cdots - \frac{A_m}{z - \alpha_m}$$

регулярна внутри бо́льшего круга, чем $\varphi(z)$. Аналогично

$$\psi(z) - \frac{B_1}{z - \beta_1} - \cdots - \frac{B_n}{z - \beta_n}.$$

Нетрудно доказать, что функция

$$\theta(x) + \sum_{\mu,\nu} \frac{A_\mu B_\nu}{z - \alpha_\mu \beta_\nu} \tag{2}$$

имеет больший круг регулярности, чем $\theta(z)$. Переходя к $m \to \infty, n \to \infty$, докажем справедливость теоремы.

Б.Н. Делоне уверял меня, что такая простая теорема не может быть до сих пор неизвестной. И действительно, она оказалась частным случаем теоремы Адамара, и я нашел ее доказательство в монографии Виванти–Гуцмера по теории аналитических функций. Адамар для получения $\theta(z)$ или, как ее принято называть, "адамаровского произведения", пользуется не рядами, а интегралами

$$\theta(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) \psi(z e^{-i\theta}) d\theta. \tag{3}$$

Итак, процесс получения результанта для $f(z)$, $g\left(\frac{1}{z}\right)$, где $f(z)$, $g(z)$ — целые трансцендентные функции, таков. Составляем логарифмические производные $\frac{f'(x)}{f(x)}, \frac{g'(x)}{g(x)}$, и для них адамаровское произведение — $\theta(z)$. Затем находим функцию $\Phi(z)$, логарифмической производной от которой является $\theta(z)$

$$\Phi(z) = e^{\int \theta(z) dz}.$$

$\Phi(z)$ — целая функция. При $x = 1$ $\Phi(z)$ превращается в искомый результант.

Эти исследования были мною опубликованы позже, в 1924 г., в казанском журнале, куда я прислал статью из Одессы (меня пригласил сотрудничать в Казани проф. Н.Н. Парфентьев, с которым я познакомился в Москве, в общежитии научных работников) [1]. В этой статье я дал также общее доказательство теоремы

Адамара для однозначных функций. Затем М.Г. Крейн нашел это доказательство недостаточным, и я дополнил его в особом дополнении к статье.

Мне не удалось применить свой метод исключения к функциям, для которых этот метод предназначался. Впоследствии, в 1928–1929 гг., я применил его к нахождению условия для *однолистности* (schlicht) функций внутри $|z| < 1$ [2]. Его сущность состоит в следующем. Чтобы $f(z)$ была однолистна внутри $|z| < 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$K(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

не обращалась в нуль, если x, y принимают внутри круга $|z| < 1$ всевозможные значения. Можно ограничиться значениями $x = z, y = zu$, где $u = e^{i\theta},\ |u| = 1$. (Последняя лемма впоследствии была получена Дьендонне, из которой он получил весьма просто условия Бибербаха $|a_n| \leq n$ для вещественных однолистных функций.)

Составляя от $K(u)$ и сопряжено комплексной функции $\overline{K}(u)$ логарифмические производные относительно u, от последних — адамаровское произведение $\varphi(u)$, а затем

$$\Phi(u) = e^{\int \varphi(u) du},$$

мы получим следующее условие, необходимое и достаточное для однолистности:

$\Phi(1)$ *как вещественная функция от z должна быть положительной при всех $|z| < 1$.*

Впоследствии я узнал, что для случая полиномов такой же результат был получен Бибербахом еще в 1916 г. Мой результат может легко прилагаться к элементарным функциям, напр., типа $f(z, e^z)$. К сожалению, он не дает решения проблемы коэффициентов для однолистных функций, т. е. соотношений между конечным числом первых коэффициентов однолистных функций.

§10. Критерий вещественности корней трансцендентных уравнений

Мои занятия трансцендентными уравнениями побудили меня распространить на них известный критерий вещественности корней:

Число отрицательных квадратов в разложении формы

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} s_{m+i+j} x_i x_j$$

равно при четном m числу пар мнимых корней, нечетном m — сумме числа пар мнимых и числа отрицательных корней.

Этот критерий был уже распространен *Громмером* (Journ. f. Math. **144**, 1914), но его обобщение касалось только целых трансцендентных функций конечного порядка и, кроме того, было выведено при помощи очень трудной теории форм от бесконечного числа переменных.

Исходным пунктом моих рассуждений была полученная еще при построении результанта (см. §9) формула

$$s_k = \frac{1}{\alpha_1^k} + \frac{1}{\alpha_2^k} + \ldots \frac{1}{\alpha_p^k} + \varepsilon_{k,p} \frac{1}{\alpha_p^k}, \tag{1}$$

где s_k — коэффициенты разложения логарифмической производной

$$-\frac{f'(z)}{f(z)} = s_1 + s_2 z + s_3 z^2 + \ldots,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ — наименьшие по модулю корни целой трансцендентной функции $f(x)$:

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_p| \leq |\alpha_{p+1}|,$$

а $\varepsilon_{k,p}$ — величина, стремящаяся к нулю при возрастании k. Эта формула позволила мне легко доказать, что разложение формы

$$\sum_{i,j=0}^{p-1} s_{m+i+j} x_i x_j \tag{2}$$

имеет при достаточно большом четном m столько отрицательных квадратов, сколько пар мнимых содержится среди корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, а при достаточно большом нечетном m — сколько пар мнимых плюс отрицательных корней содержится среди $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. При этом число m должно в общем случае расти с ростом p, которое мы можем брать произвольно, лишь бы соблюдалось неравенство

$$|\alpha_p| < |\alpha_{p+1}|.$$

В частности, для того чтобы все корни функции $f(z)$ были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы все варианты

$$D_M^p = \begin{vmatrix} s_m, & s_{m+1}, & \dots, & s_{m+p-1} \\ s_{m+1}, & s_{m+2}, & \dots, & s_{m+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m+p-1}, & s_{m+p}, & \dots, & s_{m+2p-2} \end{vmatrix} \quad (p = 1, 2, \dots) \tag{3}$$

при достаточно большом четном m были положительны. Число m (вернее, его минимум) должно устанавливаться для каждого значения p.

Если функция $f(x)$ имеет конечный порядок, то существует минимум m, начиная с которого все варианты D_m^p, независимо от значения p, делаются положительными.

Обратно, если для какой-нибудь функции $f(z)$ все варианты D_m^p при всех p и фиксированном четном m положительны, то все корни $f(z)$ — вещественны и, кроме того, $f(z)$ есть целая функция конечного порядка. В таком виде критерий был дан Громмером. Доказать его оказалось значительно труднее; Громмер для этого воспользовался теорией непрерывных дробей и теорией квадратичных форм от бесконечного числа переменных; я для доказательства, кроме других вспомогательных средств, доказал, что множество значений, принимаемых формой (2), совпадает со множеством значений выражения

$$J\left(-\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

Чтобы учесть значения, принимаемые функцией $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ за кругом сходимости, мне пришлось применить способ Линделёфа нахождения значений аналитической функции за кругом сходимости. Именно, Линделёф доказал, что значение функции

$$\phi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

внутри “миттаг — леффлеровской звезды” равно пределу значения целой функции

$$\phi_\sigma(z) = a_0 + a_1 \cdot 1^{-\sigma} \cdot z + a_2 \cdot 2^{-2\sigma} \cdot z^2 + \dots$$

$(\sigma > 0)$ при $\sigma \to 0$.

Последний результат получен мной уже в Одессе (1926–1928) и опубликован во второй статье [2]. Из него вытекает следующий критерий того, что функция $f(z)$ имеет все вещественные корни и, кроме того, порядок $\leq 1^*$:

$$J\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) : J(z) \leq 0.$$

Этот критерий может быть легко преобразован в следующий: функция $|f(x+iy)|^2$, рассматриваемая как функция от y, монотонно растет при удалении y от вещественной оси.

Несколько менее точные результаты были найдены в посмертных бумагах Иенсена и опубликованы Полиа в статье "Über die algebraischfunctionentheoretischen Untersuchungen von J.L.W. Jensen" (Del Kgl. Danske Videns. Selskab. VII, 17, 1927):

Если $F(x)$ есть вещественная целая функция порядка 1^*, то для вещественности ее корней необходимо и достаточно одно из следующих условий:

I. *Чтобы для всех вещественных значений x, y имело место*

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|F(x+iy)|^2 \geq 0.$$

II. *Чтобы для всех вещественных значений x все коэффициенты разложения $|F(x+iy)|^2$ по возрастающим степеням y были неотрицательны.*

Во второй из своих статей [2] я также опубликовал критерий Гурвица, т. е. критерий положительности вещественных частей корней целой функции $f(z)$ общего вида, от которой только потребовал, чтобы ее несопряженные корни имели разные модули и чтобы она не имела чисто мнимых корней. Для этого я, наряду с вариантой D^p_m строю еще варианту

$$\Delta^p_M = \begin{vmatrix} s_m, & s_{m+1}, & \ldots, & s_{m+p-1} \\ s_{m+2}, & s_{m+3}, & \ldots, & s_{m+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m+2p-2}, & s_{m+2p-1}, & \ldots, & s_{m+3p-3} \end{vmatrix}.$$

Пользуясь формулой (1), я получаю для отношений $\Delta^p_m : D^p_m$ следующую асимптотическую оценку, годную при больших значениях m:

$$\frac{\Delta_m^p}{D_m^p} = \prod_{\lambda<\mu\le p} (\beta_\lambda + \beta_\mu) + \eta_{m,p},$$

где при фиксированном p и растущем m величина $\eta_{m,p}$ стремится к нулю. Здесь $\beta_\lambda = \frac{1}{\alpha_\lambda}$. Отсюда получается следующий критерий:

Если в ряду корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ встречается d пар с отрицательными вещественными частями, то последовательность вариант

$$1,\ \frac{\Delta_m^1}{D_m^1},\ \frac{\Delta_m^2}{D_m^2}, \ldots, \frac{\Delta_m^p}{D_m^p}$$

при достаточно большом m образует d перемен знаков.

§11. Задача, обратная задаче Чирнгаузена

Эта задача была предложена Б.Н. Делоне. Она состоит в следующем. Даны два уравнения одной и той же степени и с изоморфными группами Галуа

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

$$\overline{x}^n + \overline{a}_1 \overline{x}^{n-1} + \cdots + \overline{a}_n = 0. \tag{2}$$

Требуется узнать, выражается ли каждый корень одного из уравнений рационально через каждый корень другого, и в утвердительном случае найти это выражение.

Б.Н. Делоне решил эту задачу для $n = 3$. Свой вывод он основал на существовании особых соотношений (сизигий) между инвариантами бинарных кубических форм. Этот вывод не может быть распространен на уравнения высших степеней, так как теория Эрмита о связи преобразования Чирнгаузена с инвариантами бинарных форм переходит для высших степеней в связь с совокупными инвариантами (см. Weber, Lenrbuch der Algebra, Bd. 2, стр. 240). Видя, что эта задача вполне укладывается в рамки теории Галуа, я решил ее в общих чертах для любой степени, а затем детально проделал все вычисления для 4-й степени. Должен сознаться, что теперь я не уверен в правильности произведенных вычислений. Я несколько раз предлагал своим ученикам в виде темы проверку и исправление своих результатов, но никто из них не довел дела до конца.

Сущность метода состоит в следующем. Образуем поле при помощи корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнения (1) и корней $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$

уравнения (2). Его группа Галуа есть делитель прямого произведения $G \times \overline{G}$ групп $G, \overline{G}$ уравнений (1) и (2). Между корнями обоих уравнений имеет место зависимость

$$\overline{x}_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \cdots + \alpha_{n-1} x_i^{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

в том и только том случае, если группа этого поля изоморфна с G (и с $\overline{G}$), т. е. если она совпадает с группой подстановок, параллельно производящих те же подстановки над $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$, что и над $x_1, x_2, \ldots, x_n$. К этой группе принадлежит функция

$$\xi = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \cdots + x_n\overline{x}_n.$$

Таким образом, надо составить уравнение для ξ, коэффициенты которого рационально выражались бы через коэффициенты уравнений (1) и (2). Его степень равна порядку группы G. Чтобы задача имела положительное решение, необходимо, чтобы это уравнение имело рациональный корень. С другой стороны, к этой же группе принадлежат функции

$$\xi_k = x_1^k\overline{x}_1, x_2^k\overline{x}_2, \ldots, x_n^k\overline{x}_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Если отбросить исключительные случаи, когда $\xi = \xi_1$ принадлежит к более низкой группе, чем остальные ξ_k, все ξ_k могут быть рационально выражены через ξ. Вместе с тем коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ искомого соотношения (3) рационально выражаются через $\xi, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$. В самом деле, умножая (3) последовательно на $1, x_i, x_i^2, \ldots, x_i^{n-1}$ и суммируя по i, получим

$$\begin{array}{llll} \overline{s}_1 & = n\alpha_0 & +s_1\alpha_1 + \cdots + s_{n-1} \cdot \alpha_{n-1}, \\ \xi & = s_1\alpha_0 & +s_2\alpha_1 + \cdots + s_n \cdot \alpha_{n-1}, \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \xi_{n-1} & = s_{n-1}\alpha_0 & +s_n\alpha_1 + \cdots + s_{2n-2} \cdot \alpha_{n-1}. \end{array} \tag{4}$$

Из этой системы уравнений мы получим $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, если ее определитель, равный дискриминанту уравнения (1), отличен от нуля, т. е. если уравнение (1) не имеет кратных корней.

Если нам известны рациональные выражения друг через друга функций от корней уравнений (1), (2), принадлежащих к нормальным делителям групп $G, \overline{G}$,то задача упрощается. Здесь мы не будем разбирать этих случаев.

При помощи этого метода я повторил результат Б.Н. Делоне относительно кубических уравнений. Вот это решение. Заданы кубические уравнения

$$x^3 + px + q = 0, \qquad \overline{x}^3 + \overline{p}\,\overline{x} + \overline{q} = 0.$$

Функция $\xi = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3$ удовлетворяет одному из двух кубических уравнений

$$\xi^3 - 3\overline{pp}\eta - \frac{27}{2}\overline{qq} \mp \frac{1}{2}\sqrt{D\overline{D}} = 0,$$

где $D, \overline{D}$ — дискриминанты обоих заданных уравнений. Чтобы задача допускала положительное решение, необходимо, чтобы $\sqrt{D\overline{D}}$ был рациональным числом. Далее, $u = x_1^2\overline{x}_1 + x_2^2\overline{x}_2 + x_3^2\overline{x}_3$ выражается через ξ так:

$$u = \frac{3q\overline{p}\eta - 3p^2\overline{q}}{\eta^2 - p\overline{p}}.$$

Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ соотношения

$$\overline{x}_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

определятся из уравнений

$$\begin{array}{llll} 0 & = 3\alpha_0 & & -2p\alpha_2, \\ \xi & = & -2p\alpha_1 & -3q\alpha_2, \\ u & = -2p\alpha_0 & -3q\alpha_1 & +2p^2\alpha_2. \end{array}$$

Подобным же образом я решил задачу для уравнений 4-й степени

$$x^4 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0,$$
$$\overline{x}^4 + \overline{p}_2\overline{x}^2 + \overline{p}_3\overline{x} + \overline{p}_4 = 0.$$

Составим кубические уравнения, которым удовлетворяют функции

$$z = x_1x_2 + x_3x_4, \qquad \overline{z} = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_3\overline{x}_4.$$

Пусть мы уже нашли величины

$$\zeta = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + z_3\overline{z}_3, \;\; u = z_1^2\overline{z}_1 + z_2^2\overline{z}_2 + z_3^2\overline{z}_3, \;\; \overline{u} = z_1\overline{z}_1^2 + z_2\overline{z}_2^2 + z_3\overline{z}_2^2.$$

Функция $T = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3 + x_4\overline{x}_4$ будет удовлетворять следующему уравнению 4-й степени:

$$T^4 - (2p_2\overline{p}_2 + 2\zeta)\cdot T^2 - 8p_3\overline{p}_3\cdot T \cdot -\frac{1}{8}\zeta^2 - \frac{8}{3}p_2\overline{u} - \frac{8}{3}\overline{p}_2u +$$
$$+ \frac{14}{3}p_2\overline{p}_2\zeta + p_2^2\overline{p}_2^2 + 16p_2^2\overline{p}_4 + 16\overline{p}_2^2p_4 + \frac{64}{3}p_4\overline{p}_4 = 0.$$

Для полного решения задачи необходимо еще уметь определять функции

$$\theta = \sum x_i^2 \overline{x}_i, \qquad Z = \sum x_i^3 \overline{x}_i.$$

Их выражения через T я приводить не буду.

Решение этой задачи было поводом недовольства мною Б.Н. Делоне, который считал, что с моей стороны нехорошо перехватывать его задачи, хотя формально он и не может быть в претензии, поскольку он делал о своем решении доклад в Математическом обществе.

Немного позднее, уже в Одессе (в 1924 г.), я воспользовался идеей метода решения этой задачи для нового доказательства теоремы Кронекера–Вебера:

Все поля с абелевой группой Галуа суть поля деления круга, т. е. их элементы рационально выражаются через некоторые корни из единицы. Область рациональности должна быть полем рациональных чисел.

Это доказательство [2], кроме того, пользуется теоремой монодромии (см. §3), а также p-адическими числами. В той своей части, где оно исследует иррегулярный случай, оно применяет прием Фуэтера, значительно упрощенный (Math. Ann. **75**, 1914). По существу оно мало отличается от доказательства, имеющегося в статье Шпейзера (Journ. f. Math. **149** 1920).

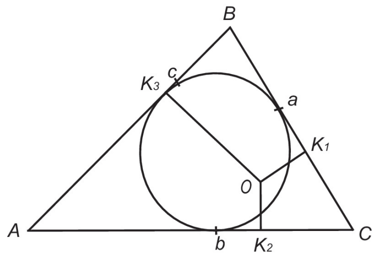
§12. Ширина контуров и тел

Эту работу следует скорее рассматривать как юношеское упражнение, поскольку она не содержит результатов, существенно новых по сравнению с полученными ранее. Я описываю ее только потому, что с ней у меня связаны большие переживания, как это часто бывает, когда самостоятельно переоткрываешь старые результаты.

Поводом к занятиям этим кругом задач у меня было чтение "Исчисления вероятностей" Маркова, где изложено обобщение задачи Бюффона о бросании иглы. Обобщение состоит в том, что бросается не игла, а выпуклая площадка, причем вероятность попадания площадки на линию пропорциональна длине дуги контура этой площадки. Марков выводит этот результат заменой площадки многоугольником и переходом к пределу. Я убедился, что этот результат весьма просто получается при помощи введения функции, которую во Франции называют *подэрой*, а Миньковский называет ее Stützfunktion. В моей работе вводятся обычные формулы, связанные с этой функцией, которые меня в то время так восхишали и которые в самом деле очень красивы. Затем дается общий вид кривых постоянной ширины, решается одна, довольно искусственная вариационная задача, а для случая трехмерного пространства выводятся очень простые выражения для средней и гауссовой кривизны.

У меня сохранился отрывок, посвященный контурам, вписанным в треугольник и допускающим вращение. Он не вошел в статью, и я его воспроизведу здесь.

“§**11.** Контуры постоянной ширины интересны для механики тем, что они могут быть помещены и вращаться внутри квадрата (см. Reuleaux). Не менее интересен вопрос о форме контуров, которые могут быть помещены внутри фигуры другого вида и во время вращения опираться на нее по крайней мере тремя точками. Разберем случай многоугольника. Каждая сторона в нем свыше трех соответствует лишнему условию, наложенному на вполне и без того определенный контур; поэтому ограничимся рассмотрением треугольника. Итак, рассмотрим контур (фиг. 8), заключенный внутри треугольника со сторонами a, b, c. Выберем произвольную точку O внутри контура и опустим из нее перпендикуляры на стороны треугольника. Во время вращения эти перпендикуляры будут составлять между собой постоянные углы (дополнительные к углам треугольника). Поэтому если мы положим



Фиг. 8.

$$\overline{OK}_1 = h_1 = h(\phi), \tag{72}$$

то

$$\overline{OK}_2 = h_2 = h(\phi + 180^\circ - C), \tag{73}$$

$$\overline{OK}_3 = h_3 = h(\phi - 180^\circ + B). \tag{74}$$

Необходимым условием того, чтобы контур касался всех сторон треугольника ABC, является равенство

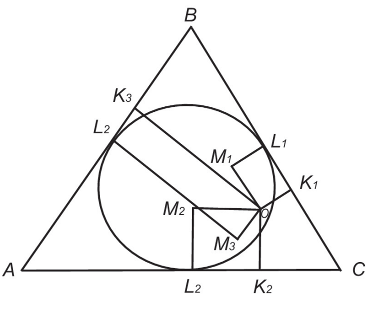
$$ah_1 + bh_2 + ch_3 = 2S, \tag{75}$$

где S — площадь треугольника ABC. Докажем, что это условие достаточно. Для этого поместим контур в произвольно выбранном нами положении внутри угла A и ограничим его касательной, параллельной BC, притом так, чтобы контур оказался внутри образовавшегося треугольника $AB'C'$. Если бы параллельная не совпала с BC, а заняла бы, например, положение $B'C'$, то выражение $ah_1 + bh_2 + ch_3$, равное сумме площадей треугольников AOC, AOB и $B'OC'$ было бы, очевидно, больше $2S$. Точно так же оно было бы меньше $2S$, если бы параллельная прошла бы ближе, чем BC, к вершине A.

Дифференцируя (75) и принимая во внимание (8) (см. статью [1]), мы придем к равенству

$$ak_1 + bk_2 + ck_3 = 0, \tag{76}$$

где величины k считаются положительными или отрицательными в зависимости от совпадения их отсчета с направлением вращения. Докажем, что это равенство выражает прохождение перпендикуляров к сторонам треугольника ABC в точках касания через одну точку. Для этого отнесем к точке O векторы K_1L_1, K_2L_2, K_3L_3 и будем считать полученные отрезки перпендикулярами из точки O на стороны какого-то нового треугольника. Этот треугольник будет подобен треугольнику ABC вследствие перпендикулярности его сторон, а потому его стороны должны быть пропорциональны a, b, c (фиг. 9). Поэтому равенство (76) будет выражать равенство нулю площади этого треугольника, т. е. то, что его стороны проходят через одну точку.



Фиг. 9.

Станем рассматривать скелет из скрепленных между собой DL_1, DL_2, DL_3, которые во все время движения должны проходить через точки касания и оставаться перпендикулярными к сторонам треугольника. Каждая из этих нормалей описывает внутри контура эволюту. Формула (11) (см. статью [1]) дает в связи с формулой (75)

$$aR_1 + bR_2 + cR_3 = 2S. \tag{77}$$

Это равенство показывает, что существует такая точка (подвижная), что перпендикуляры к сторонам треугольника ABC будут иметь величины R_1, R_2, R_3. Эта точка, как нетрудно убедиться из чертежа, является точкой пересечения нормалей ко всем трем эволютам. Итак, нормали в соответственных точках эволют пересекаются в одной точке.

Описанные свойства контуров, вращающихся внутри треугольника, дают нам средство для вычерчивания их дуг. Для этого надо задаться двумя произвольными дугами эволют и заставить скользить по ним две прямые скелета $DL_1L_2L_3$. Тогда третья прямая обогнет собой кривую, которая будет служить у нас третьей эволютой. Остается построить к каждой из них эвольвенту, соблюдая при выборе начальных радиусов условие (77).

Чтобы контур был замкнутый, нужны добавочные условия. Прежде всего обратим внимание на то, что три дуги эволюты должны переходить одна в другую, так как каждая из сторон треугольника ABC и, следовательно, скелета $DL_1L_2L_3$ обежит весь контур. Здесь необходимо будет различать случаи симметричного и несимметричного скелета. Разберем их отдельно.

1. Симметричный скелет. Его прямые составляют друг с другом углы по 120°. Этот случай более прост в том отношении, что каждому положению касательной на одной эволюте соответствует только одно положение скелета. Отметим кстати, что здесь эволюта не должна быть замкнутой."

Впоследствии, в начале одесского периода, я применил функцию h к доказательству теоремы о том, что всякая поверхность, все точки которой омбилические, имеет постоянный радиус кривизны. Это доказательство если не короче других существующих доказательств, то во всяком случае интересно своей связью с теорией симметрических матриц. У меня не сохранилось листочка, на котором оно было записано, так что я воспроизвожу его по памяти.

Рассмотрим $(n-1)$-мерную гиперповерхность в n-мерном пространстве. Обозначим через

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

длину перпендикуляра на касательную гиперплоскость, заданную направляющими косинусами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. В силу соотношения

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1$$

мы можем сделать ее однородной функцией 1-го измерения. Тогда декартовы координаты точки касания выразятся так:

$$x_i = \frac{\partial h}{\partial \alpha_i} = h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Главные радиусы кривизны ρ_i выразятся при помощи формул Родрига так:

$$dx_\nu + \rho_\nu d\alpha_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е.

$$\sum_\mu \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha_\mu \partial \alpha_\nu} d\alpha_\mu + \rho_\nu d\alpha_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда следует, что ρ_i суть корни уравнения

$$\begin{vmatrix} h_{11} + \rho, h_{12}, \ldots, h_{1n} \\ h_{21}, h_{22} + \rho, \ldots, h_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{n1}, h_{n2}, \ldots, h_{nn} + \rho \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

где $h_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha_i \partial \alpha}$. Один из корней этого уравнения равен нулю, так как из соотношений

$$\begin{gathered} \alpha_1 h_{11} + \alpha_2 h_{12} + \cdots + \alpha_n h_{1n} = 0, \\ \alpha_1 h_{21} + \alpha_2 h_{22} + \cdots + \alpha_n h_{2n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 h_{n1} + \alpha_2 h_{n2} + \cdots + \alpha_n h_{nn} = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

вытекающих из однородности h_i следует $|h_{ik}| = 0$.

Предположим, что остальные корни равны друг другу (это и есть предположение, что все точки гиперповерхности омбилические). Их величина, очевидно, равна $-\sigma = -\dfrac{h_{11} + h_{22} + \cdots + h_{nn}}{n-1}$.

Отсюда следует, что $n-1$ из характеристических корней матрицы

$$\begin{Vmatrix} h_{11}+\sigma, h_{12}, \ldots, h_{1n} \\ h_{21}, h_{22}+\sigma, \ldots, h_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{n1}, h_{n2}, \ldots, h_{nn}+\sigma \end{Vmatrix} \tag{3}$$

равны нулю. Но так как все элементарные делители симметричной матрицы просты, то отсюда следует, что ранг матрицы (3) равен 1. Умножая первый столбец этой матрицы на α_1 и прибавляя к ней остальные столбцы, умноженные, соответственно, на $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, мы в силу (2) получим

$$\begin{Vmatrix} \sigma\alpha_1, h_{12}, \ldots, h_{1n} \\ \sigma\alpha_2, h_{22}+\sigma, \ldots, h_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma\alpha_n, h_{n2}, \ldots, h_{nn}+\sigma \end{Vmatrix}.$$

Ранг этой матрицы тоже равен 1. Рассмотрим отдельно два случая.

1) $\sigma = 0$. Это означает, что все радиусы кривизны равны нулю. Получится гиперплоскость.

2) $\sigma \neq 0$. Тогда

$$h_{i\nu\alpha_j} = h_{j\nu}\alpha_i \qquad (i \neq \nu, j \neq \nu).$$

Отсюда следует, что h_ν есть решение следующей системы уравнений в частных производных:

$$\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha_1} = \cdots = \frac{1}{\alpha_{\nu-1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha_{\nu-1}} = \frac{1}{\alpha_{\nu+1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha_{\nu+1}} = \cdots = \frac{1}{\alpha_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha_n},$$

т. е. есть функция от α_ν и $u^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2$. В силу однородности должно иметь место

$$h_\nu = \frac{\partial h}{\partial\alpha_\nu} = \psi_\nu\left(\frac{\alpha_\nu}{u}\right).$$

Условия

$$\frac{\partial h_\nu}{\partial\alpha_\mu} = \frac{\partial h_\mu}{\partial\alpha_\nu}$$

дают

$$\psi'_\nu = \psi\mu',$$

так что

$$\psi'_\nu = \mathrm{const} = \mathrm{c},$$

откуда

$$h_\nu = c \cdot \frac{\alpha_\nu}{u} + c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$dh = h_1 d\alpha_1 + h_2 d\alpha_2 + \cdots + h_n d\alpha_n = c\frac{\alpha_1 d\alpha_1 + \alpha_2 d\alpha_2 + \cdots + \alpha_n d\alpha_n}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + d\alpha_n)^{1/2}} +$$
$$+ (c_1 d\alpha_1 + c_2 d\alpha_2 + \cdots + c_n d\alpha_n).$$

Интегрируя, будем иметь

$$h = c \cdot \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} + (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n) + k.$$

Меняя начало координаты, можно добиться того, что

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,$$

и мы приходим к гиперсфере.

§13. О системах ортогональных функций

Мой старший товарищ по гимназии, И.Я. Штаерман, обратил мое внимание на задачу, помещенную Н.Н. Лузиным в его диссертации: какая ортогональная система функций после дифференцирования переходит в себя. Я сделал попытку решить более общую задачу: какая система функций, ортогональная относительно веса $p(x)$, после дифференцирования делается ортогональной относительно другого веса $q(x)$? В своем решении я должен был ввести весьма существенные ограничения: кроме двукратной дифференцируемости я потребовал, чтобы эти функции или их производные обращались в нуль на границах интервала. Последнее условие можно отбросить, если вес $q(x)$ обращается на границах в нуль. Получаются интегралы уравнений типа Штурма–Лиувилля. Привожу сохранившийся отрывок:

“З а м е т к а п о в о п р о с у о б о р т о г о н а л ь н ы х ф у н к ц и я х.

В своей диссертации “Интеграл и тригонометрический ряд” Лузин интересуется вопросом, существуют ли другие функции, кроме тригонометрических, которые обладали бы, наряду с системой своих производных, свойством взаимной ортогональности. Я попытаюсь несколько расширить рамки вопроса. Именно, я рассматриваю ряд функций

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x), \ldots, \tag{1}$$

которые подчиняются следующим условиям:

$$\int\limits_a^b p(x)P_i(x)P_k(x)dx = 0 \quad (i \neq k), \quad \int\limits_a^b p(x)P_i(x)P_i(x)dx = 1, \quad (2)$$

где a и b — постоянные границы интегрирования, а $p(x)$ — вполне определенная функция от x. Функции (1) удовлетворяют, кроме того, пограничным условиям

$$P_i(a) = 0, \quad P_i(b) = 0 \text{ или } P_i'(a) = 0, \quad P_i'(b) = 0. \quad (3)$$

Производные подчиняются условиям

$$\int\limits_a^b q(x)P_i'(x)P_k'(x) = 0 \qquad (i \neq k), \quad (4)$$

где $q(x)$ — другая определенная функция от x. Наконец, мы должны предположить, что вторые производные от функций (1) существуют и что функции

$$\frac{1}{p(x)}\frac{d}{dx}[q(x)P_i'(x)]$$

разлагаются в сходящиеся в пределах интервала $a \ldots b$ ряды по функциям (1).

Для решения задачи интегрируем левую часть в (4) по частям

$$0 = \int\limits_a^b q(x)P_i'(x)P_k'(x)dx = q(b)P_i'(b)P_k'(b) - q(a)P_i'(a)P_k(a) -$$

$$- \int\limits_a^b P_k(x)\frac{d}{dx}[q(x) \cdot P_i'(x)] \cdot dx, \quad (5)$$

или в силу пограничных условий

$$\int\limits_a^b \frac{d}{dx}[q(x)P_i'(x)]P_k(x)dx = 0 \qquad (i \neq k). \quad (6)$$

Разлагаем функцию

$$\frac{1}{p(x)} \cdot \frac{d}{dx}[q(x)P_i'(x)]$$

в ряд по функциям (1) (что, как мы предполагаем, всегда можно сделать)

$$\frac{1}{p(x)}\frac{d}{dx}[q(x)P_i'(x)] = \sum_{j=0}^{\infty} A_j P_j(x). \tag{7}$$

Чтобы определить коэффициенты A_j разложения, умножаем обе части равенства на $p(x)P_k(x)$ и интегрируем в интервале $a \dots b$. Тогда в силу (2)

$$A_k = \int\limits_a^b P_k(x)\frac{d}{dx}[q(x)P_i'(x)]dx. \tag{8}$$

Следовательно, при $k \neq i$ $A_k = 0$, а коэффициент A_i, не равный, вообще говоря, нулю, будет определенным постоянным числом. Поэтому формула (7) перепишется так:

$$\frac{1}{p(x)} \cdot \frac{d}{dx}[q(x)P_i'(x)] = A_i P_i(x), \tag{9}$$

или иначе

$$\frac{d}{dx}[q(x)P_i'(x)] - A_i p(x)P_i(x) = 0. \tag{10}$$

Получилось дифференциальное уравнение, типичное для ряда функций, подобных (1). Если бы мы не вводили пограничных условий (3), то получилось бы подобное же дифференциальное уравнение, но со свободным членом, а мы знаем, что функции, удовлетворяющие таким уравнениям, разлагаются согласно формуле Е. Шмидта в ряды по функциям, удовлетворяющим уравнению (10).

Ясно, что на вопрос г. Лузина, по крайней мере оставаясь в пределах высказанных мною ограничений, придется ответить в отрицательном смысле."

Значительно позже, в 1927 г., на съезде в Москве, Б.М. Гагаев сделал доклад, в котором изложил решение задачи Н.Н. Лузина в его первоначальной постановке. Он разыскивал систему ортогональных функций, инвариантную относительно дифференцирования с точностью до численных множителей. Оказалось, что, кроме обычной системы тригонометрических функций, таким свойством могут еще обладать только системы из конечного числа функций. См. B. Gagaeff, Sur l'unicité du système de fonctions orthogonales invariant relativement à la dérivation. C. R. **188**, 1929, стр. 222.

По приезде в Казань (1928) я побудил Б.М. Гагаева заняться расширенной проблемой Н.Н. Лузина. Между Б.М. Гагаевым и А.Н. Колмогоровым завязалась по этому вопросу переписка, в результате которой была решена задача о системах функций, остающихся ортогональными и после дифференцирования, но при $p(x) = 1,\ q(x) = 1$.

§14. О рядах Дирихле

Вопрос об однозначности разложений функций в ряды Дирихле может быть обобщен во многих направлениях. Одно из них было дано мною, однако с существенным ограничением: я предположил, что это разложение *асимптотическое*. Выяснить, каковы признаки асимптотичности ряда, является интересной задачей, которая для меня была недоступна.

Привожу текст листка, который был у меня написан на эту тему.

"Доказательство единственности разложения функций в ряды Дирихле

Пусть функция $f(x)$ разлагается двояким способом в ряд Дирихле
$$f(x) = a_1 e^{-\lambda_1 x} + a_2 e^{-\lambda_2 x} + a_3 e^{-\lambda_3 x} + \dots \tag{1}$$
и
$$f(x) = b_1 e^{-\mu_1 x} + b_2 e^{-\mu_2 x} + b_3 e^{-\mu_3 x} + \dots . \tag{2}$$

Здесь λ и μ представляют собой ряды чисел, расположенных так, что
$$R(\lambda_1) \le R(\lambda_2) \le R(\lambda_3) \le \dots,\ R(\mu_1) \le R(\mu_2) \le R(\mu_3) \le \dots, \tag{3}$$

причем, кроме того, мы предполагаем, что

$$\lim_{n=\infty} R(\lambda_n) = +\infty, \qquad \lim_{n=\infty} R(\mu_n) = +\infty.$$

Требуется доказать, что оба ряда (1) и (2) тождественны, т. е. что

$$\lambda_n = \mu_n, \qquad a_n = b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{4}$$

Для этого рассмотрим функцию $\varphi(z)$, имеющую простыми полюсами числа

$$q_1 = e^{\lambda_1}, \qquad q_2 = e^{\lambda_2}, \qquad q_3 = e^{\lambda_3}, \ \dots \tag{5}$$

с вычетами соответственно $a_1, a_2, a_3, \dots$. Пусть ряд (1) абсолютно сходится для вещественных значений x, не меньших некоторого целого числа m. Тогда наша $\varphi(z)$ будет $(m-1)$-го ранга, и ее можно будет представить так:

$$\varphi(z) = g(z) + \sum_{\nu} \left[\frac{a_\nu}{z - q_\nu} + \frac{a_\nu}{q_\nu} + \frac{a_\nu z}{q_\nu^2} + \dots + \frac{a_\nu z^{m-2}}{q_\nu^{m-1}} \right]. \tag{6}$$

Здесь через $g(z)$ мы обозначаем целую трансцендентную функцию. Собирая коэффициенты при степенях z (а это мы имеем право сделать в силу абсолютной сходимости ряда (1)), мы, как легко убедиться, придем к ряду

$$\varphi(x) = g(z) - f(m)z^{m-1} - f(m+1)z^m - f(m+2)z^{m+1} - \dots. \tag{7}$$

Составив подобным же образом функцию $\psi(z)$ с полюсами e^{μ_1}, $e^{\mu_2}, \dots$ и вычетами $b_1, b_2, b_3, \ \dots$, мы из формулы (7) убедимся, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут отличаться друг от друга только на целую трансцендентную функцию. Отсюда следует, что у них будут одинаковые полюсы, и соответствующие им вычеты, т. е. что

$$e^{\lambda_n} = e^{\mu_n}, \qquad a_n = b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Чтобы избавиться от вредного действия периодичности функций e^λ, заменим (5) через

$$q_1 = e^{\frac{\lambda_1}{p}}, \qquad q_2 = e^{\frac{\lambda_2}{p}}, \qquad q_3 = e^{\frac{\lambda_3}{p}}, \dots, \tag{5a}$$

где p — произвольное вещественное число, которое можно взять целым.

Тогда формула (7) примет следующий вид:

$$\varphi(x) = g(z) - f\left(\frac{m}{p}\right) z^{m-1} - f\left(\frac{m+1}{p}\right) z^{m} - \ldots . \tag{7a}$$

Сравнивая $\varphi(z)$ с $\psi(z)$, мы убедимся, что

$$e^{\frac{\lambda_n}{p}} = e^{\frac{\mu_n}{p}}.$$

Но это равенство может существовать для всех p тогда и только тогда, когда $\lambda_n = \mu_n$. Таким образом, для случая абсолютно сходящихся рядов теорема доказана.

Это доказательство без труда может быть перенесено на более общий тип рядов

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-\lambda_n x}, \tag{8}$$

где $\varphi_n(x)$ — полиномы от x, причем их степень может неограниченно возрастать вместе с n. Необходимо, однако, помнить, что, изменяя p, мы должны будем подбирать каждый раз заново коэффициенты в миттаг–леффлеровском разложении функции, аналогичной (6).

Из этого результата вытекает невозможность разложения многих функций в ряды Дирихле в узком смысле этого термина. Например, $\sin x$ не разлагается в ряд Дирихле, так как в нашем смысле такое разложение существует; это будет

$$\sin x = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix},$$

и согласно нашему утверждению другого подобного разложения не может быть. Рациональные полиномы тоже не разлагаются в ряды Дирихле, так как они являются частным случаем разложения (8). Вообще, для разложимости функции в ряд Дирихле можно дать такой критерий:

Функция $f(x)$ разлагается в ряд Дирихле тогда и только тогда, когда функция

$$F(z) = -\sum_{n=m}^{\infty} f(n) z^{n-1} \tag{9}$$

допускает только простые полюсы, притом только вещественные, если мы понимаем разложение в узком смысле. Это разложение будет, вообще говоря, расходящимся. Чтобы разложение сходилось, надо чтобы функция $F(x)$ была конечного ранга.

В виде примера рассмотрим функцию $\frac{1}{\Gamma(x)}$. Образуем $F(z)$:

$$F(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = -e^z. \tag{10}$$

Эта функция совсем не имеет полюсов на конечном расстоянии, а потому для $\frac{1}{\Gamma(x)}$ будет иметь место разложение

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = 0.$$

Это разложение расходящееся; оно лишь показывает, что с возрастанием x наша функция стремится к нулю быстрее всякого возможного ряда Дирихле.

Можно доказать единственность разложения, и не прибегая к допущению, что существует область абсолютной сходимости. Для этого я попытаюсь возвратить к жизни старое доказательство Дирихле–Дедекинда, показав предварительно, что всякий ряд (1), если он сходится (в чем, впрочем, нет необходимости), будет асимптотическим рядом, т. е. для него выражение

$$|e^{\lambda_n x}[f(x) - a_1 e^{-\lambda_1 x} - \dots - a_1 e^{-\lambda_n x}]| \tag{11}$$

будет стремиться к нулю с возрастанием x. Для доказательства строим функцию (6). Обозначая теперь через $-s_{m+1}$ коэффициент при z^m в разложении $\varphi(z)$, вспомним часто употребляемую мною формулу

$$s_m = a_1 e^{-\lambda_1 m} + a_2 e^{-\lambda_2 m} + \dots + a_n e^{-\lambda_n m} + e^{-\lambda_n m} \varepsilon_m^{(n)}, \tag{12}$$

где $\varepsilon_m^{(n)}$ — величина, стремящаяся к нулю с возрастанием m. Обратим внимание на разность

$$f(m) - s_m = \varepsilon_n - e^{-\lambda_n m} \varepsilon_m^{(n)}, \tag{13}$$

где ε_n стремится к нулю с возрастанием числа n членов в рядах (11), (12). Умножим обе части (13) на $e^{+\lambda_1 m}$ и перейдем к $m = \infty$. В левой части величина $e^{\lambda_1 m_\varepsilon} \dots$".

Рукопись прерывается, так как асимптотичности мне так и не удалось доказать.

§15. Одесский период

(1921–1927)

Мои родители жили в Одессе и там голодали. Переезд из города в город представлял в 1921 г. большие трудности, и перевезти моих родителей в Киев, с их небольшим имуществом, представлялось мне неосуществимым. Поэтому я решил сам переехать в Одессу. Вместе с тем меня затруднял вопрос о заработке в Одессе. В Киеве я довольно прилично зарабатывал, главным образом частными уроками. По этому вопросу я имел беседу с одесским профессором В.Ф. Каганом, случайно приехавшим в Киев. Он обещал мне всяческое содействие, но не мог гарантировать мне заработка. Вместе с тем он прельстил меня перспективой печатания в журналах, которые в то время издавались в Одессе, в Киеве же журналы не выходили. Я вспоминаю свою фразу: “Подумайте, мне еще ни разу не удалось напечататься”, на которую мой собеседник многозначительно не подал реплики, вероятно считая ее очень наивной.

В мае я сделал вылазку в Одессу, а в ноябре окончательно туда переехал. Наше материальное положение было очень тяжелым. Вскоре после переезда я настоял на переходе на другую квартиру, из окраины в центр, в надежде получить место или уроки. Эти надежды оправдались в весьма малой степени. Большой поддержкой мне был академический паек, который мне выхлопотали покровительствующие мне математики: С.О. Шатуновский, В.Ф. Каган и Ю.Г. Рабинович.

Летом 1922 г. в городе свирепствовала холера, унесшая в могилу моего отца.

Вместе с тем я продолжал заниматься математикой. С одной стороны, я усердно делал доклады о своих киевских результатах, надеясь обратить на себя внимание со стороны влиятельных математиков. (Безусловно, это оказало решающее значение при получении мною пайка.) С другой стороны, мне в первые же месяцы одесской жизни удалось получить существенные результаты по теории Галуа и теории алгебраических чисел. Так, под новый год (1921–1922) я получил доказательство теоремы Кронекера–Вебера (см. §11). Летом же 1922 г. я доказал предположение Фробениуса (1896) о существовании простых чисел, принадлежащих к каждому заданному классу подстановок. Этой работе будет посвящен особый параграф.

У меня был научный контакт: с В.Ф. Каганом, на семинаре у которого я делал доклады по геометрии, например о ширине контуров и тел (см. §12); с С.О. Шатуновским, в диссертации которого содержалась теория Галуа, основанная на понятии основных модулей (она очень заинтересовала меня, и впоследствии я включил ее в свою книгу по теории Галуа); наконец, с Ю.Г. Рабиновичем, самым молодым из этих математиков, с которым я делился своими неоформленными идеями и который уделил массу своего времени на корректирование перевода моей статьи на немецкий язык.

Однако полного научного контакта с одесскими математиками у меня не было. Мне было чуждо их направление, которое сводилось к строгому обоснованию начал математических дисциплин. Мне казалось, что часто их строгость сводилась к скрупулезным и утомительным формулировкам, не дающим ничего нового в идейном отношении. Это было справедливо только относительно части одесских математиков. Но я, как представитель большой плодотворной школы Д.А. Граве, в душе считал одесситов провинциалами. Вместе с тем моя преподавательская деятельность не отличалась высоким качеством. Ввиду этого у меня все время было очень плохо с работой. В 1923 г. я сделался преподавателем совпартшколы, но не имел успеха. В начале 1924 г. я с женой (я недавно женился) совершил путешествие в Москву и Ленинград. В последнем я познакомился с академиком Я.В. Успенским, с которым у меня была переписка по поводу моей работы о плотностях простых чисел.

По возвращении в Одессу вскоре я был приглашен в Москву на кафедру в маленьком втузе (Институт гражданских инженеров). Оказалось, что я занял место Д.Ф. Егорова, удаленного оттуда при довольно печальных обстоятельствах. Это создало натянутые отношения между мною и коллективом московских математиков. Однако я познакомился с тогдашним профессором МИГИ В.В. Степановым, с которым меня до сих пор связывает дружба.

Не удержавшись в Москве (МИГИ вскоре был закрыт), я весной того же года вернулся в Одессу, где осенью сделался секретарем научно-исследовательской кафедры при Одесском институте народного образования. Эта должность до конца моего пребывания в Одессе была моей единственной должностью, и я должен был существовать на свою скромную зарплату. Вместе с тем у меня в 1926 г. родился сын, и увеличение расходов заставило меня серьезно думать о более обеспечивающей работе в другом городе. Во время моей временной жизни в Москве я познакомился с казанским профессором Н.Н. Парфентьевым и с тех пор стал поддерживать с Казанью связь, главным образом благодаря наличию в Казани математического журнала "Известия Казанского Физико-математического общества", хорошо издаваемого и в котором было легко печататься. Когда в Казани открылся конкурс на замещение кафедры математики, я принял в нем участие и был выбран.

В 1925 г. я был командирован за границу: описанию моего путешествия я посвящу особый параграф.

В 1924 г. ко мне пришел 17-летний молодой человек, Марк Григорьевич Крейн. Он приехал из Киева, не кончив даже средней школы, но принес интересную работу — "Le systéme dérivé et les contours dérivés" с очень свежим содержанием, которая вскоре была напечатана в одесском журнале. Его знания по математике были значительно выше, чем у его сверстников, и мне удалось добиться, чтобы его приняли в аспирантуру. Он стал работать под моим руководством, главным образом по теории аналитических функций. У него было замечательное качество — уметь увлекать математикой своих сверстников, и благодаря ему мне удалось организовать в Одессе семинар, на котором, как я помню, ставилось изучение алгебраических функций, а также непрерывных групп. Его интересы вскоре переключились на теорию матриц, от них — на линейные операторы. После моего отъезда из Одессы он фактически стал главой одесского математического коллектива, приобрел громадное количество учеников (свыше 12), составивших школу по функциональному анализу. Теперь он является одним из лучших математиков Украины. Мне очень лестно считать его своим первым учеником.

Во время моего пребывания в Одессе я получил следующие математические результаты:

1) доказал существование простых чисел, принадлежащих к отдельным классам подстановок;

2) исследовал группу классов в алгебраических полях;

3) получил существенно новые результаты в теории поверхностей переноса (см. §8);

4) привел в законченный вид свои исследования по вещественности корней целых трансцендентных функций.

В Одессе я впервые начал печататься, и там напечатал многие из работ киевского периода.

§16. Плотности множеств простых чисел

Еще в Саратове Б.Н. Делоне рассказал мне о задаче Фробенниуса, о которой ему рассказал за границей Ландау. Задача состояла в следующем.

Пусть K — нормальное алгебраическое поле, α — его произвольный целый элемент, $\mathfrak{p}$ — простой идеал, не входящий в дискриминант поля. Известно, что α^p, где p — простое число, делящееся на $\mathfrak{p}$, сравнимо с одним из элементов, сопряженных с α. Пусть это будет α^s:

$$\alpha^p \equiv \alpha^s (\mathrm{mod}\ p).$$

Подстановка S группы Галуа поля K не зависит от выбора α внутри поля K и вполне определяется простым идеалом $\mathfrak{p}$. Будем говорить, что $\mathfrak{p}$ *принадлежит к подстановке* S.

Простое число p есть произведение всех различных простых идеалов, сопряженных с $\mathfrak{p}$. Вместе с тем, сопряженный с $\mathfrak{p}$ простой идеал $\mathfrak{p}^T$ принадлежит к $T^{-1}ST$, если $\mathfrak{p}$ принадлежит к S. Поэтому простому числу p будет соответствовать совокупность всех подстановок типа $T^{-1}ST$, где T — всевозможные подстановки группы Галуа, другими словами — класс подстановки S. Будем говорить, что *p принадлежит к классу подстановки S*.

Задача Фробениуса состояла в доказательстве того, что, взяв в группе Галуа любой класс подстановок, мы всегда можем утверждать существование бесчисленного множества принадлежащих к нему простых чисел. Фробеннусу удалось только частично решить эту задачу. Для ее решения существенную роль сыграло понятие плотности множества простых чисел, введенное еще Кронекером. Под плотностью совокупности простых чисел разумеется коэффициент $\varkappa$ в формуле

$$\sum_p p^{-s} = \varkappa \lg \frac{1}{s-1} + P(s-1),$$

где сумма пробегает простые числа совокупности, $s > 1$ и стремится к 1, $P(s-1)$ — функция, растущая при $s \to 1$ медленнее, чем $\lg \frac{1}{s-1}$ (обычно даже требуют, чтобы она оставалась при $s = 1$ конечной). Из давно известной формулы

$$\sum_p p^{-s} = \lg \frac{1}{s-1} + P(s-1),$$

где сумма распространена на все простые числа, мы видим, что для совокупности *всех* простых чисел плотность $\varkappa = 1$. Кроме того, очевидно, что если для двух взаимных совокупностей простых чисел плотности равны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, то для их объединения (суммы) плотность равна $\varkappa_1 + \varkappa_2$. Отсюда следует, что всякая плотность $\varkappa \leq 1$.

Кронекер исходил из формулы

$$\sum_{\mathfrak{p}} [N(\mathfrak{p})]^{-s} = \mathfrak{p} \lg \frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{1}$$

справедливой для всякого алгебраического поля, нормального или нет. Если поле нормально, то $N(\mathfrak{p}) = p$ только для тех p, которые принадлежат к тождественной подстановке. Для таких простых чисел существует ровно n простых идеалов, норма которых равна одному и тому же простому числу p. Для других же простых идеалов $N(\mathfrak{p}) \geq p^2$, и потому $\sum\limits_{\mathfrak{p}} [N(\mathfrak{p})]^{-s}$, распространенная на такие простые идеалы, сходится и при $s = 1$, и мы можем включить ее в символ $P(s-1)$. Поэтому можно переписать формулу (1) так:

$$\sum_p np^{-s} = \lg \frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{2}$$

где сумма распространена на все простые числа, принадлежащие к тождественной подстановке. Отсюда следует, что плотность такой совокупности равна $\frac{1}{n}$, где n — степень поля K.

Продолжая исследование Кронекера, Фробениус рассмотрел формулы (1), составленные для всевозможных делителей поля K. Оказалось достаточным составить ее только для тех делителей, которые принадлежат к циклическим подгруппам группы Галуа G поля K. Этот прием дал возможность Фробениусу определить плотности совокупностей простых чисел, принадлежащих отделам подстановок, т. е. совокупностям подстановок, сопряженных со всевозможными (взаимно простыми с порядком S) степенями одних и тех же подстановок S. Оказалось, что плотность, соответствующая отделу подстановки S_λ, равна $k_\lambda \frac{n_\lambda}{n}$, где n_λ — число подстановок, входящих в класс $(S_\lambda), k_\lambda$ — число классов, входящих в отдел (S_λ).

Определить плотность для отдельных классов Фробениусу не удалось. Оставаясь в рамках его метода, эту задачу решить невозможно. В самом деле, для какого бы делителя поля K мы ни составили формулу (1), группа, к которой он принадлежит, всегда, наряду с подстановкой, будет содержать и все ее степени, причем те из них, которые взаимно просты с порядком, входят в эту группу совершенно равноправно. Поэтому части суммы в левой части (1), распространенные на различные классы того же отдела, войдут с одинаковыми коэффициентами, и никакие линейные комбинации формул (1), написанных для различных делителей поля K, не дадут нам возможности выделить каждую из этих сумм в отдельностн. Для их выделения необходимо привлечение каких-то посторонних иррациональностей.

Отметим, что в своей первой статье по теории характеров (Über Gruppencharaktere, Sitzber. Berl. Ak., 1896, S. 985–1021) Фробениус говорит: “В апреле этого года Дедекинд сообщил мне задачу... Решение этой задачи, которое, как я надеюсь, я изложу в ближайшее время, привело меня к обобщению понятия характеров на любые конечные группы”. Эти слова Фробениуса, возможно, относятся к разбираемой задаче и внушают мысль, что теория общих групповых характеров была создана им в бесплодных попытках решить задачу о плотностях простых чисел для каждого класса.

Для того частного случая, когда группа G абелева, разбираемая задача в сущности была решена еще Дирихле, так как она есть не что иное, как задача о плотностях совокупностей простых чисел, лежащих в прогрессиях вида $ax+b$, где a и b — взаимно простые целые числа, а x пробегает все целые значения. Для такого рода совокупностей Дирихле установил формулу

$$\sum_p p^{-s} = \frac{1}{\varphi(a)} \lg \frac{1}{s-1} + P(s-1),$$

т. е. нашел, что их плотность равна $\frac{1}{\varphi(a)}$. Вместе с тем простые числа прогрессии $ax+b$ как раз составляют класс простых чисел, принадлежащих к подстановке $(\varepsilon \to \varepsilon^b)$ в поле a-ых корней из единицы. Таким образом, для полей деления круга, т. е. для полей с абелевой группой в поле рациональных чисел, задача Фробениуса полностью решена.

Обобщая этот результат Дирихле, Вебер показал, что простые числа, принадлежащие к единичной подстановке относительно некоторого нормального поля K, равномерно распределяются по частичным совокупностям, простые числа которых лежат в прогрессиях типа $ax+b$, где a — взаимно простое с дискриминантом D поля K число, а b пробегает все взаимнопростые с a классы сравнений по модулю a. Это означает: плотности каждой из частичных совокупностей равны друг другу, т. е. равны $\frac{1}{\varphi(a)\cdot n}$. Обобщая этот результат, можно доказать такую же равномерность распределения по прогрессиям норм простых идеалов, принадлежащих к отделам подстановок в поле K. Получая этот результат, я не знал работ Гекке, в которых этот результат получается проще и изящнее, хотя на основанни более глубоко лежащей теории.

Основная мысль моей работы состоит в следующем. Я присоединяю к полю K поле деления круга $\overline{K}$, у которого порядки подстановок группы Галуа равны порядку рассматриваемой подстановки S и дискриминант которого взаимно прост с дискриминантом поля K. Простые числа, принадлежащие к отделу подстановки S, равномерно распределятся по подстановкам (здесь мы можем не говорить "по классам подстановок", так как группа Галуа поля $\overline{K}$ абелева, и каждая его подстановка составляет целый класс) группы Галуа поля $\overline{K}$.

Рассмотрим также композит $K\overline{K}$ полей K и $\overline{K}$. Его дискриминаят явно не взаимно прост с дискриминантом поля $\overline{K}$ и в связи с этим простые числа, принадлежащие внутри $K\overline{K}$ к определенному отделу подстановки, не могут лежать в любой прогрессии, т. е. принадлежать к любой подстановке поля $\overline{K}$. Для каждого отдела (Σ) в поле $K\overline{K}$ можно указать те прогрессии, в которых лежат простые числа, принадлежащие к отделу (Σ). Будем называть их *допустимыми* (для отдела (Σ)) прогрессиями. Однако, применяя метод Вебера (или Гекке), мы можем доказать, что принадлежащие к отделу (Σ) в поле $K\overline{K}$ простые числа равномерно распределяются по подстановкам поля $\overline{K}$.

При этом оказывается, что если простое число p принадлежит внутри $\overline{K}$ к *примитивной* (т. е. имеющей максимальный порядок) подстановке, то, зная эту подстановку, мы можем указать определенный класс из отдела (Σ) в $K\overline{K}$ (а следовательно, и определенный класс из отдела (S) в K), к которому принадлежит p. Таким образом, в силу равномерности распределения простых чисел отдела (S) по подстановкам поля $\overline{K}$, мы можем утверждать, что те из простых чисел, которые принадлежат к примитивным подстановкам поля $\overline{K}$ и к отделу (S) поля K, равномерно распределяются по классам отдела (S). Этим доказывается *существование* бесчисленного множества простых чисел, принадлежащих к отдельным классам в поле K.

Остается определить *плотности* совокупностей простых чисел, принадлежащих к отдельным классам в поле K. Ограничиваясь присоединением поля $\overline{K}$, мы ничего не добъемся, так как тогда в игре будут участвовать только те простые числа, которые принадлежат к примитивным подстановкам поля $\overline{K}$, а их совокупность имеет общую плотность, меньшую единицы. Чтобы ввести в игру совокупность простых чисел, плотность которой сколько угодно близка к единице, я присоединяю к полю K сколь угодно большое число k взаимно простых полей деления круга, степень каждого из которых равна порядку подстановки S. Это дает мне возможность доказать, что простые числа отдела равномерно распределяются по классам, т. е. что плотность их совокупности, принадлежащей к классу подстановки S, равна $\frac{n_\lambda}{n}$. Это и есть решение задачи Фробениуса.

Удобнее формулировать результат не в этой форме, а в следующей, что я сделал не в своей диссертации [1], а много позднее — во второй части своих “Основ теории Галуа” (ОНТИ, 1937):

Плотность совокупности простых идеалов, принадлежащих к подстановке S, равна $\frac{1}{f}$, где f — порядок подстановки S или, что то же, степень простого идеала.

В качестве приложения к этому результату я, во-первых, исследую связь между степенью родства алгебраических полей и зависимостью между принадлежностью простых чисел к определенным классам подстановок в одном и другом поле. Если одно поле есть делитель другого, то принадлежность простого числа к определенному классу внутри второго поля влечет за собой его принадлежность к вполне определенному классу во втором поле. Если же поля взаимно просты, т. е. имеют пересечением только поле рациональных чисел, то в них классы подстановок независимы в том смысле, что можно найти простые числа, принадлежащие к любым заданным классам в каждом из полей. Я разрешаю вопрос о связи между классами обоих полей в общем случае. Во-вторых, я доказал теорему, доказанную ранее Гильбертом в несколько менее точной формулировке:

Дано поле k, содержащее l-ые корни из единицы, где l — простое число. Будем под символом $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}$ $(\alpha \subset k)$ разуметь тот l-ый корень и из единицы, с которым по модулю $\mathfrak{p}$ сравнимо $\alpha^{\frac{p^f-1}{l}}$, где $N(\mathfrak{p}) = p^f$. Если некоторое число $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ целых чисел поля k таково, что произведение

$$\alpha_1^{m_1} \cdot \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_t^{m_t}$$

только тогда есть l-ая степень числа из k, когда все m_i делятся на l, то, задав произвольно целые числа $c_1, c_2, \ldots, c_t$, мы найдем бесчисленное множество простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых

$$\left\{\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right\} = \zeta^{c_1},\ \left\{\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right\} = \zeta^{c_2}, \ldots,\ \left\{\frac{\alpha_t}{\mathfrak{p}}\right\} = \zeta^{c_t}, \tag{3}$$

где $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$.

У Гильберта вместо (3) формулировано более слабое требование:

$$\left\{\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right\}^m = \zeta^{c_1},\ \left\{\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right\}^m = \zeta^{c_2}, \ldots,\ \left\{\frac{\alpha_t}{\mathfrak{p}}\right\}^m = \zeta^{c_t},$$

где m — некоторое число из ряда $1, \ldots, l-1$, не зависящее от нашего выбора [см. Zahlbericht, §135, формула (103)].

Последний результат был также опубликован отдельно, несколько ранее, в киевском журнале [3].

Уже имея идею всего результата, я много провозился над изложением всех доказательств. Всего работа мною была переписана 15 раз, в 10 различных вариантах. Один из вариантов был послан за границу, кажется в Journ. für reine und angew. Math., но, по-видимому, не дошел до назначения. Его перевод на немецкий язык был осуществлен при очень интенсивной помощи Ю.Г. Рабиновича, так как я до этого еще никогда не переводил статей с русского языка на немецкий. Это руководство со стороны Ю.Г. Рабиновича дало мне уменье довольно прилично переводить; в дальнейшем я еще более совершенствовался.

Один из вариантов я послал Б.Н. Делоне. Через некоторое время я получаю от него письмо, пришедшее по адресу университета. Оно датировано 4 августа 1922 г. В нем говорится:

"Напишите мне пожалуйста, что вы сделали по математике за эти 7—8 месяцев, что мы с Вами не виделись. Казалось, что Вы как раз дошли до такого места, где Вы должны уже сделать, наконец, что-нибудь основательное".

Придя домой, я увидел у себя другое письмо Б.Н. Делоне, датированное 11/VIII 1922. Здесь он написал мне, уже получив мою рукопись. В письме говорится:

"Дорогой Николай Григорьевич, я только что получил рукопись Вашей большой работы о простых числах соотв. данному классу подстановок уравнения Галуа. Я восхищен и не могу удержаться от того, чтобы немедленно же, после 2 часов чтения ее, не сообщить Вам об этом.

Если все это верно, что должно быть так, так как чувствуется, что Вы нашли верную идею, то это — первоклассная работа, должно быть, не хуже всей моей работы, хотя и в другом роде. Нечего говорить, что нужно 2–3 недели, чтобы наверняка разобрать Вашу работу. Не знаю, поспею ли я это сделать. Очень занят изготовлением еще двух рукописей моей диссертации, затребованных для диспута СПб. университетом.

Надеюсь, что Вы получили недавно написанное мною Вам письмо, где я сообщал, что приглашен в Петроградский университет. Разрешите и Вам посоветовать ехать защищать Вашу работу туда же, где во мне Вы будете иметь на сей раз преданнейшего поклонника и оппонента, а в академике Успенском, д.б. тоже восхищенного Вами ценителя Ваших работ".

Эти письма окрылили меня. Однако осуществить защиту этой работы, как диссертации, мне удалось лишь значительно позже, в 1927 г. Дело в том, что ученые степени и защиты диссертаций были в то время отменены и производились в университетах РСФСР, так сказать, "в незаконном порядке". Я послал Я.В. Успенскому свою рукопись, и он опубликовал мою работу в "Известиях Российской Академии Наук". Однако он был слишком занят другими диссертациями, чтобы пустить в ход мою, а на следующий год диссертации были категорически запрещены.

В декабре 1923 г. я поехал путешествовать в Москву и в Ленинград. В Москве я не завязал никаких математических знакомств (я заходил к проф. Д.Ф. Егорову по поводу моей статьи в "Математическом сборнике", где Д.Ф. был редактором; он принял меня в передней). В Ленинграде же я познакомился с Я.В. Успенским, встретился со своим старым учеником по Киеву В.А. Тартаковским, а также пересмотрел несколько иностранных журналов послевоенного времени, которые не выписывались в Одессе. Мне пришлось походить в несколько библиотек, так как в Ленинграде не было библиотек, которые имели бы все основные журналы. Везде я встречал очень радушный прием, кроме библиотеки при Оптическом институте, где имелись "Göttingen Nachrichten". Заведующий этой библиотекой тов. Нарышкин не допустил меня к просмотру журнала и направил за разрешением к академику Рождественскому, с которым у меня произошел следующий разговор:

— Где вы работаете?

— Я преподаю в среднем учебном заведении.

— Наша библиотека служит для научных работников. Преподавателей средних учебных заведений никак нельзя причислить к научным работникам, так что я не могу разрешить вам пользоваться нашей библиотекой.

— Но у меня есть научные работы. В моем портфеле лежит корректура моей работы из “Известий” вашей Академии.

— Покажите.

Как раз я забыл дома корректуру. К счастью, у меня был оттиск моей статьи из украинской академии, и это удовлетворило академика. Я получил разрешение.

Думаю, что при такой точке зрения начать научную работу невозможно, так как, чтобы написать статью, надо предварительно быть знакомым с журнальной литературой.

В конце 1924 г. я послал немецкий перевод своей статьи в редакцию “Mathematische Annalen”, и в 1925 или 1926 г. он вышел в свет [2]. Еще до его выхода в свет, в сентябре 1925 г., я был за границей и там познакомился со статьей Артина “Über eine neue Art von L-Reien” (Hamb. Abh. **3**, 1923), в которой, как мне указал А.М. Островский, была решена задача Фробениуса. По проверке оказалось, что эта задача им была не решена, а сведена к “общему закону взаимности Артина”, который состоит в следующем. Для каждого алгебраического поля k можно найти его так называемое *поле классов* K (Klassenkörper), т. е. абелево поле над k, относительная степень которого равна числу классов поля k, с относительным дискриминантом 1 (relative unverzweigt), которое обладает таким свойством: простой идеал $\mathfrak{p}$ поля k принадлежит внутри K к относительной тождественной подстановке тогда и только тогда, когда он в k — главный, лежит в единичном классе группы классов. Артин, обобщая этот факт, высказывает следующее предположение: относительная группа Галуа поля K/k изоморфна с группой классов поля k в том смысле, что все простые идеалы $\mathfrak{p}$, принадлежащие к одной и той же подстановке лежат в одном и том же идеальном классе, и обратно; притом это сопоставление классов подстановкам обладает свойством изоморфизма: если $a_1 \leftrightarrow \sigma_1, a_2 \leftrightarrow \sigma_2$, то $a_1 a_2 \leftrightarrow \sigma_1 \sigma_2$. Это и есть закон взаимности Артина. В разбираемой статье Артин доказал его лишь для некоторых частных случаев.

Летом 1927 г., изучая теорию полей классов, я пришел к убеждению, что можно доказать закон Артина, воспользовавшись моим приемом присоединения полей деления круга. Когда у меня уже начали намечаться контуры доказательства, пока еще довольно смутные, мы переехали с дачи в город, и там я сейчас же увидел на библиотечной витрине томик Hamb Abh. со статьей Артина "Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes" (Hamb. Abh. **5**, 1927). Моя досада была сразу смягчена, когда я увидел, что Артин упоминает в начале статьи, что основная мысль доказательства, присоединение полей деления круга (Kreiskörpererweiterung) была им заимствована из моей работы. Я был очень тронут щепетильностью Артина в вопросах цитирования, так как между способами применения метода присоединения полей деления круга в обеих статьях имеется лишь неполная аналогия.

Закон взаимности Артина совершил переворот в теории полей классов, — теории, внутренний смысл которой до сих пор полностью не разгадан, — и Гассе под влиянием открытия этого закона взаимности написал новый томик обзора теории полей классов: "Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper". T. I. Reziprozitätsgesetz (Jahresber. DMV, Ergänzungsband VI, 1930), посвященный главным образом артиновскому закону. В нем видное место занимает "Tschebotareffsche Dichtigkeitssatz".

В 1926 г. я послал свою работу в Украинскую Академию наук для защиты как диссертацию (на Украине в то время была введена единственная степень доктора). Летом 1926 г. я приезжал в Киев, чтобы помочь моему главному оппоненту Д.А. Граве детально разобрать мою работу. Оказалось, что мысли Д.А. Граве были заняты другим (дифференциальными инвариантами особого рода; о них я буду говорить в параграфе о непрерывных группах), так что мне не удалось войти с ним в детали своей работы. Однако я очень приятно провел время со своими старыми киевскими друзьями.

26 февраля 1927 г. состоялся диспут. Моими оппонентами были Д.А. Граве, М.Ф. Кравчук и Г.В. Пфейффер. Д.А. отказался от возражений, якобы благодаря высокому качеству моей работы; но я подозреваю, что он предпочел это сделать, чтобы не тратить времени на изучение работы, что было безопасно сделать, так как работа была проверена за границей. Он только упрекнул меня, что я не занимаюсь прикладными вопросами. Я ответил на это, что чувствую всю важность последних, но не приучен к

ним со студенческих времен (Д.А. Граве на лекциях проповедывал нам не заниматься прикладными вопросами, составляющими математику второго сорта) и спросил: “Д.А., почему вы не сказали мне этого 10 лет тому назад?” Он схватился руками за голову и закричал: “mea culpa, mea culpa!”

М.Ф. Кравчук отметил несколько недочетов в деталях работы и указал на тяжеловесность изложения. Г.В. Пфейффер как неспециалист ограничился несколькими общими замечаниями. На диспуте был мой старый школьный учитель П.А. Цыганков, который горячо поздравил меня, выражал гордость мною перед оппонентами, одним словом, создавал обстановку.

Теперь расскажу о тех дополнениях и улучшениях доказательства, которые были сделаны частью другими авторами, частью мною самим. Вскоре после выхода в свет перевода моей статьи в “Math. Ann.” я получил корректуру статьи молодого гамбургского математика Шрейера “Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff” (Hamb. Abh. **5**, 1926). В письме Шрейер писал, что его работа была плодом реферата на гамбургском семинаре и имеет целью упростить доказательство и тем сделать мой результат более доступным щирокому кругу математиков. Его упрощение, во-первых, состоит в использовании результата Гекке, что очень упрощает изложение. Во-вторых, вместо присоединения большого числа циклических полей степени f, он присоединяет к полю K одно циклическое поле, но весьма высокой степени, и достигает этим той же цели.

М.Ф. Кравчук, мой оппонент, тоже написал статью “Sur la distribution des nombres premi-ers” (C. R. **183**, 1926), в которой делает упрощения в доказательствах. Более подробно его вывод изложен в статье “Розподіл первісніх чисел по підставленнях групи алгебричного рівняння”, которая напечатана в 1926 г. в каком-то журнале Украинской Академии наук. Названия журналов Украинской Академии не аннотируются на оттисках, и вообще эти журналы издаются очень неряшливо.

Шольц в статье “Die Abgrenzungssätze tür Kreiskörper und Klassenkörper (Sitzber. Akad. Berlin, 1931) дал новый вывод теоремы о плотностях, близкий к выводу, который первоначально зародился у меня, но был усложнен в силу технических трудностей доказательства.

Дейринг в статье “Über den Tschebotareffschen Dichtigkeitsatz” (Math. Ann. **110**, 1934) дал новое, непосредственное сведение теоремы о плотностях к закону взаимности Артина.

Одно из существенных дополнений к теореме о плотностях было сделано Артином во второй из цитированных работ. Я доказал справедливость формулы

$$\sum p^{-s} = \frac{n_\lambda}{n} \lg \frac{1}{s-1} + P(s-1),$$

где $P(s-1)$ — функция, растущая при $s \to 1$ медленнее, чем в $\lg \frac{1}{s-1}$. Из результатов же Артина вытекает, что $P(s-1)$ остается при $s \to 1$ конечной.

Второе дополнение сделано мною самим. Оно произведено по образцу результатов Кронекера и Мертенса, которые независимо друг от друга уточнили формулировку теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Дело в том, что Дирихле доказал стремление ряда $\sum\limits_p p^{-s}$, распространенного на простые числа в прогрессии, к бесконечности, если $s \to 1$. Этим, конечно, было доказано существование бесчисленного множества таких простых чисел. Однако отсюда нельзя еще найти хотя бы одно простое число такого рода, или даже указать, внутри каких границ наверное содержится хотя бы одно такое простое число. Кронекер и Мертенс (первый более просто, второй более точно) решили эту последнюю задачу.

Чтобы яснее представить сущность метода Кронекера, положенного в основу моих работ [4], поставим себе цель, исходя из формулы

$$\prod \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum n^{-s},$$

определить такое значение x, чтобы в интервале $(1, x)$ содержалось по крайней мере V простых чисел, где V — любое заданное положительное число. Возьмем в левой части конечное произведение, распространенное на все $p \le x$. Тогда

$$\prod_{p \le x} \frac{1}{1-p^{-s}} \le \prod_{p \le x} \frac{1}{1-p^{-1}} = \prod_{p \le x} \frac{p}{p-1} < \prod_{m=2}^{V} \frac{m}{m-1} = V.$$

Правая часть формулы будет содержать все члены n^{-s} при $n \leq x$, а также члены n^{-s} , где n разлагается на простые множители, меньше x. Поэтому она больше, чем

$$\sum_{n=1}^{x} n^{-s} > \int_{1}^{x} z^{-s} dz = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{x^{s-1}}\right).$$

Отсюда следует, что если в интервале $(1, x)$ содержится V (или менее) простых чисел, то

$$V > \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{x^{s-1}}\right)$$

при всяком $s > 1$. Поэтому, если имеет место

$$V < \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{x^{s-1}}\right) \tag{4}$$

хотя бы при одном значении $s > 1$, то в интервале $(1, x)$ наверное содержится более V простых чисел. Выбирая $s - 1 < \frac{1}{V}$, мы перепишем неравенство (4) так:

$$x > [1 - V(s-1)]^{-\frac{1}{s-1}},$$

или

$$x > \left[1 - \frac{V}{\alpha}\right]^{-\alpha}$$

при каком-нибудь α, бо́льшем, чем V. Например, беря $\alpha = 2V$, мы получим

$$x > 2^{2V}.$$

Таким образом, в интервале $(1, 2^{2V})$ содержится по крайней мере V простых чисел. Конечно, это очень грубая оценка.

Кронекер проделал подобный подсчет для рядов $\sum \chi(n) n^{-s}$ и получил интервалы, внутри которых содержится по крайней мере V простых чисел, лежащих в прогрессии. Я [4] распространил его метод на простые числа, принадлежащие к подстановкам.

§17. Первое путешествие за границу (1925)

Летом 1925 г. выяснилась возможность командировать кого-нибудь из одесских математиков за границу, и одесские власти командировали меня. Я решил поехать в Данциг, где в сентябре должен был быть организован съезд Deutsche Mathematiker-Vereinigung. После долгих хлопот и сношений с Харьковом я получил паспорт и деньги в долларах и поехал. Приехав в Данциг, я прежде всего познакомился с Эмми Нетер, которая сообщила мне, что моя статья по плотностям простых чисел была прислана ей на просмотр, но она отказалась от нее, и она была передана Артину. Э. Нетер очень общительна; она всегда была окружена плеядой молодых учеников, из которых я познакомился с Круллем, Брандтом и одним из Шмидтов.

На съезде я делал доклад о своих результатах по теории поверхностей переноса. Там я познакомился с Бляшке и с его учеником Рейдемейстером. Рейдемейстер отнесся к моим результатам довольно скептически, считая, что то, что в моих результатах нового, не допускает простого применения. В Данциге я провел много времени с Дёрнте, молодым и очень простым человеком, сделавшим одно интересное обобщение понятия группы.

Там же я познакомился с Гензелем, который много расспрашивал меня о Д.А. Граве. Он был очень доволен, что я придумал свою теорему монодромии, исходя из его p-адических чисел, и что моей настольной книгой по теории алгебраических функций является книга Гензеля и Ландсберга. Вместе с тем он как редактор журнала Crelle сказал мне, что посланная туда моя статья по поверхностям переноса не будет помещена.

Я тогда же познакомился с 27-летним учеником Гензеля, Гассе, уже ординарным профессором в Галле, который обратил внимание на мою заметку о числе классов в полях деления круга. Я обещал ему продолжить свое исследование и прислать статью для журнала Crell'я. Впоследствии я долго переписывался с Гассе и весьма благодарен ему за большое внимание (и тщательную редакцию) к моей статье.

В Данциге я познакомился с Л.А. Люстерником, тоже делавшим там доклад. Он мне был чрезвычайно полезен, благодаря владению немецкой речью, во внешних сношениях, в особенности в консульстве, где у меня вышло осложнение с визой. Интересно, что письменным немецким языком он владел гораздо хуже моего, так что в Берлине я перевел ему резюме его данцигского доклада, причем я, утомившись после поисков гостиницы, засыпал во время записывания им каждой продиктованной ему фразы и просыпался для новой фразы, и он восхищался "гениальностью" моего перевода. Там же он познакомил меня со своими замечательными стихотворениями сатирического и пародийного характера.

После отъезда я с большинством его участников, в том числе с Э. Нетер и Л.А. Люстерником, сел на пароход, отправившийся до Свинемюнде, откуда через Штеттин мы должны были ехать в Берлин.

На пароходе ко мне с Л.А. Люстерником пристал какой-то русский, вернее украинец, с весьма тоскливыми разговорами об украинском национализме. Он сказал нам, что за нами на пароходе следит шпион, причем даже указал на след проходившего шпиона. Вместе с тем он играл в карты с бывшими на пароходе полицейскими чиновниками и вообще вел себя очень подозрительно. Мы сказали Э. Нетер, что он по всей вероятности сам шпион, и попросили ее помочь нам избавиться от него. Когда мы в Свинемюнде пересели в поезд и он попытался влезть в наше купе, мы с Э. Нетер не пустили его, сказав, что купе занято.

На пароходе я рассказал Э. Нетер в кратких чертах идею моей работы о плотностях.

По приезде в Берлин я посетил И. Шура, которому преподнес свою русскую статью о плотностях. Шур говорит по-русски, хотя не вполне свободно. В детстве он учился в либавской гимназии. Он сказал мне, что мой результат был уже получен Артином. Впоследствии я выяснил, что это не так. Он мне подарил несколько своих оттисков. Вообще мне путешествие дало начало моей оттисковой библиотеке.

Я также был у Шефферса, работавшего по поверхностям переноса. Это был очень живой и подвижной старик. На мой вопрос, было ли известно, что поверхность может иметь или не более четырех систем линий переноса, или континуум, Шефферс сейчас же вытащил одну из своих старых тетрадей и указал мне на имеющийся там этот результат. Он также подарил мне много оттисков, в том числе свою работу о минимальных поверхностях переноса, где он опровергает рассуждения Штеккеля, в которых последний находил ошибку у Ли: "... daβ nicht Lie, sondern Herr Stäckel geirrt hat".

Из Берлина я поехал в Геттинген с целью прожить там некоторое время и поработать в библиотеке. Ознакомившись с литературой, я переписал статью Артина, о которой уже говорилось, и первоначальную статью Ли о поверхностях переноса. Я познакомился с Курантом, с которым сговорился прислать статью о корнях трансцендентных уравнений для "Math. Annalen". Кроме того, я познакомился с А.М. Островским, который, будучи еще школьником, работал в семинаре у Д.А. Граве, а затем был отправлен Д.А. Граве за границу для продолжения образования (как еврей он не мог учиться в русских университетах). В то время А.М. Островский был приват-доцентом в Геттингенском университете. Это был суровый и необщительный человек, весьма подозрительно относившийся к другим профессорам и доцентам (след неприязненного отношения к нему в Германии во время мировой войны). Меня он принял как бедного родственника. Он тоже сказал, что мой результат о плотностях простых чисел был получен Артином. Однако, вчитавшись в статью Артина, я убедился, что Артин опирается на "общий закон взаимности", тогда еще им не доказанный. Он также скептически отнесся к моим условиям вещественности корней трансцендентных уравнений и критиковал внешнюю форму моих статей.

Он предложил мне интересную задачу, которая ему была нужна для его исследований по особым точкам аналитических функций. Пусть $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Доказать, что все миноры вандермондова определителя

$$\begin{vmatrix} 1, & \varepsilon, & \varepsilon^2, & \dots, & \varepsilon^{p-1} \\ 1, & \varepsilon^2, & \varepsilon^4, & \dots, & \varepsilon^{2(p-1)} \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1, & \varepsilon^{p-1}, & \varepsilon^{2(p-1)}, & \dots, & \varepsilon^{(p-1)^2} \end{vmatrix} \tag{1}$$

отличны от нуля, во всяком случае тогда, когда p есть простое число. Он мог доказать эту теорему только для миноров порядков $1, 2, 3, p-3, p-2, p-1$. Эта задача казалась весьма трудной, так как в силу комплексности коэффициентов к ней нельзя было применить какого-либо приема, основанного на неравенствах, вроде правил Декарта. Через несколько дней я решил эту задачу. Для этого я применил арифметический метод: принимая во внимание, что $\pi = \varepsilon - 1$ есть простое число поля $k(\varepsilon), (p-1)$-ая степень которого ассоциирована с p, я получил разложение каждого минора определителя (1) по степеням π. Рассмотрим минор

$$\begin{vmatrix} \varepsilon^{a_1x_1}, & \varepsilon^{a_1x_2}, & \ldots, & \varepsilon^{a_1x_k} \\ \varepsilon^{a_2x_1}, & \varepsilon^{a_2x_2}, & \ldots, & \varepsilon^{a_2x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon^{a_kx_1}, & \varepsilon^{a_kx_2}, & \ldots, & \varepsilon^{a_kx_k} \end{vmatrix},$$

где $0 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_k < p, 0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_k < p$. Разлагая каждый элемент $\varepsilon^{a_\mu x_\nu}$ по степеням π:

$$\varepsilon^{a_\mu x_\nu} = (1+\pi)^{a_\mu x_\nu} = 1 + \frac{a_\mu x_\nu}{1}\pi + \frac{a_\mu x_\nu(a_\mu x_\nu - 1)}{2}\pi^2 + \cdots ,$$

подставляя в минор и разлагая последний по столбцам, мы получим для каждого слагаемого выражение типа

$$\begin{vmatrix} C^{k_1}_{a_1x_1}\pi^{k_1}, & \ldots, & C^{k_k}_{a_1x_k}\pi^{k_k} \\ C^{k_1}_{a_2x_1}\pi^{k_1}, & \ldots, & C^{k_k}_{a_2x_k}\pi^{k_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C^{k_1}_{a_kx_1}\pi^{k_1}, & \ldots, & C^{k_k}_{a_kx_k}\pi^{k_k} \end{vmatrix}.$$

Соединим вместе те слагаемые, для которых сумма $k_1+k_2+\cdots+k_k$ имеет одно и то же значение. Если

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_k < 0 + 1 + \cdots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2},$$

то все определители равны нулю. Если $k_1+k_2+\cdots+k_k = \frac{(k-1)k}{2}$, то соответствующие определители не равны нулю только тогда, если $k_1, k_2, \ldots, k_k$ принимают значения $0, 1, \ldots, k-1$ в любом порядке. Сумма таких определителей равна

$$\frac{\Pi(x_i - x_j)\Pi(a_i - a_j)}{1!2!\ldots(k-1)!}\pi^{\frac{k(k-1)}{2}},$$

откуда

$$\begin{vmatrix} \varepsilon^{a_1x_1}, & \dots, & \varepsilon^{a_1x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon^{a_kx_1}, & \dots, & \varepsilon^{a_kx_k} \end{vmatrix} \equiv \frac{\Pi(x_i - x_j)\Pi(a_i - a_j)}{1!2!\dots(k-1)!}\pi^{\frac{k(k-1)}{2}} \pmod{\pi^{\frac{k(k+1)}{2}}}.$$

Из этого следует, что этот минор не равен нулю. А.М. Островский с моего согласия поместил это доказательство в свою статью “Mathematische Miszellen. VII. Über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteten Potenzreihen” (Jahresber. der DMV **35**, 1926, стр. 269–280).

А. Данилевский дал другой вывод этой теоремы в статье “Про одну теорему Островского–Чеботарева” (Зап. н.-д. Инст. ХДУ **14**, 1937, стр. 81–84).

На обратном пути я опять остановился на несколько дней в Берлине, где посетил опять И. Шура, а также Лихтенштейна (редактор “Math. Zeitschrift”) и Шоттки.

ЛИТЕРАТУРА

К §8

1. О поверхностях переноса. Мат. сб. **31**, 434–445, 1924; [Собр. соч., т. II, стр. 171–183].

2. Об одном обобщении поверхпостей переноса. Журн. н.-и. кафедр Одессы, т. II, № 3, 1926; [Собр. соч., т. II, стр. 198–209].

3. Über Flächen, welche Imprimitivitätssysteme in Bezug auf eine gegebene Transformations-grüppe enthalten. Мат. сб. **34**, 141–206, 1927 [Собр. соч., т. II, стр. 217–277].

4. Об обобщенных поверхностях переноса. Труды сем. по тенз. ан., в. 4, 351–359, 1937; [Собр. соч., т.II, стр. 286–288].

5. Über eine Verallgemeinerung des Cliffordschen Satzes. Circ. Mat. Pal. **55**, 1–11, 1931; [Собр. соч., т. I, стр. 172–180].

К §9

1. О методе исключения переменных из трансцендентных уравнений, Изв. Каз. ФМО (2) **24**, 1–6, 1924. Поправка. Изв. Каз. ФМО (3) **1**, 146–148, 1926; [Собр. соч., т. II, стр. 19–25].

2. Bemerkung zur Theorie der schlichten Funktionen. Jahresber. DMV **38**, 244–247, 1929; [Собр. соч., т. II, стр. 57–60].

3. О значении работ Лагранжа по теории чисел и алгебре. Усп. мат. наук, в. II. Ж. Л. Лагражн. Сборник, 1937.

К §10

1. Критерий вещественности корней трансцендентиых уравнений. Уч. зап. высш. школы Одессы **2**, 15–30, 1922; [Собр. соч., т. II, стр. 3–18].

2. Über die Realität von Nullstellen ganzer transzendenter Funktionen. Math. Ann. **99**, 660–686, 1928; [Собр. соч., т. II, стр. 29–56].

К §11

1. Задача, обратная задаче Чирнгаузена. Вестн. чистого и прикл. знания (Одесса), т. I, в. 2, стр. 1–8, 1922; [Собр. соч., т. I, стр. 5–13].

2. Доказательство теоремы Кронекера–Вебера относительно абелевых областей, Мат. сб. **31**, 302–308, 1923; [Собр. соч., т. I, стр. 18–26].

К §16

1. Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок. Изв. Росс. АН, 1923, стр. 205–250; [Собр. соч., т. I, стр. 27–65].

2. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören. Math. Ann. **95**, 191–228, 1925; [Собр. соч., т. I, стр. 27–65].

3. Об одной теореме Гильберта. Вiстi ВУАН, 1923, стр. 3–7; [Собр. соч., т. I, стр. 14–17].

4. Studien über Primzahlendichtigkeiten. I. Über Grenzen zwischen denen gewiss Primzahlen liegen, die zu einer gegebenen Abteilung von Substitutionen gehören. Изв. Каз. ФМО (3) **2**, 14–20, 1927; [Собр. соч., т. I, стр. 95–101].

II. Über Grenzen zwischen denen gewiss Primzahlen liegen, die zu einer gegebenen Klasse von Substitutionen gehören. Изв. Каз. ФМО (3) **3**, 1–17, 1927; [Собр. соч., т. I, стр. 102–108].

О РАБОТЕ Н.Г. ЧЕБОТАРЕВА “ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ СОВОКУПНОСТИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ К ЗАДАННОМУ КЛАССУ ПОДСТАНОВОК”*

И.Р. Шафаревич

Целью этой статьи является изложить, во-первых, работы о распределении простых чисел, предшествовавшие работе Н. Г. Чеботарева, во-вторых, основную идею работы, указанной в заглавии и, в-третьих, работы по теории алгебраических чисел, возникшие под влиянием этой работы.

1. Работы Дирихле, Кронекера и Фробениуса

1) В 1837 г. Дирихле доказал свою знаменитую теорему: в прогрессии $mx + a, (m, a) = 1$, лежит бесконечно много простых чисел. При доказательстве этой теоремы Дирихле ввел новое понятие — плотность множества простых чисел. Говорят, что множество простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, имеет плотность μ, если функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-s} - \mu \lg \frac{1}{s-1}$$

остается ограниченной, когда s стремится к 1, оставаясь >1. Записывается это так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-s} \sim \mu \lg \frac{1}{s-1}. \tag{1}$$

Из того, что ζ-функция Римана имеет при $s = 1$ полюс 1-го порядка, следует, что плотность множества всех простых чисел равна 1.

Плотность любого множества, следовательно, не превосходит 1. Замечательной особенностью доказательства теоремы Дирихле

*Н.Г. Чеботарев *Собрание сочинений.* Т. 3, М.–Л., Изд-во АН СССР, 1950. — С. 81–91.

является то, что, доказывая существование бесконечного множества простых чисел в прогрессии $mx+a$, не конструируют каким-либо образом эти числа, а доказывают, что плотность их положительна. Более того, доказывается, что все простые числа распределены по всем прогрессиям $mx + a$ с данным m и $(m, a) = 1$ с одинаковой плотностью. Так как число таких прогрессий равно функции Эйлера $\varphi(m)$, а плотность множества всех простых чисел равна 1, то плотность множества простых чисел, лежащих в одной прогрессии, равна $\frac{1}{\varphi(m)}$, т. е. >0.

2) Так же, как из того, что ζ-функция Римана имеет при $s = 1$ полюс 1-го порядка, следует, что плотность множества всех простых чисел равна 1, из аналогичного факта, относящегося к ζ-функции Дедекинда произвольного поля алгебраических чисел K, следует формула

$$\sum N(\mathfrak{p})^{-s} \sim \lg \frac{1}{s-1}, \tag{2}$$

где сумма распространена на все простые идеалы $\mathfrak{p}$ поля K. Так как часть этой суммы, относящаяся к идеалам выше 1-го порядка, ~ 0, то отсюда получается следующая формула Кронекера:

$$\sum a_p(K) p^{-s} \sim \lg \frac{1}{s-1}, \tag{3}$$

где $a_p(K)$ — число простых множителей 1-го порядка, на которые делится p в поле K, а сумма распространена на все простые числа. [1]

3) Фробениус открыл связь, существующую между простыми идеалами нормального расширения поля рациональных чисел и автоморфизмами его группы Галуа.

Пусть $\mathfrak{o}$ — кольцо целых чисел поля K и $\mathfrak{p}$ — некритический простой идеал K. Тогда кольцо классов вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ является полем, состоящим из p^f элементов, где $p^f = N(\mathfrak{p})$ — абсолютная норма $\mathfrak{p}$. Это поле является расширением степени f поля из p элементов, причем нормальным и циклическим. Все автоморфизмы его задаются формулами

$$x \to x^{p^k} (k = 0, 1, \ldots, p-1)$$

[1] Доказательство теоремы Дирихле и формул (1) и (2) см. в книге Г. Вейля “Алгебраическая теория чисел” гл. IV, §11–13.

и являются степенями автоморфизма σ, для которого

$$\sigma(x) = x^p.$$

Возможность выбрать в циклической группе Галуа поля $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ фиксированную образующую σ является основой всех дальнейших рассуждений. Автоморфизмы K, переводящие $\mathfrak{p}$ в себя, индуцируют в $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ автоморфизмы. Можно показать, что любой автоморфизм $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ индуцируется некоторым автоморфизмом K, оставляющим $\mathfrak{p}$ на месте, и ввиду того что $\mathfrak{p}$ — некритическое, одним единственным. Автоморфизм, индуцирующий σ, называется автоморфизмом Фробениуса $\mathfrak{p}$. Он определяется только полем K и его простым идеалом $\mathfrak{p}$. По предыдущему автоморфизм Фробениуса однозначно определен как такой автоморфизм σ поля K, что для любого целого α

$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha^p \mod \mathfrak{p}.$$

Сопряженным идеалам соответствуют сопряженные автоморфизмы Фробениуса. Множество автоморфизмов Фробениуса, соответствующих всем простым делителям простого числа p, образует целый класс сопряженных элементов группы Галуа. Этот класс обозначается через $\left(\frac{K}{p}\right)$. Говорят, что p принадлежит к классу $\left(\frac{K}{p}\right)$.

Если K является полем деления круга на m частей: $K = R(\zeta), \zeta = e^{2\pi i/m}$, то ввиду абелевости группы Галуа класс $\left(\frac{K}{p}\right)$ состоит из одного автоморфизма, который определяется соотношением

$$\sigma(\zeta) = \zeta^p.$$

Таким образом, простое число p принадлежит автоморфизму $\sigma_\alpha(\sigma_\alpha(\zeta) = \zeta^\alpha)$, если оно лежит в прогрессии $mx + a$. Ввиду этого теорему Дирихле можно сформулировать так: плотность простых чисел принадлежащих к одному классу (состоящему в данном случае из одного элемента), равна $\frac{1}{\varphi(m)}$. При этом $\varphi(m)$ — степень K.[1]

Естественно было поставить вопрос о плотности множества простых чисел, принадлежащих к заданному классу автоморфизмов

[1] Доказательства изложенных здесь фактов см. в цитированной книге Г. Вейля, гл. III, §10 и 12.

произвольного нормального расширения. Этот вопрос Фробениусу решить не удалось, но он решил другой, более легкий — о плотности множества простых чисел, принадлежащих к заданному отделу группы Галуа. Отделом группы называется совокупность элементов группы, сопряженных с фиксированным элементом s или какой-нибудь его степенью s^q, взаимно простой с порядком s. Ясно, что отдел состоит из нескольких классов.

Т е о р е м а Ф р о б е н и у с а. Плотность множества простых чисел, принадлежащих к отделу группы Галуа нормального расширения, равна отношению числа элементов отдела к степени расширения.

Доказательство основано на простых теоретико-групповых рассмотрениях и на применении формулы Кронекера ().

Пусть p принадлежит классу $\left(\frac{K}{p}\right)$, содержащему автоморфизм s. Пусть d — любой делитель порядка f элемента s и K_d — подполе K, принадлежащее к подгруппе, порожденной s^d. Применим формулу Кронекера ко всем полям K_d :

$$\sum a_p(K_d)p^{-s} \sim \lg \frac{1}{s-1}. \qquad (4)$$

$a_p(K_d)$ вычисляется при помощи простого теоретико-группового рассмотрения. Если H —подгруппа группы Галуа поля K, и Ω — принадлежащее к H подполе K, то $a_p(\Omega)$ равно числу тех левых классов смежности по H для элементов t, из которых $t^{-1}st \in H$, если s — автоморфизм Фробениуса простого делителя $\mathfrak{p}$ числа p в K. В применении к группе H, порожденной s^d, это дает

$$a_p(K_d) = 0, \text{если} \left(\frac{K}{p}\right) \text{не содержит степеней } s^d$$

$$a_p(K_d) = \frac{n}{di_r}, \text{если} \left(\frac{K}{p}\right) \text{ содержит } s^\mu,\ (\mu, f) = \frac{f}{r},\ r\text{—делитель } d.$$

Здесь i_r — индекс нормализатора подгруппы, порожденной $s^{f/r}$. Иначе говоря, все p, для которых $\left(\frac{K}{p}\right)$ входит в отдел, содержащий $s^{f/r}$, входят в сумму () с одним и тем же коэффициентом — $\frac{n}{di_r}$ и вовсе в нее не входят, если $\left(\frac{K}{p}\right)$ не входит ни в один из этих отделов. Поэтому, если обозначить через $A_r(s)$ сумму $\sum p^{-s}$, распространенную на все p, принадлежащие к отделу, содержащему $s^{f/r}$, то получим

$$\sum_{r/d} \frac{n}{di_r} A_r(s) \sim \lg \frac{1}{s-1}. \tag{5}$$

Такие суммы по делителям обращаются всегда при помощи функции Мебиуса $\mu(n)$. Умножая обе части () на $\mu(f/r)$ и суммируя по всем делителям d числа f, мы получим ввиду формул

$$\sum_{d/f} \mu\left(\frac{f}{d}\right) = 0,$$

$$\sum_{d/f} \mu\left(\frac{f}{d}\right) d = \varphi(f)$$

формулу

$$A_f \sim \frac{i_f \varphi(f)}{u} \lg \frac{1}{s-1},$$

что и доказывает теорему Фробениуса.

2. Расширение при помощи полей деления круга

Хотя из теоремы Фробениуса можно вывести ряд важных следствий, она не является обобщением теоремы Дирихле на любые поля алгебраических чисел. Действительно, в случае, когда поле K является полем деления круга, теорема Фробениуса превращается в теорему более слабую, чем теорема Дирихле. Например, для поля деления круга на 5 частей теорема Фробениуса дает, что бесконечное число простых чисел лежит в прогрессиях $5x+1, 5x+4$ и, кроме того, в обеих прогрессиях $5x+2, 5x+3$ вместе, что не исключает того, что в одной из прогрессий $5x+2, 5x+3$ не лежит ни одного простого числа. Даже из доказательства теоремы Фробениуса можно заметить, что она опирается на более элементарные факты (формула Кронекера), чем теорема Дирихле.

В 1923 г. Н. Г. Чеботарев получил метод, позволяющий определить плотность простых чисел, принадлежащих к классу автоморфизмов. Этот метод носит название метода расширения при помощи полей деления круга. Хотя его принципиальный смысл до сих пор еще не достаточно ясен, он оказался очень полезным в ряде вопросов теории алгебраических чисел. Метод расширения при помощи полей деления круга заключается в том, что вместе с полем K рассматривается такое поле деления круга W, что простые числа, принадлежащие к некоторому отделу внутри K и некоторому классу внутри W, принадлежат к определенному классу внутри K. Таким образом, этот метод представляет собой удачную комбинацию теорем Фробениуса и Дирихле. Более точный смысл этого метода виден из следующей леммы.

Л е м м а. Если W — поле деления круга, пересекающееся с K только по полю рациональных чисел, s — автоморфизм K порядка f и a — автоморфизм W, порядок которого делится на f, то если простое число принадлежит к a в W и к отделу, содержащему sa в KW, то оно принадлежит к классу, содержащему s в K.

Доказательство основано на следующем простом свойстве символа $\left(\frac{K}{p}\right)$: если K_1 и K_2 — два нормальных расширения, пересекающихся только по полю рациональных чисел, то

$$\left(\frac{K_1K_2}{p}\right) = \left(\frac{K_1}{p}\right)\left(\frac{K_2}{p}\right). \tag{6}$$

Из этого следует, что если p принадлежит к классу, содержащему $s^m a^m$ в KW, то оно принадлежит к a^m в W и к классу, содержащему s^m в K. Так как по условию p принадлежит к a в W, то $a^m = a$, т. е.

$$m \equiv 1(g),$$

где g — порядок a. Но по условию $g \equiv 0(f)$ и, следовательно,

$$m \equiv 1(f),$$

т. е. $s^m = s$. Лемма доказана.

Из леммы видно, каким образом метод расширений при помощи полей деления круга сводит изучение классов на изучение отделов и классов в поле деления круга. Для проведения этого метода до конца необходима формула Гекке[1], являющаяся обобщением теоремы Дирихле. Пусть Ω — любое поле и z — число классов вычетов по некоторому модулю, в которых лежат нормы

[1] E. Hecke. Gött. Nachr., 1917. Н.Г. Чеботарев предложил новое, более простое доказательство формулы Гекке.

идеалов из Ω. Тогда формула Гекке утверждает, что

$$\sum a_p(\Omega)p^{-s} \sim \frac{1}{z} \lg \frac{1}{s-1},$$

где сумма распространена на все простые числа, лежащие в каком-либо одном из этих z классов. В частности, из этой формулы видно, что в каждом таком классе существует p, для которого $a_p(\Omega) \neq 0$, т. е. которое является нормой простого идеала первого порядка. Так как классы вычетов, в которых лежат нормы идеалов, образуют группу, то это верно ввиду предыдущего и для классов, в которых лежат нормы простых идеалов первого порядка.

Т е о р е м а Ч е б о т а р е в а. Плотность множества простых чисел, принадлежащих к классу группы Галуа нормального расширения, равна отношению числа элементов класса к степени расширения.

Доказательство основано на применении леммы, формулы Гекке и теоремы Фробениуса.

Возьмем поле W деления круга на N частей такого типа, как рассматривалось в лемме, и выберем в нем указанный там элемент a. Обозначим через Ω подполе KW, принадлежащее к подгруппе, порожденной sa.

Применим формулу Гекке к Ω и классам вычетов $(\mathrm{mod}\ N)$. Из свойств символа Фробениуса легко следует, что простое число p, для которого $a_p(\Omega) \neq 0$, принадлежит в KW к классу, содержащему $s^m a^m$ при некотором m, т. е. ввиду () к a_m в W. С другой стороны, по теореме Фробениуса существует простое число p, принадлежащее в KW к отделу, содержащему sa, т. е. к классу, содержащему $s^r a^r$, где r — взаимно просто с порядком sa. Это простое число принадлежит к a^r в W. Так как прогрессии, в которых лежат нормы простых идеалов первого порядка из Ω, образуют группу, то во всех прогрессиях, в которых лежат простые числа, принадлежащие любому a^m в W, лежат и простые числа, являющиеся нормами простых идеалов первого порядка из Ω, т. е. для которых $a_p(\Omega) \neq 0$. Следовательно, число z в формуле Гекке равно g. Применим эту формулу к тому классу вычетов, в котором лежат простые числа, принадлежащие к a в W. Ввиду леммы мы получим

$$\sum_{\left(\frac{K}{p}\right)\ni s,\left(\frac{W}{p}\right)\ni a} a_p(\Omega)p^{-s} \sim \frac{1}{g}\lg\frac{1}{s-1}. \tag{7}$$

Число $a_p(\Omega)$ легко подсчитывается аналогично тому, как это делается при доказательстве теоремы Фробениуса. Оно оказывается равным Nn/gh, где n — степень K, а h — число элементов в классе, содержащем s.

Следовательно,

$$\sum_{\left(\frac{K}{p}\right)\ni s,\left(\frac{W}{p}\right)\ni a} p^{-s} \sim \frac{h}{Nn}\lg\frac{1}{s-1}.$$

Если обозначить через N_f число элементов a в группе Галуа W, порядок которых делится на f, то

$$\sum_{\left(\frac{K}{p}\right)\ni s} p^{-s} \geq \frac{N_f}{N}\cdot\frac{h}{n}\lg\frac{1}{s-1} + f(s),$$

где $f(s)$ — функция, ограниченная при $s \to 1$.

Можно легко выбрать W так, чтобы N_f/N было сколь угодно близко к единице. Следовательно,

$$\sum_{\left(\frac{K}{p}\right)\ni s} p^{-s} \geq \frac{h}{n}\lg\frac{1}{s-1} + f(s). \tag{8}$$

Так как это неравенство должно быть верным для любого класса сопряженных элементов группы Галуа K, а в теореме Фробениуса стоит знак равенства, то из простых соображений следует, что в формуле () должен стоять знак равенства. Этим доказана теорема Чеботарева.[1]

Заметим, что, хотя в формулировке теоремы Чеботарева говорится о плотности простых чисел и, следовательно, теорема является аналитической, основная трудность, как и в теореме Дирихле, заключается не в определении плотности, а в доказательстве существования бесконечно многих (или даже хотя бы одного) простых чисел, принадлежащих к классу автоморфизмов.

[1]Доказательства теорем Фробениуса и Чеботарева приведены здесь в значительно упрощенной форме, принадлежащей Шрейеру [1].

Так же как и теорема Дирихле, теорема Чеботарева в такой чисто арифметической формулировке до сих пор не доказана без применения аналитических средств.

Если желать не определять плотность множества простых чисел, принадлежащих к одному классу автоморфизмов, а только доказать бесконечность множества таких простых чисел, то для этого достаточно уже формулы ().

Так как $a_p(\Omega) \leq (\Omega : R)$, то из формулы следует, что ряд

$$\sum_{\left(\frac{K}{p}\right)\ni s} p^{-s}$$

расходится, $s = 1$.

Заметим в заключение, что понятие плотности множества простых чисел, а вместе с ним и теоремы Фробениуса и Чеботарева обобщаются на случай, когда за основное поле берется не поле рациональных чисел, а произвольное поле алгебраических чисел. Плотность μ множества простых идеалов $\mathfrak{p}_n$ поля K определяется тогда формулой

$$\sum_n N(\mathfrak{p}_n)^{-s} \sim \mu \lg \frac{1}{s-1}.$$

Все теоремы и доказательства переносятся дословно.

3. Артиновский закон взаимности

Вскоре после того, как Н. Г. Чеботарев доказал свою теорему методом расширения при помощи полей деления круга, этот метод нашел чрезвычайно важное приложение в теории относительно-абелевых полей, называемой иначе теорией полей классов.

В 1897–1898 гг. Гильберт доказал для расширений второй степени и высказал без доказательства для любых абелевых расширений произвольного поля алгебраических чисел ряд теорем, полностью описывающих арифметические свойства этих расширений. Эти теоремы были в 1900–1920 гг. доказаны во всей общности Фуртвенглером и Такаги. Согласно теории Такаги, каждому абелеву расширению K поля алгебраических чисел k можно поставить в соответствие некоторый идеал $\mathfrak{F}$ основного поля, состоящий из тех и только тех простых множителей, из которых состоит дискриминант K. $\mathfrak{F}$ называется ведущим идеалом K. Группа целых и дробных идеалов k, взаимно простых с $\mathfrak{F}$, разбивается на классы смежности по подгруппе главных идеалов (α), где α — любое число $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}}$. Получается конечное число классов смежности, которые называются классами идеалов $(\bmod\ \mathfrak{F})$. Классы идеалов $(\bmod\ \mathfrak{F})$ — это наиболее естественное обобщение арифметической прогрессии на любое поле алгебраических чисел. Те классы идеалов $(\bmod\ \mathfrak{F})$, в которых лежат нормы идеалов из K, образуют группу, называемую группой, ассоциированной с K в k. Само поле K называется полем классов для этой подгруппы.

Основные теоремы теории полей классов заключаются в следующем:

1) (Теорема изоморфизма). Факторгруппа группы всех классов идеалов $(\bmod\ \mathfrak{F})$ по подгруппе, ассоциированной с K, изоморфна группе Галуа K/k.

2) (Теорема разложения). Простой идеал $\mathfrak{p}$ из k разлагается в K на произведение простых идеалов порядка f, если f есть порядок класса идеалов $(\bmod\ \mathfrak{F})$, в котором лежит $\mathfrak{p}$, в факторгруппе по подгруппе, ассоциированной с K.

3) (Теорема единственности). Поле классов однозначно определяется ассоциированной с ним группой.

4) (Теорема существования). Для каждой подгруппы группы классов идеалов $(\bmod\ \mathfrak{F})$ существует поле классов.

При этом при доказательстве теоремы изоморфизма не конструировался какой-либо фиксированный изоморфизм между фигурирующими в теореме группами, а просто доказывалось, что обе группы имеют как конечные абелевы группы одинаковые инварианты. Артину удалось устранить этот недостаток и эффективно построить изоморфизм между факторгруппой группы классов идеалов $(\bmod\ \mathfrak{F})$ по подгруппе, ассоциированной с K, и группой Галуа K/k. А именно, в 1924 г. Артин предположил [2], что отображение, ставящее в соответствие классу смежности по ассоциированной подгруппе, содержащему простой идеал $\mathfrak{p}$ символ Фробениуса $\left(\frac{K}{p}\right)$ (который является элементом, а не классом группы Галуа K/k ввиду ее абелевости), и является этим изоморфизмом. Что в каждом классе идеалов $(\bmod\ \mathfrak{F})$ лежит простой идеал, было доказано раньше в так называемой обобщенной теореме об арифметической прогрессии.

Доказательство этого предположения Артина позволило бы отобразить все арифметические свойства поля в его группу Галуа так же, как основная теорема теории Галуа делает это с алгебраическими свойствами.

Для того, чтобы точно сформулировать предположение Артина, обозначим через $C(\mathfrak{p})$ тот класс смежности группы классов $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{F})$, в котором лежит $\mathfrak{p}$ по подгруппе, ассоциированной с K, через G — группу всех $C(\mathfrak{p})$, а через $\mathfrak{G}$ — группу Галуа K/k. Точно гипотеза Артина формулируется в виде следующих четырех предложений:

1) из $C(\mathfrak{p}_1) = C(\mathfrak{p}_2)$ следует $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right)$,

2) из $C(\mathfrak{p}) = C(\mathfrak{p}_1)C(\mathfrak{p}_2)$ следует $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right)\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right)$,

3) из $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right)$,следует $C(\mathfrak{p}_1) = C(\mathfrak{p}_2)$,

4) $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right)$ пробегает всю группу $\mathfrak{G}$, когда $\mathfrak{p}$ пробегает все простые идеалы k, взаимно простые с $\mathfrak{F}$.

Из этих четырех предложений два последних являются простыми следствиями двух первых. Действительно, 1) и 2) утверждают, что соответствие $C(\mathfrak{p}) \to \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ является гомоморфизмом G на подгруппу $\mathfrak{G}$, а 3) и 4), что это будет изоморфизм на всю группу. Но $C(\mathfrak{p}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, как это следует, с одной стороны, из теоремы о разложении, а с другой, из свойств символа Фробениуса. Следовательно, гомоморфизм является изоморфизмом. Он должен быть изоморфизмом на всю группу G, так как G и $\mathfrak{G}$ имеют одинаковые порядки.

Но Артину не удалось в работе 1924 г. доказать предложения 1) и 2). Здесь возникли те же самые трудности, что и при переходе от теоремы Фробениуса к теореме Чеботарева. А именно, очень просто устанавливалось взаимное однозначное соответствие между отделами групп G и $\mathfrak{G}$, но не удавалось разбить отделы на элементы. Артину не удалось преодолеть эти трудности до того момента, как появилась работа Н. Г. Чеботарева, содержащая доказательство его закона плотностей методом расширения при помощи поля деления круга. В 1927 г. Артин опубликовал доказательство своей теоремы, которая теперь называется артиновским законом взаимности [3]. В предисловии к своей работе Артин указывает, что одной из основных идей доказательства является метод расширения при помощи поля деления круга, принадлежащий Н. Г. Чеботареву.

Покажем, как методом расширения при помощи поля деления круга доказывается предложение 1). Предложение 2) доказывается совершенно аналогично.

Как и для любой теоремы, доказываемой этим методом, должно быть сначала доказано соответствующее утверждение для полей деления круга и для отделов вместо классов (в абелевом случае — элементов).

Что артиновский закон взаимности верен для полей деления круга, проверяется автоматически, так как и автоморфизмы Фробениуса и ассоциированная подгруппа нам известны.

Докажем, что если $C(\mathfrak{p}_1) = C(\mathfrak{p}_2)$, то $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right)^m$, где m — взаимно просто с порядком $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right)$.

Для этого достаточно доказать, что циклические подгруппы, порожденные $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right)$ и $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right)$, совпадают.

Пусть H — подгруппа, ассоциированная с K, $H_i = (C(\mathfrak{p}_i), H)(i = 1, 2)$, K_i — поле классов для H_i. В теории полей классов доказывается, что $K_i \subset K$. Согласно теореме разложения, $\mathfrak{p}_i$ распадается в K_i на простые идеалы первого порядка. Ввиду свойств символа Фробениуса из этого следует, что K_i принадлежит к подгруппе группы Галуа K/k, порожденной $(\frac{K}{\mathfrak{p}_i})$. Так как $C(\mathfrak{p}_1) = C(\mathfrak{p}_2)$ и, следовательно, $H_1 = H_2$, то по теореме единственности $K_1 = K_2$ и, следовательно, $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right)$ и $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right)$ порождают одну циклическую подгруппу.

Для проведения метода расширения при помощи поля деления круга выберем поле деления круга W, не пересекающееся с K и такое, что если H' — ассоциированная с ним подгруппа, $C'(\mathfrak{p}_1)$ и $C'(\mathfrak{p}_2)$ — классы смежности по H', содержащие $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$, то $C'(\mathfrak{p}_1) = C'(\mathfrak{p}_2)$ и порядок $\left(\frac{W}{\mathfrak{p}_1}\right)$ делится на порядок $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right)$.

Порядок $\left(\frac{W}{\mathfrak{p}_1}\right)$ обозначим g, а порядок $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right)$ — f.

Рассмотрим поле KW, являющееся абелевым расширением.

Ассоциированная с ним группа $\overline{H}$ является, как доказывается в теории полей классов, пересечением H и H'. Следовательно, классы смежности по $\overline{H}$,$\overline{C}(\mathfrak{p}_1)$ и $\overline{C}(\mathfrak{p}_2)$, в которых лежат $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_1$, совпадают.

Как мы уже доказали, из $\overline{C}(\mathfrak{p}_1) = \overline{C}(\mathfrak{p}_2)$ следует

$$\left(\frac{KW}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{KW}{\mathfrak{p}_2}\right)^m,$$

или, ввиду (),

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right)\left(\frac{W}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right)^m \left(\frac{W}{\mathfrak{p}_2}\right)^m.$$

Ввиду того, что группа Галуа KW/k является прямым произведением групп K/k и W/k,

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right)^m, \left(\frac{W}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{W}{\mathfrak{p}_2}\right)^m.$$

Ввиду того, что для W/k артиновский закон взаимности верен, $m \equiv 1(g)$, а так как $g \equiv 0(f)$, то

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}_2}\right).$$

Заметим, что при доказательстве мы опустили техническую, но довольно длинную проверку того, что существует поле деления круга W, обладающее всеми нужными свойствами.

Артиновский закон взаимности вызвал коренную перестройку теории полей классов. Эрбран и Шевалей построили теорию полей классов так, что артиновский закон взаимности используется для определения ассоциированной группы. Тогда трудности концентрируются в доказательстве того, что ассоциированная группа состоит из классов идеалов по некоторому модулю. Доказательство этого факта как и в первоначальном изложении Шевалей [4], так и в последующих изложениях Шевалей [5] и Веплеса [6] основано на двукратном применении метода расширения при помощи поля деления круга.

Литература

[1] O. Schreier. Ueber eine Arbeit von Herrn Tschebotareff. Abh. Math. Sem., Hamburg, Bd. 5, 1927.

[2] E. Artin. Ueber eine neue Art von Z-Reihen. Abh. Math. Sem., Hamburg, Bd. 3, 1924.
[3] E. Artin. Beweis des allgemeinen Reziprozitatsgesetzes. Abh. Math. Sem., Hamburg, Bd. 5, 1927.
[4] C. Chevalley. Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. Journ. Fac. Sci. Imp. Univ., Tokyo, II, v. 9, 1933.
[5] C. Chevalley. Sur la théorie du corps de classes. Ann. of Math. 41, 1940.
[6] Whaples. Non-analytic class field theory and Grünwald's theorem. Duke Math. Journ. 9, 1942.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ СОВОКУПНОСТИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ К ЗАДАННОМУ КЛАССУ ПОДСТАНОВОК *

(Изв. Российской Академии Наук, 17 (1923), стр. 205–250)
Представлено на заседании Отделения физико-математических наук
7 *марта* 1923 *г.*

Задача, решение которой является целью настоящей работы, была поставлена Фробениусом [1]. Она состоит в следующем. Дано неприводимое нормальное уравнение n-ой степени

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Обозначим область, полученную от присоединения к области рациональных чисел его корня, через $\Omega(x)$, а через $\mathfrak{p}$ — простой идеал внутри $\Omega(x)$, взаимно простой с дискриминантом уравнения (1). Тогда имеют место сравнения

$$x_1^p \equiv x_{\alpha_1}, x_2^p \equiv x_{\alpha_2}, \ldots, x_n^p \equiv x_{\alpha_n} \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{2}$$

если через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначить сопряженные корни уравнения (1), а

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

является подстановкой над $1, 2, 3, \ldots, n$, которая, как известно, входит в группу G уравнения (1) [2], [1]. Тогда будем говорить, что простой идеал $\mathfrak{p}$ *принадлежит* к подстановке S, а рациональное простое число p, кратное $\mathfrak{p}$, *принадлежит* к классу подстановок TST^{-1}, где T пробегает все подстановки группы G.

Рассмотрим совокупность всех простых чисел, принадлежащих к этому классу подстановок. Выражение

$$\lim_{=1} \frac{\sum\limits_p p^{-s}}{\lg \frac{1}{s-1}}, \tag{3}$$

где сумма распространяется на все простые числа этой совокупности, носит название *плотности* совокупности. Наша задача заключается в определении величины плотности этой совокупности.

---

*Н.Г. Чеботарев *Собрание сочинений.* Т. 1, М.–Л., Изд-во АН СССР, 1949. — С. 27–65.

Понятие плотности впервые встречается у Дирихле [3], который доказал, что простые числа *равномерно* распределяются по классам сравнений любого модуля k, взаимно простым с k, т. е. что плотность каждой такой совокупности равна $\frac{1}{\varphi(k)}$. Исследования Куммера связывают этот результат с определением плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к каждой из подстановок в области каких-нибудь корней из единицы ([4]; см. также §11 моей работы). Кронекер [5] нашел величину плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к тождественной подстановке в произвольной области.

Вопросом о простых числах, принадлежащих к любому классу подстановок в произвольной области, занялся Фробениус. Скелет его результата был ему известен еще в 1882 г., и в 101 томе Journ. f. Math, он публикует групповую часть этой проблемы.

Однако свой результат в полном объеме он опубликовал лишь после того, как Дедекинд [2] доказал обратную теорему: подстановка, к которой принадлежит какой-нибудь простой идеал, входит в группу области. В своем основном мемуаре Фробениус [1], применяя результат Кронекера последовательно к различным делителям основной области, определяет плотность совокупности простых чисел, принадлежащих к *отделу* данной подстановки, т. е. к совокупности классов, образованных всеми ее первообразными степенями. Фробениусу, однако, не удалось определить плотностей совокупностей простых чисел, принадлежащих к отдельным классам подстановок, о чем он говорит в своей работе в следующих выражениях: “Indem man hier für G der Reihe nach alle cyklischen Untergruppen von H setzt, erhält man eine Reihe von Gleichungen, die aber nicht ausreichen, urn schliessen zu können, dass

$$\sum p_\lambda^{-1-\omega} = \frac{h_\lambda}{h} \lg\left(\frac{1}{\omega}\right) + \mathfrak{P}_\lambda(\omega) \tag{16}$$

ist”. И далее: “Wenn es gelänge, die Formel (16) zu beweisen, so würde sich für die Dichtigkeit der Primzahlen P_λ, die der λ^{ten} Classe von Substitutionen entsprechen, der einfache Ausdruck:

$$D_\lambda = \frac{h_\lambda}{h} = \frac{1}{v_\lambda} \tag{18}$$

ergeben, es würde also der Satz geiten:

V. Jeder Classe von Substitutionen der Gruppe H entspreshen unzählig viele rationale Primzahlen. Iher Dichtigkeit ist der Anzahl der verschiedenen Substitutionen der Classe proportional. Oder:

Die Dichtigkeit der Primzahlen, die einer Classe von Substitutionen entsprechen, ist der Dichtigkeit der Classe gleich".

Этому общему результату Фробениуса не было суждено сыграть в науке такой большой роли, какую сыграл результат Гильберта, который был опубликован почти одновременно с фробениусовским и может быть рассматриваем как его частный случай, выраженный в несколько видоизмененной форме. Это — теорема Гильберга о существовании в любой нормальной области, заключающей в себе l-е корни из единицы, бесчисленного множества простых идеалов с наперед заданной вычетностью ([6]; см. также главу VI настоящей работы). Основываясь на этой теореме, Фуртвенглер [7] доказывает для любой области существование соответствующей ей *области классов* (Klassenkörper). Эта же теорема играет большую роль при выводе общего закона взаимности [8].

Дальнейшая литература по этому вопросу невелика. В Arch. d. Math. u. Phys. Bd. 6 (3), 1904, помещены три небольшие статьи М. Бауэра, в которых он дает непосредственные приложения фробениусовского результата к констатированию тождественности или независимости двух областей, а также к выводу характеристического свойства областей деления круга. Эти результаты являются частными случаями теоремы, доказываемой в главе V настоящей работы. Кроме этих статей, в Протоколах Харьковского мат. общ. за 1915 год помещена статья Б.Н. Делоне [9], который, пользуясь фробениусовским результатом и законом взаимности Эйзенштейна, доказал (правда, не для всех случаев) теорему Кронекера–Вебера о том, что все абелевы области суть области деления круга.

Моя работа построена по следующему плану:

В §1 я в существенных чертах воспроизвожу исследование Фробениуса, доделывая все выкладки до конца. В ходе рассуждений я значительно уклоняюсь от Фробениуса главным образом потому, что ограничиваюсь рассмотрением неприводимых уравнений, что дает возможность избежать применения трудных и мало известных теорем из теории групп.

В §2 я обобщаю найденную Куммером [4] связь между прогрессиями и областями деления круга. Вместо прогрессии, я ввожу в рассмотрение более общее понятие *комплекса*.

В §3 я обобщаю теорему Дирихле о прогрессиях. Именно, я доказываю существование в любой области бесчисленного множества простых идеалов, нормы которых лежат в наперед заданных допустимых *комплексах*. Подобные обобщения делались и другими авторами. Так, Вебер [10] доказывает даже более общую теорему, но высказывает ее не вполне отчетливо (именно, расплывчато формулировано понятие, соответствующее моим *допустимым комплексам*) и, кроме того, он предполагает существование области классов (Klassenkörper), чего я избегаю, несколько суживая объем результата и вводя понятие комплексов, допустимых в *узком* и в *широком смысле*. При доказательстве приходится обобщать результат Дирихле–Минковского (связь между кратными интегралами и рядами Дирихле). Гильберт [11] делает это же самое обобщение и применяет его к теореме, подобной моей, но только имея в виду комплексы более частного типа.

В § 4 я определяю плотность совокупности простых чисел, принадлежащих к данному классу подстановок. Для этого я присоединяю к нашей области некоторую область деления круга. Тогда, если определяющее эту последнюю уравнение остается по модулю p неприводимым, то теорема 12 показывает, что известные уравнения из распространенной области имеют или не имеют рациональные корни в зависимости от того, к какому из классов отдела принадлежит p. Пользуясь результатом §3, мы отсюда докажем существование в каждом из классов отдела бесчисленного множества принадлежащих к нему простых чисел. Для того же, чтобы определить величину их плотности, я присоединяю не одну область деления круга, а k, причем k безгранично увеличиваю. Этот прием дает возможность определить искомую плотность. Однако оценить величину остаточного члена мне не удалось.

§5 посвящен выводу критерия родственности областей. Он содержит теорему, частные случаи которой рассмотрены в статьях М. Бауэра и Б.Н. Делоне [9].

Наконец, в §6 я показываю, что теорема Гильберта [6], притом в более общей формулировке, может быть легко выведена из результата §5.

§1. Исследование Фробениуса

Возьмем неприводимое нормальное уравнение

$$f(x) = 0 \tag{1a}$$

и обозначим его корни через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда справедлива

Т е о р е м а 1. *Имеют место сравнения*

$$x_1^p \equiv x_{\alpha_1},\ x_2^p \equiv x_{\alpha_2}, \ldots,\ x_n^p \equiv x_{\alpha_n} \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{2a}$$

где p — простое число, не входящее в дискриминант уравнения (1), $\mathfrak{p}$ *— его простой идеальный множитель в* $\Omega(x)$, *а*

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}$$

— подстановка над числами $1, 2, 3, \ldots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о — см. [1], стр. 691.

О п р е д е л е н и е 1. В случае, когда имеют место сравнения (2a), будем говорить, что простой идеал $\mathfrak{p}$ *принадлежит*к подстановке S.

Т е о р е м а 2. *Подстановка S входит в группу Галуа G уравнения* (1*a*).

Д о к а з а т е л ь с т в о — см. [1], стр. 696.

Т е о р е м а 3. *Если* $\mathfrak{p}$ *принадлежит к S, то простой идеал* $\mathfrak{p}/T$, *в который* $\mathfrak{p}$ *переходит посредством подстановки T из G, принадлежит к* $T^{-1}ST$.

Д о к а з а т е л ь с т в о — см. [1], стр. 70.

О п р е д е л е н и е 2. Совокупность подстановок $T^{-1}ST$, где T пробегает всю группу G, будем называть *классом* подстановки S.

Так как p является произведением всех различных простых идеалов, сопряженных с $\mathfrak{p}$, то теорема 3 позволяет ввести следующее новое определение:

О п р е д е л е н и е 3. В случае, если имеют место сравнения (2a), простое число p принадлежит к классу подстановки S.

Т е о р е м а 4. *Если z величина из* $\Omega(x)$, *принадлежащая к группе H, а*

$$F(z) = 0 \tag{4}$$

— неприводимое уравнение, которому она удовлетворяет, то сравнение

$$F(z) \equiv 0 \pmod{p} \tag{5}$$

имеет рациональные корни тогда и только тогда, когда хоть одна из подстановок S класса, к которому принадлежит p, входит в H, и число этих рациональных корней равно числу входящих в H подстановок в ряду $T_\nu S T\nu^{-1}$, если T_ν пробегает все значения $T_1 = 1, T_2, T_3 < \dots$ в разложении

$$G = H + T_2 + T_3 H + \dots .$$

Доказательство — см. [1], §5, стр. 701.

Определение 4. Под символом $P(s-1)$ будем подразумевать функцию от s, остающуюся конечной при $s = 1$.

Теорема 5 (Кронекера). *Имеет место формула*

$$\sum_p \nu_p p^{-s} = \lg \frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{6}$$

где сумма распространяется на все простые числа p, а ν_p обозначает число рациональных корней сравнения (5).

Доказательство — см. [12].

Определение 5. Под *отделом* (Abteilung) мы будем понимать совокупность подстановок TS^iT^{-1}, где T пробегает все подстановки группы G, а i — все числа, не превышающие и взаимно простые с порядком f подстановки S.

Определение 6. Совокупность простых чисел, принадлежащих ко всем классам отдела, будем называть совокупностью, принадлежащей к отделу.

Определение 7. Под *плотностью* совокупности простых чисел мы будем разуметь значение выражения

$$\lim_{s=1} \frac{\sum\limits_p p^{-s}}{\lg \frac{1}{s-1}},$$

где сумма распространяется на все простые числа этой совокупности. Пусть

$$S_\lambda = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1f_\lambda})(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2f_\lambda}) \dots (x_{e_\lambda 1}, x_{e_\lambda 2}, \dots, x_{e_\lambda f_\lambda}) \tag{7}$$

$$(e_\lambda f_\lambda = n)$$

будет подстановка порядка f_λ, входящая в G. Определим плотность совокупности простых чисел, принадлежащих к отделу S_λ.

Введем следующие обозначения:

f_λ — для порядка подстановки S_λ;

n_λ — для числа различных подстановок, входящих в класс S_λ;

k_λ — для числа различных классов, входящих в отдел S_λ;

H_λ — для группы подстановок, входящих в G и перестановочных с S_λ;

$\overline{H}_\lambda$ — для группы таких подстановок T, входящих в G, что подстановки $TS_\lambda T^{-1}$ являются степенями S_λ.

Тогда мы сможем прийти к следующей

Главной теореме. *Плотность совокупности простых чисел, принадлежащих к отделу S_λ, равна $k_\lambda \cdot \frac{n_\lambda}{n}$.*

Для доказательства изберем индуктивный путь, доказав теорему: A) для тождественной подстановки, B) для случая, когда порядок S_λ есть простое число, и C) для общего случая в предположении, что теорема доказана для тех степеней S_δ подстановки S_λ, порядки которых f_δ суть *настоящие* (echte) делители числа f_λ.

A) Применим формулу (6) к уравнению (1). Так как оно нормально, то сравнение

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p} \tag{8}$$

имеет рациональные корни тогда и только тогда, когда имеют место следующие сравнения:

$$x_1^p \equiv x_1,\ x_2^p \equiv x_2, \ldots,\ x_n^p \equiv x_n \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{9}$$

а тогда все корни сравнения (8) рациональны, т. е. $\nu_p = n$. Формула (6) принимает вид

$$\sum_{p_0} p_0^{-s} = \frac{1}{n} \lg \frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{10}$$

и, таким образом, плотность нашей совокупности равна $\frac{1}{n}$.

B) Рассмотрим теперь $\frac{f_\lambda}{q_1}$-ую степень подстановки S_λ

$$S_1 = S_\lambda^{\frac{f_\lambda}{q_1}},$$

где q_1 — какой-нибудь простой делитель f_λ. Образуем величину ξ_1, принадлежащую к группе $(S_1)^i$ (символ $(S_1)^i$ обозначает циклическую группу, состоящую из степеней S_1), и неприводимое уравнение

$$\Phi(\xi_1) = 0, \tag{11}$$

которому она удовлетворяет. Сравнение

$$\Phi(\xi_1) \equiv 0 \pmod p$$

имеет в силу теоремы 4 рациональные корни тогда и только тогда, когда подстановка класса, к которому принадлежит простой модуль p, входит хоть в одну из групп $T_\nu(S_1)^i T_\nu^{-1}$ и их число равно числу таких групп. Это может иметь место в двух случаях: 1) p принадлежит к тождественной подстановке; все $\dfrac{n}{q_1}$ корней рациональны; это простые числа уже рассмотренного нами типа p_0; 2) p принадлежит к одной из первообразных подстановок группы $(S_1)^i$, т. е. к одному из классов нашего отдела $T_\nu(S_1)^i T_\nu^{-1}$. Из теоремы 4 следует, что искомое число равно индексу $(\overline{H}_1, (S_1)^i)$. Но так как

$$(\overline{H}_1, (S_1)^i) = (\overline{H}_1, H_1)(H_1, (S_1)^i),$$

то дело сводится к выражению обоих множителей через n, n_1, q_1 и k_1.

С другой стороны,

$$(H_1, (S_1)^i) = (G, (S_1)^i) \to (G, H_1),$$

а

$$(G, (S_1)^i) = \frac{n}{q_1}.$$

Если мы теперь введем на время обозначение $(G, H_1) = a$, то из разложения

$$G = H_1 + T_2 H_1 + \dots + T_a H_1$$

следует, что для того, чтобы две подстановки из G преобразовали S_1 в одну и ту же подстановку, необходимо и достаточно, чтобы они входили в одну и ту же сопряженную систему. Это показывает, что число различных подстановок типа $T_\nu S_1 T_\nu^{-1}$ равно a, т. е. $a = n$. Поэтому

$$(H_1, (S_1)^i) = \frac{n}{q_i n_1}.$$

Чтобы определить величину $(\overline{H}_1, H_1)$, заметим, что все $\varphi(q_1)$ первообразных степеней подстановки S_1 образуют k_1 классов отдела, а поэтому в каждый из этих классов входит по $\dfrac{\varphi(q_1)}{k_1}$ степеней S_1. Поэтому из разложения

$$\overline{H}_1 = H_1 + T_2 H_1 + \dots$$

следует, что индекс $(\overline{H}_1, H_1)$ равен $\dfrac{\varphi(q_1)}{k_1}$. Сопоставляя все полученные результаты, мы видим, что искомое число рациональных корней сравнения $\Phi(\xi_1) \equiv 0 \pmod p$ равно $\dfrac{n\varphi(q_1)}{q_1 n_1 \cdot k_1}$.

Формула (6) принимает вид

$$\frac{n}{q_1}\sum_{p_0} p_0^{-s} + \frac{n(q_1-1)}{q_1 n_1 k_1}\sum_{p_1} p_1^{-s} + P(s-1) = \lg\frac{1}{s-1} + P(s-1),$$

если мы через p_1 будем обозначать простые числа, принадлежащие к нашему отделу. Пользуясь формулой (10), мы приходим к следующему результату:

$$\sum p_{11}^{-s} + \sum p_{12}^{-s} + \cdots + \sum p_{1k_1}^{-s} = k_1\frac{n_1}{n}\lg\frac{1}{s-1} + P(s-1), \quad (12)$$

где мы совокупность (p_1) разбили на совокупности $(p_{11}), (p_{12}), \ldots, (p_{1k_1})$, принадлежащие к различным классам нашего отдела.

C) Теперь мы в состоянии доказать, что плотность совокупности простых чисел, принадлежащих к отделу подстановки S_λ, равна $\frac{k_\lambda n_\lambda}{n}$, если мы будем наше утверждение считать доказанным для тех степеней S_λ, порядок которых f_δ есть настоящий (echter) делитель $f_\lambda (f_\delta < f_\lambda)$.

Пусть ξ_λ будет величина из $\Omega(x)$, принадлежащая к группе $(S_\lambda)^i$, и пусть

$$\Phi(\xi_\lambda) \equiv 0 \quad (13)$$

будет неприводимое уравнение, которому она удовлетворяет. Степень этого уравнения равна $\dfrac{n}{f_\lambda}$. Чтобы сравнение

$$\Phi(\xi_1) \equiv 0 \pmod p \quad (14)$$

имело рациональные корни, необходимо и достаточно, чтобы p принадлежало к одному из отделов, образованных степенями подстановки S_λ. Рассмотрим простые числа типа p_δ, принадлежащие к отделу S_δ. Порядок S_δ пусть равен f_δ (пока мы не исключаем случая $f_\delta = f_\lambda$). Число рациональных корней сравнения (14) в этом случае равно числу таких подстановок T_ν в разложении

$$G = (S_\lambda)^i + T_2(S_\lambda)^i + \cdots + T_{\frac{n}{f_\lambda}}(S_\lambda)^i, \quad (15)$$

которые преобразуют подстановку S_δ в одну из ее степеней. Но так как группа $(S_\lambda)^i$ ввиду соотношения

$$S_\lambda S_\delta = S_\lambda \cdot S_\lambda^i = S_\lambda^i S_\lambda = S_\delta S_\lambda$$

является делителем H_δ, то искомое число равно индексу

$$(\overline{H}_\delta, (S_\lambda)^i) = (\overline{H}_\delta, H_\delta) \cdot (H_\delta, (S_\lambda)^i).$$

Далее, мы можем, точно так же как в B), доказать, что $(\overline{H}_\delta, H_\delta)$ равно $\frac{\varphi(f_\delta)}{k_\delta}$. Что касается индекса $(H_\delta, (S_\lambda)^i)$, то он равен

$$(H_\delta, (S_\lambda)^i) = (H_\delta, (S_\delta)^i) \to ((S_\lambda)^i, (S_\delta)^i) = (H_\delta, (S_\lambda)^i) \colon \frac{f_\lambda}{f_\delta}.$$

Наконец, прием, примененный нами уже в B), дает для индекса $(H_\delta, (S_\delta)^i)$ значение $\dfrac{n}{f_\delta n_\delta}$, откуда следует, что число рациональных корней сравнения (14) в нашем случае равно

$$\frac{n\varphi(f_\delta)}{f_\lambda n_\delta k_\delta}.$$

Формула (6) для уравнения (13) принимает поэтому следующий вид:

$$\sum_{f_\delta/f_\lambda} \frac{n\varphi(f_\delta)}{f_\lambda n_\delta \cdot k_\delta} \sum_{p_\delta} p_\delta^{-s} = \lg \frac{1}{s-1} + p(s-1). \tag{16}$$

Но для каждого $f_\delta < f_\lambda$ имеет место в силу нашего предположения формула

$$\sum_{p_\delta} p_\delta^{-s} = k_\delta \frac{n_\delta}{n} \lg \frac{1}{s-1} + p(s-1) \qquad (f_\delta < f_\lambda). \tag{17}$$

Подставляя эту формулу для всевозможных p_δ в (16), мы получим

$$\sum_{\substack{f_\delta/f_\lambda \\ f_\delta<f_\lambda}} \frac{n\varphi(f_\delta)}{f_\lambda n_\delta k_\delta} k_\delta \frac{n_\delta}{n} \lg \frac{1}{s-1} + \frac{n\varphi(f_\lambda)}{f_\lambda n_\lambda k_\lambda} \sum_{p_\lambda} p_\lambda^{-s} = \lg \frac{1}{s-1} + p(s-1), \tag{18}$$

что может быть преобразовано так:

$$\sum_{p_\lambda} p_\lambda^{-s} = k_\lambda \frac{n_\lambda}{n} \frac{\left\{ f_\lambda - \sum\limits_{\substack{f_\delta/f_\lambda \\ f_\delta < f_\lambda}} \varphi(f_\delta) \right\}}{\varphi(f_\lambda)} \lg \frac{1}{s-1} + p(s-1), \tag{19}$$

откуда мы в силу известной формулы

$$\sum_{f_\delta/f_\lambda} \varphi(f_\delta) = f_\lambda$$

получаем

$$\sum_{p_\lambda} p_\lambda^{-s} = k_\lambda \frac{n_\lambda}{n} \lg \frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{20}$$

и мы приходим к искомому результату.

Этот результат принадлежит Фробениусу. Однако ему не удалось доказать, что плотность совокупности простых чисел, принадлежащих к каждому из классов отдела, равна $\dfrac{n_\lambda}{n}$. Решение этой задачи и является целью настоящего сочинения.

§2. Области деления круга

Существует целая категория областей, для которых упомянутая задача решается при помощи известных ранее методов. Это области деления круга. Не ставя вопроса во всей общности, я рассмотрю случай, который играет важную роль для дальнейшего.

Пусть l будет простое число типа $ef+1$, где f — заданное число, не подчиненное никаким дальнейшим ограничениям. Рассмотрим уравнение

$$x^l - 1 = 0. \tag{21}$$

Далее, пусть ρ будет один из его первообразных корней. Каждый из e-членных гауссовых периодов

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \rho + \rho_f + \rho_{2f} + \dots + \rho_{(e-1)f}, \\ \eta_1 &= \rho_1 + \rho_{f+1} + \rho_{2f+1} + \dots + \rho_{(e-1)f+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_{f-1} &= \rho_{f-1} + \rho_{2f-1} + \rho_{3f-1} + \dots + \rho_{ef-1}, \end{aligned} \tag{22}$$

где под ρ_k мы будем разуметь ρ^{g^k}, а g — какой-нибудь первообразный корень сравнения $x^{ef} \equiv 1 \pmod{l}$, удовлетворяет неприводимому уравнению f-ой степени

$$\varphi_e(y) = 0. \tag{23}$$

Возьмем теперь какое-нибудь простое число p. Возникает вопрос, с какой из сопряженных величин η сравнима степень η_ν^p по модулю p. Пусть $p \equiv g^\alpha \pmod{l}$. Тогда имеет место следующее сравнение:

$$\begin{gathered}\eta\nu^p = (\rho_\nu + \rho_{f+\nu} + \cdots + \rho_{(e-1)f+\nu})^p \equiv \\ \equiv \rho_\nu^\rho + \rho_{f+\nu}^\rho + \cdots + \rho_{(e-1)f+\nu}^\rho \equiv \rho_\nu^{g^\alpha} + \rho_{f+\nu}^{g^\alpha} + \cdots + \rho_{(e-1)f+\nu}^{g^\alpha} \equiv \\ \equiv \rho_{\nu+\alpha} + \rho_{f+\nu+\alpha} + \cdots + \rho_{(e-1)f+\nu+\alpha} \equiv \eta_{\nu+\alpha} \pmod{p},\end{gathered} \tag{24}$$

где значок $\nu+\alpha$ необходимо привести к его наименьшему вычету по модулю f. Следовательно, корни сравнения

$$\varphi_e(y) \equiv 0 \pmod{p} \tag{25}$$

претерпевают при возвышении их в p-ую степень подстановку $(\nu, \nu+\alpha)$ тогда и только тогда, когда p является членом одной из прогрессий

$$lx + g^\alpha, lx + f^{\alpha+f}, \ldots, lx + g^{\alpha+(e-1)f}.$$

Подстановку $(\nu, \nu+\alpha)$ можно рассматривать как α-ую степень подстановки $S = (\nu, \nu+1) = (0, 1, 2, \ldots, f-1)$. Введем следующее

Определение 8. Совокупность прогрессий

$$lx + g^\alpha, lx + f^{\alpha+f}, \ldots, lx + g^{\alpha+(e-1)f} \tag{26}$$

назовем *комплексом* индекса α. Про все числа, представляемые одною из прогрессий (26), будем говорить, что они *лежат* в комплексе индекса α.

Тогда результат настоящей главы мы можем выразить в виде следующего предложения:

Главная теорема. *Дано неприводимое уравнение* (23), *которому удовлетворяет система гауссовых периодов* (22). *Тогда возможно таким образом приурочить первообразной подстановке U из его группы Галуа первообразный корень сравнения $x^{ef} \equiv 1 \pmod{l}$, чтобы каждое простое число, принадлежащее к подстановке U^α, лежало в комплексе индекса α.*

Следует подчеркнуть, что теорема Дирихле (loc. cit.) позволяет нам, таким образом, определить плотность совокупности простых чисел, принадлежащих к каждой заданной подстановке.

§3. О распределении норм и простых чисел по различным комплексам

В настоящей главе я намерен доказать теорему, являющуюся в известном смысле обобщением теоремы Дирихле.

Рассмотрим неприводимое уравнение

$$f(x) = 0, \tag{27}$$

которое мы здесь не будем предполагать непременно нормальным. Введем еще в рассмотрение произвольное нечетное число $L = l_1^{\lambda_1} l_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot l_k^{\lambda_k}$ и систему таких чисел $f_1, f_2, \ldots, f_k$, что каждое f_i является делителем

$$\varphi(l_i^{\lambda_i}) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k).$$

Обозначив первообразный корень сравнения

$$x^{\varphi(l_i^{\lambda_i})} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ l_i^{\lambda_i}) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k) \tag{28}$$

через g_i, мы можем представить все взаимно простые с l_i классы по модулю $l_i^{\lambda_i}$ в виде системы

$$1, g_i, g_i^2, \ldots, g_i^{\varphi(l_i^{\lambda_i})-1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k).$$

Распределим эти классы по комплексам (*частичным*), называя каждую систему классов

$$g_i^{\alpha_i}, g_i^{\alpha_i+f_i}, \ldots, g_i^{\alpha_i+f_i\left(\frac{\varphi(l_i^{\lambda_i})}{f_i}-1\right)} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

частичным комплексом индекса α_i. Индекс α_i будем считать приведенным по модулю f_i.

Классы сравнений по модулю L могут быть распределены следующим образом по *полным комплексам*:

О п р е д е л е н и е 9. Дан взаимно простой с L класс A сравнений по модулю L. Если $A \equiv a_i \pmod{l_i^{\lambda_i}}$, а a_i лежит в комплексе индекса α_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то будем говорить, что A лежит в *полном комплексе* индекса $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Если мы будем умножать числа из комплекса индекса $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ на числа из комплекса индекса $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, то будем получать числа, лежащие в комплексе индекса $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_k+\beta_k)$. Стало быть, комплексы образуют абелеву группу порядка $f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$. В ней роль единицы играет *нулевой комплекс* (0,0,…, 0).

Вернемся опять к области $\Omega(x)$, образованной при помощи одного из корней уравнения (27). Пусть

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

будут элементы его фундаментального базиса. Тогда каждое целое число из $\Omega(x)$ может быть представлено так:

$$\mu = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n, \tag{29}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ суть целые рациональные числа, которые называют *координатами* числа μ.

Если возможно подобрать координаты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ для числа μ таким образом, чтобы норма $N(\mu)$ лежала в комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, то назовем этот *комплекс допустимым* (*в узком смысле*), говоря в то же время про число μ, что оно *лежит* в комплексе индекса $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Для допустимых комплексов можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 6. *Все допустимые комплексы образуют группу, которая является делителем группы всех комплексов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $N(\mu) \equiv a$ и $N(\nu) \equiv b \pmod{L}$, то имеет место также сравнение $N(\mu\nu) \equiv ab \pmod{L}$. Если теперь a лежит в комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, а b — в комплексе $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, то ab лежит в комплексе $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_k+\beta_k)$. Далее, нулевой комплекс допустим, так как сравнение

$$N(\mu) \equiv 1 \pmod{L}$$

имеет очевидное решение $\mu = 1$.

Возьмем теперь определенный допустимый комплекс и рассмотрим совокупность всех чисел μ, лежащих в этом комплексе. Назовем эту совокупность совокупностью *решений комплекса.*

Чтобы ввести понятие *числа* решений комплекса, необходимо предварительно условиться в некоторых определениях.

О п р е д е л е н и е 10. Два целых числа μ и μ' из $\Omega(x)$ будем называть *равными по модулю* L тогда и только тогда, когда их координаты c_i и c'_i удовлетворяют сравнениям

$$c_i \equiv c'_i \qquad (\mathrm{mod}\ L) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Из определения фундаментального базиса следует, что эти сравнения необходимы и достаточны для сравнения $\mu \equiv \mu'$ (mod L). Это утверждение справедливо и тогда, если мы, вместо фундаментального базиса, положим в основу базис какого-нибудь идеала, взаимно простого с L.

О п р е д е л е н и е 11. Если для координат c_i числа μ удовлетворяются неравенства

$$0 \leq c_i < L \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

то число μ мы будем называть *приведенным* по модулю L. Для каждого целого числа μ из $\Omega(x)$ можно подобрать равное ему по модулю L приведенное число μ', и притом только одно.

Очевидно, что каждый допустимый комплекс имеет лишь конечное число приведенных решений. Чтобы определить их число для каждого допустимого комплекса, докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 7. *Каждый допустимый комплекс имеет одно и то же число приведенных решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть нам задан допустимый комплекс $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ и пусть μ будет одно из его решений. Если числа

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_v \tag{31}$$

обозначают полную систему решений нулевого комплекса, то числа

$$\mu\eta_1, \mu\eta_2, \ldots, \mu\eta_v \tag{32}$$

после их приведения по модулю L представят полную систему решений комплекса $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. В самом деле: 1) все числа (32) лежат в комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$; 2) все они различны по модулю L; 3) каждое число, лежащее в комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, должно быть сравнимо по модулю L с одним из чисел (32).

1) Следует из правила умножения комплексов.

2) Если бы имело место, например, $\mu\eta_i \equiv \mu\eta_j$ (mod L), то умножая сравнение на целое алгебраическое число $\frac{N(\mu)}{(\mu)}$ и затем деля на взаимно простое с L целое рациональное число $N(\mu)$, мы получим $\eta_i \equiv \eta_j$ (mod L), что стоит в противоречии с определением системы (31).

3) Пусть μ' будет число, лежащее в комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Тогда число $\mu'\frac{N(\mu)}{(\mu)}[N(\mu)]^{\varphi L-1}$ лежит в нулевом комплексе, так как его норма равна

$$N\mu'[N(\mu)]^{n-1}[N(\mu)]^{n\varphi L-n} \equiv N\mu'[N(\mu)]^{-1}(\mathrm{mod}\ L).$$

Поэтому это число должно быть сравнимо с одним из чисел системы (31). Пусть

$$\mu'\frac{N(\mu)}{\mu}[N(\mu)]^{\varphi L-1} \equiv \eta_i\ (\mathrm{mod}\ L).$$

Умножая это сравнение на μ, мы придем к сравнению

$$\mu' \equiv \mu\eta_i\ (\mathrm{mod}\ L),$$

что оправдывает утверждение 3). Таким образом, число решений каждого допустимого комплекса равно v, т. е. оно одинаково для всех комплексов, и т. д.

Это число легко определить. В самом деле, обозначим через F число всех допустимых комплексов. Все приведенные решение всех допустимых комплексов равномерно распределяются по отдельным допустимым комплексам. Но число всех приведенных решений всех допустимых комплексов равно числу взаимно простых с L классов по модулю L внутри $\Omega(x)$, т. е. равно

$$\overline{\varphi}(L) = N(L)\left(1 - \frac{1}{N(l_1)}\right)\left(1 - \frac{1}{N(l_2)}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{N(l_p)}\right), \quad (33)$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_p$ представляют собой совокупность всех простых идеальных делителей числа L внутри $\Omega(x)$. Таким образом, число решений каждого допустимого комплекса равно

$$v = \frac{\overline{\varphi}(L)}{F}. \quad (34)$$

То же число решений мы получим, если вместо фундаментального базиса положим в основу базис какого-нибудь идеала, взаимно простого с L.

Вспомним теперь, что все целые и делящиеся на идеал m, взаимно простой с L, числа из $\Omega(x)$ могут быть представлены в форме

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n, \quad (35)$$

где $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ — базис идеала $\mathfrak{m}$, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ пробегают все целые рациональные значения. С другой стороны, все целые и делящиеся на $\mathfrak{m}$ числа из $\Omega(x)$, которые, кроме того, лежат в допустимом комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, могут быть представлены в форме одного из следующих выражений:

$$\omega_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)} + L(c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n) \tag{36}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, v)$$

где $\omega_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, v)$ обозначает систему приведенных решений комплекса $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, в то время как остальные обозначения имеют то же значение, что и для (35).

Рассмотрим теперь бесконечный ряд

$$\sum_a{}' \frac{1}{n(a)^s},$$

где сумма распространяется на все делящиеся на $\mathfrak{m}$ и взаимно простые с L главные идеалы. Этот ряд вблизи $s = 1$ может быть представлен так:

$$\sum_a{}' \frac{1}{N(a)^s} = \frac{\overline{\varphi}(L)}{L^n} \frac{g}{N(m)} \frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{37}$$

где g имеет следующее независимое от s значение

$$g = \frac{2^\nu \pi^{n-\nu} R}{w\sqrt{\pm\Delta}}. \tag{38}$$

В этом выражении ν обозначает сумму числа вещественных корней и числа пар сопряженных комплексных корней уравнения (27), R — регулятор области $\Omega(x)$, w — число корней из единицы внутри $\Omega(x)$, Δ — дискриминант области $\Omega(x)$; $P(s-1)$, как обычно, обозначает функцию, остающуюся вблизи $s = 1$ конечной.

Проследим путь получения этой формулы, сообразуясь с обозначениями, принятыми у Вебера [13]. В ней коэффициент при $\dfrac{}{s-1}$ равен $\dfrac{1}{w}$-ой предела выражения $\dfrac{T}{t}$, при $t = \infty$, где T означает число систем целых значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$, подчиненных неравенствам

$$|N(c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n)| \leq t, \tag{39}$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le \xi_1(c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_n\omega_n) < 1, \\ 0 \le \xi_2(c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_n\omega_n) < 1, \\ \dotfill \\ 0 \le \xi_{\nu-1}(c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_n\omega_n) < 1, \end{array}\right\} \tag{40}$$

где функции $\xi(\mu)$ суть так называемые показатели числа

$$\mu = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_n\omega_n$$

и определяются при помощи системы следующих ν уравнений:

$$\begin{gathered} \xi_1 l_{11} + \xi_2 l_{21} + \dots + \xi_{\nu-1} l_{\nu-1,1} + \frac{\delta_1}{n} \lg |N(\mu)| = \lambda_1(\mu), \\ \xi_1 l_{12} + \xi_2 l_{22} + \dots + \xi_{\nu-1} l_{\nu-1,2} + \frac{\delta_2}{n} \lg |N(\mu)| = \lambda_2(\mu), \\ \dotfill \\ \xi_1 l_{1,\nu} + \xi_2 l_{2,\nu} + \dots + \xi_{\nu-1} l_{\nu-1,\nu} + \frac{\delta_\nu}{n} \lg |N(\mu)| = \lambda_\nu(\mu), \end{gathered} \tag{41}$$

из которых только $\nu - 1$ независимы. В них δ_i обозначает единицу, если $\Omega(x_i)$, т. е. i-ая сопряженная с $\Omega(x)$ область, вещественна, и 2, если она комплексна. Символы $\lambda_i(\mu)$ выражают величины $\delta_i \lg |\mu_i|$, где μ_i — i-ая сопряженная с μ величина. Наконец, $l_{1i}, l_{2i}, \dots, l_{\nu-1,i}$ — система логарифмов от основных единиц области $\Omega(x_i)$.

Из формул (41) легко заключить, что функции $\xi(\mu)$ — однородны и нулевого измерения относительно $c_1, c_2, \dots, c_n$, функция же $N(\mu)$ — однородна и n-го измерения. Поэтому, если в неравенствах (39) и (40) мы сделаем подстановку

$$c_1 = \frac{z_1}{\tau},\ c_2 = \frac{z_2}{\tau}, \dots,\ c_n = \frac{z_n}{\tau},\ t = \tau^{-n}, \tag{42}$$

то они примут вид

$$|N(z_1\omega_1 + z_2\omega_2 + \dots + z_n\omega_n)| \le 1, \tag{43}$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le \xi_1(z_1\omega_1 + z_2\omega_2 + \dots + z_n\omega_n) < 1, \\ 0 \le \xi_2(z_1\omega_1 + z_2\omega_2 + \dots + z_n\omega_n) < 1, \\ \dotfill \\ 0 \le \xi_{\nu-1}(z_1\omega_1 + z_2\omega_2 + \dots + z_n\omega_n) < 1, \end{array}\right\} \tag{44}$$

и нахождение $\lim\limits_{t=\infty} \dfrac{T}{t}$ приведется к нахождению интеграла

$$\iint \cdots \int dz_1 \cdot dz_2 \cdots dz_n,$$

распространенного на n-мерное пространство, ограниченное неравенствами (43) и (44), который, как известно, равен

$$\frac{2^\nu \pi^{n-\nu} R}{N(\mathfrak{m})\sqrt{\pm\Delta}}.$$

Обратимся теперь к ряду

$$\sum_a^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \tag{45}$$

в котором сумма распространена на все главные идеалы, делящиеся на $\mathfrak{m}$ и, кроме того, лежащие в допустимом комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Числа, соответствующие этим главным идеалам, и только эти числа, могут быть представлены при помощи v формул (36). Разобьем сумму (45) на v частичных сумм, относя каждый идеал $\mathfrak{a}$ к той из формул (36), при помощи которой выражается соответствующее ему приведенное число (приведенное в смысле — см. [13], §193, стр. 708). Конечно, будем все время иметь в виду, что ассоциированные числа лежат в одном и том же комплексе. Поэтому коэффициент при $\frac{1}{s-1}$ в выражении каждой (i-ой) частичной суммы равен

$$\frac{1}{w} \lim_{t=\infty} \frac{T_i}{t}, \tag{46}$$

где T_i — число систем $c_1, c_2, \ldots, c_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$|N(\omega_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} + Lc_1\omega_1 + Lc_2\omega_2 + \cdots + Lc_n\omega_n)| \le t, \tag{47}$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le \xi_1(\omega_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} + Lc_1\omega_1 + Lc_2\omega_2 + \cdots + Lc_n\omega_n) < 1, \\ 0 \le \xi_2(\omega_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} + Lc_1\omega_1 + Lc_2\omega_2 + \cdots + Lc_n\omega_n) < 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \le \xi_{\nu-1}(\omega_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} + Lc_1\omega_1 + Lc_2\omega_2 + \cdots + Lc_n\omega_n) < 1. \end{array}\right\} \tag{48}$$

Вводя подстановку

$$c_1 = \frac{z_1}{\tau},\ c_2 = \frac{z_2}{\tau}, \ldots,\ c_n = \frac{z_n}{\tau},\ t = L^{n_\tau - n}, \tag{49}$$

мы преобразуем неравенства (47) и (48) так:

$$\left| N\left(\frac{\omega_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}}{L}\tau + z_1\omega_1 + z_2\omega_2 + \cdots + z_n\omega_n\right)\right| \leq 1, \tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq \xi_1(\frac{\omega_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}}{L}\tau + z_1\omega_1 + z_2\omega_2 + \cdots + z_n\omega_n) < 1,\\ 0 \leq \xi_2(\frac{\omega_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}}{L}\tau + z_1\omega_1 + z_2\omega_2 + \cdots + z_n\omega_n) < 1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0 \leq \xi_{\nu-1}(\frac{\omega_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}}{L}\tau + z_1\omega_1 + z_2\omega_2 + \cdots + z_n\omega_n) < 1. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Как мы видим, неравенства (50) и (51) отличаются от неравенств (43) и (44) только членами

$$\frac{\omega_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}}{L}\tau,$$

которые при $t = \infty$, т. е. при $\tau = 0$, обращаются в нуль. Теорема 30 в цитированной статье Гильберта ([11], стр. 53) доказывает, что эти члены не влияют ни на величину интеграла

$$\iint\cdots\int dz_1 dz_2 \cdots dz_n,$$

ни на оценку остаточного члена. С другой стороны, нетрудно убедиться [см. подстановку (49)], что величина (46) равна

$$\frac{1}{wL^n}\iint\cdots\int dz_1 dz_2 \cdots dz_n,$$

где интеграл имеет прежнее значение. Поэтому каждая из частичных сумм имеет вблизи $s = 1$ выражение

$$\frac{1}{wL^n}\frac{2^\nu \pi^{n-\nu} R}{N(\mathfrak{m})\sqrt{\pm\Delta}}\frac{1}{s-1} + P(s-1).$$

Чтобы получить выражение для всей суммы (45), мы должны сложить v подобных сумм. Вспоминая, что

$$v = \frac{\overline{\varphi}(L)}{F},$$

мы получим

$$\sum_{a}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \frac{1}{N(a)^s} = \frac{\overline{\varphi}(L)}{F} \frac{2^\nu \pi^{n-\nu} R}{L^n w N(\mathfrak{m})\sqrt{\pm\Delta}} \frac{1}{s-1} + P(s-1). \quad (52)$$

Как мы видим, коэффициент при $\dfrac{1}{s-1}$ в каждой из этих сумм в F раз меньше, чем в сумме (37).

Выберем теперь в каждом из идеальных классов области $\Omega(x)$ по одному идеалу $\mathfrak{m}$, взаимно простому с L. Если $\mathfrak{m}$ для какого-нибудь класса лежит в допустимом комплексе, то все взаимно простые с L идеалы этого класса должны лежать в допустимых комплексах; если же существуют классы, идеалы которых лежат в недопустимых комплексах, то обозначим через $\overline{K}$ группу тех классов, идеалы которых будут лежать в допустимых комплексах; группу же всех классов будем обозначать через K. Пусть порядки этих групп будут соответственно $\overline{h}$ и h.

Введем теперь новое определение.

О п р е д е л е н и е 12. Комплекс, в котором лежит какой-нибудь идеал области $\Omega(x)$, будем называть *допустимым в широком смысле.*

Рассуждения, подобные примененным нами при доказательстве теоремы 6, убеждают нас в том, что все допустимые в широком смысле комплексы образуют абелеву группу, для которой группа допустимых в узком смысле комплексов является делителем. Обозначим первую группу через $\overline{A}$, вторую — через A. Тогда имеет место

Т е о р е м а 8. *Гёльдеровские дополнительные группы* $\left(\frac{K}{\overline{K}}\right)$ *и* $\left(\frac{\overline{A}}{A}\right)$ *однозначно (holoëdrisch) изоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим группу на сопряженные системы по подгруппе $\overline{K}$:

$$K = \overline{K} + k_2\overline{K} + k_3\overline{K} + \cdots + k_{\mathfrak{y}}\overline{K}. \quad (53)$$

Так как классы $k_2, k_3, \ldots, k_{\mathfrak{y}}$ не входят в $\overline{K}$, то идеалы каждого из них лежат в комплексах, не входящих в A. Пусть $a_2, a_3, \ldots, a_{\mathfrak{y}}$ будут комплексы, в которых лежат какие-нибудь идеалы соответственно из $k_2, k_3, \ldots, k_{\mathfrak{y}}$. Рассмотрим систему

$$A, a_2A, a_3A, \ldots, a_{\mathfrak{y}}A. \tag{54}$$

Каждая из систем a_iA исчерпывает все комплексы, в которых лежат какие бы то ни было взаимно простые с L идеалы из k_i. Действительно пусть идеал $\mathfrak{m}_i$ из k_i лежит в a_i. В каком комплексе лежит какой-нибудь другой идеал $\mathfrak{n}_i$ из k_i? В силу известной теоремы (см., например, [13], стр. 593, Satz 3) можно найти такой взаимно простой с L идеал $\mathfrak{r}$, чтобы идеал $\mathfrak{m}_i\mathfrak{r}$ был главным. Тогда и идеал $\mathfrak{n}_i\mathfrak{r}$ будет главным. Пусть $\mathfrak{m}_i\mathfrak{r} \sim \mu$ лежит в комплексе b, а $\mathfrak{n}_i\mathfrak{r} \sim \nu$ — в комплексе c. Оба комплекса согласно определению должны входить в A. Но $\mathfrak{n}_i \sim \mathfrak{m}_i\frac{\nu}{\mu}$, а потому $\mathfrak{n}_i$ лежит в комплексе a_icb^{-1}, который входит в систему a_iA.

Каждая из систем a_iA исчерпывает все комплексы, в которых лежат какие бы то ни было взаимно простые с L идеалы из $k_i\overline{K}$. Действительно, пусть идеал $\mathfrak{n}_i$ лежит в классе $k_i\overline{k}$, где $\overline{k}$ — какой-нибудь класс из $\overline{K}$. Выберем в классе $\overline{k}^{-1}$ идеал $\mathfrak{r}$, лежащий в комплексе b, входящем в A. Идеалы $\mathfrak{m}_i$ и $\mathfrak{n}_i\mathfrak{r}$ лежат в классе k_i т. е. эквивалентны. Предыдущее рассуждение позволяет нам заключить, что идеал $\mathfrak{n}_i\mathfrak{r}$ лежит в комплексе c, входящем в систему a_iA. Значит, идеал $\mathfrak{n}_i$ лежит в комплексе cb^{-1}, который тоже входит в систему a_iA.

С другой стороны, ни одна из систем (54) не можем иметь с какой-нибудь другой общих элементов. В самом деле, если бы, например, a_iA и a_jA имели общие элементы, то комплекс $a_ia_j^{-1}$, а с ним и система $a_iA\,(a_jA)^{-1}$ входили бы в A, а потому все идеалы из классов системы $k_i\overline{K}(k_j\overline{K})^{-1}$ должны были бы лежать в комплексах из A, т. е. входить в классы группы $\overline{K}$, что противоречит разложению (53).

Таким образом, мы доказали что: 1) системы (54) образуют группу $\overline{A}$, 2) системы (53) и (54) однозначно изоморфны. Это доказывает, что группы

$$\frac{K}{\overline{\overline{K}}} \text{ и } \frac{\overline{A}}{A}$$

однозначно изоморфны.

С л е д с т в и е. Порядок группы $\overline{A}$ равен $\overline{F} = F\eta$. Возьмем теперь какой-нибудь допустимый в широком смысле комплекс $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_k)$. Идеалы, лежащие в нем, входят в $\overline{h}$ идеальных классов, образующих одну из систем (53). Выберем в каждом из этих классов по одному взаимно простому с L идеалу $\mathfrak{m}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \overline{h})$, и пусть каждый идеал $\mathfrak{m}_i$ лежит в комплексе $(\beta_{1i}, \beta_{2i}, \ldots, \beta_{ki})$. Тогда комплексы $(-\alpha_1 - \beta_{1i}, -\alpha_2 - \beta_{2i}, \ldots, -\alpha_k - \beta_{ki})$ $(i = 1, 2, \ldots, \overline{h})$, а с ними и комплексы $(\alpha_1 + \beta_{1i}, \alpha_2 + \beta_{2i}, \ldots, \alpha_k + \beta_{ki})$ будут лежать в A. Поэтому мы можем применить к ним формулу (52), выбирая в роли базиса $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ базис идеала $\mathfrak{m}_i$. Таким образом, мы получим

$$\sum_{\mathfrak{m}_i\mathfrak{a}}^{(\alpha_1+\beta_{1i},\ldots,\alpha_k+\beta_{ki})} \frac{1}{N(\mathfrak{m}_i)^s \cdot N(\mathfrak{a})^s} = \frac{1}{F}\frac{\overline{\varphi}(L)}{L^n}\frac{2^\nu \pi^{n-\nu} R}{w\sqrt{\pm\Delta}}\frac{1}{s-1} + P(s-1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \overline{h}), \tag{55}$$

где $\mathfrak{a}$ пробегает все идеалы, входящие в противоположный с $\mathfrak{m}_i$ класс и лежащие в комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Умножим формулу (55) на

$$N(\mathfrak{m}_i)^s = N(\mathfrak{m}_i) + (s-1)P(s-1)$$

и просуммируем по i. Получим

$$\sum_{\mathfrak{a}}^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \frac{\overline{h}}{F}\frac{\overline{\varphi}(L)}{L^n}\frac{2^\nu \pi^{n-\nu} R}{w\sqrt{\pm\Delta}}\frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{56}$$

где теперь $\mathfrak{a}$ пробегает идеалы всех классов, противоположных с классами всех $\mathfrak{m}_i$. Но это будут вообще все классы, в которые только могут входить идеалы, лежащие в комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Преобразуем формулу (56), положив в ней

$$\frac{\overline{h}}{F} = \frac{\overline{h}\mathfrak{y}}{F\mathfrak{y}} = \frac{h}{\overline{\overline{F}}}.$$

Сравнивая полученную формулу с известной формулой

$$\sum_a{}' \frac{1}{N(a)^s} = h\frac{\overline{\varphi}(L)}{L^n}\frac{2^\nu \pi^{n-\nu} R}{w\sqrt{\pm\Delta}}\frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{57}$$

где $\mathfrak{a}$ пробегает все взаимно простые с L идеалы, мы получим

$$\sum_{a}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \frac{1}{N(a)^s} = \frac{1}{F}\sum_{a}{}' \frac{1}{N(a)^s} + P(s-1). \tag{58}$$

Эта формула справедлива для всех допустимых в широком смысле комплексов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Для группы $\overline{A}$ возможно найти $\overline{F}$ различных систем *характеров*. Выберем одну из таких систем и введем для каждого характера этой системы обозначение $\chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Между характерами будет иметь место соотношение

$$\chi(\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_k+\beta_k) = \chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\chi(\beta_1, \ldots, \beta_k). \tag{59}$$

Далее, каждому взаимно простому с L идеалу $\mathfrak{a}$ можно тоже приурочить характер, беря характер комплекса, в котором лежит идеал $\mathfrak{a}$. Для этих характеров введем обозначение $\chi(\mathfrak{a})$. Для них будет иметь место формула

$$\chi(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}), \tag{60}$$

а потому также

$$\frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}\frac{\chi(\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{b})^s} = \frac{\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^s}. \tag{61}$$

Умножим теперь каждую из формул (58) на $\chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ и сложим их. Если мы выбрали систему *главных* характеров, то придем опять к формуле (57). Если же выбранная система характеров не главная, то в силу известной формулы

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)} \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0 \tag{62}$$

мы придем к формуле

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}{N(\mathfrak{a})^s} = P(s-1),$$

или пользуясь вторым обозначением характеров:

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = P(s-1). \tag{63}$$

Эту формулу можно в силу соотношения (60) преобразовать так:

$$\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}} = P(s-1), \tag{64}$$

где произведение распространяется на все простые идеалы $\mathfrak{p}$ области $\Omega(x)$, отличные от множителей L (ср., например, [13], стр. 725). Прологарифмируем формулу (64) и возьмем от логарифма вещественную часть (для обозначения вещественных частей от выражений введем символ $\mathfrak{R}[...]$). При этом могут встретиться два случая: 1) левая часть (64) имеет при $s = 1$ предел, отличный от нуля. Тогда вещественная часть ее логарифма будет тоже типа $P(s-1)$; 2) левая часть (64) стремится при $s = 1$ к нулю. Тогда вещественная часть ее логарифма беспредельно растет по абсолютной величине, оставаясь все время отрицательной. Этот результат запишем следующим образом:

$$\mathfrak{R}\left[\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})^2}{N(\mathfrak{p})^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})^3}{N(\mathfrak{p})^{3s}} + \cdots\right] \leq P(s-1).$$

Нетрудно показать [14], что сумма всех сумм, за исключением первой, при $s = 1$ стремится к конечной величине. Кроме того, сумма тех членов в первой сумме, которые соответствуют идеалам порядков ≥ 2, тоже остается при $s = 1$ конечной, так как для таких идеалов $N(\mathfrak{p}) \geq p^2$, а число идеалов, имеющих одну и ту же норму, не превышает числа n. Перенося все упомянутые члены внутрь символа $P(s-1)$, мы получим

$$\mathfrak{R}\left[\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\nu_p \chi(\mathfrak{p})}{p^s}\right] \leq P(s-1), \tag{65}$$

где ν_p означает число идеалов 1-го порядка с нормой p, а $\chi(p)$ пишем вместо $\chi(\mathfrak{p})$.

Теперь вернемся к обозначению $\chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ и соединим идеалы с одними и теми же характерами. Тогда формула (65) преобразуется так:

$$\Re\Big[\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)} \chi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k) \sum_{p_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}} \frac{\nu_p}{p^s_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}}\Big] \leq P(s-1). \tag{66}$$

Подобным же образом может быть преобразована и формула (57)

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)} \sum_{p_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}} \frac{\nu_p}{p^s_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}} = \lg\frac{1}{s-1} + P(s-1). \tag{67}$$

Складывая формулу (67) со всеми формулами (66), полученными для $\overline{F}-1$ возможных систем не главных характеров, мы в силу того, что сумма

$$\sum_{\chi} \chi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k),$$

распространенная на все характеры одного и того же комплекса, равна $\overline{F}$, если $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ — нулевой комплекс, и равна нулю для всех других комплексов, получим

$$\overline{F}\sum_{p_{(0,\ldots,0)}} \frac{\nu_p}{p^s_{(0,\ldots,0)}} = \lg\frac{1}{s-1} + P(s-1). \tag{68}$$

В формуле (68) можно, идя другим путем, констатировать *знак равенства.* Но так как доказательство для общего случая довольно громоздко, мы проделаем его только для тех случаев, которые представятся нам необходимыми для дальнейшего.

Этим мы будем заниматься в следующем параграфе. Здесь же отметим, что если в формуле (68) имеет место знак равенства, то он будет иметь место и во всех формулах (66). Действительно, если бы хоть в одной из них имел место знак $<$, то после сложения всех формул (66) и (67) формула (68) получилась бы тоже со знаком $<$.

В случае знака равенства легко получить

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)} \frac{\nu_p}{p^s_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}} = \frac{1}{F}\lg\frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{69}$$

где сумма распространяется на все простые числа, лежащие в допустимом в широком смысле комплексе $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ (см., например, [3], стр. 357), и мы приходим к следующей

Г л а в н о й т е о р е м е. Если в формуле (68) имеет место *знак равенства*, то совокупность простых чисел первого порядка *равномерно* распределяется по всем допустимым в широком смысле комплексам.

§4. О плотностях совокупностей простых чисел, принадлежащих к отдельным классам подстановок

Даны неприводимое нормальное уравнение n-ой степени

$$f(x) = 0 \tag{70}$$

и подстановка f-го порядка

$$S=(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1f})(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2f}) \ldots (x_{e1}, x_{e2}, \ldots, x_{ef})(ef=n), \tag{71}$$

входящая в его группу G. Выберем k простых чисел $l_1, l_2, \ldots, l_k$ вида $f_x + 1$, взаимно простых с дискриминантом D уравнения (70) (k — произвольное число, которое мы в дальнейшем будем безгранично увеличивать), и образуем при помощи корней уравнений

$$x^{l_1} = 0,\ x^{l_2} = 0,\ \ldots,\ x^{l_k} - 1 = 0 \tag{72}$$

k циклических уравнений, каждое степени f (например, при помощи гауссовых периодов). Дискриминанты этих уравнений суть степени простых чисел $l_1, l_2, \ldots, l_k$, а потому области, образованные при помощи их корней, взаимно просты между собой и с $\Omega(x)$ (т. е. не имеют, кроме рациональных чисел, общих элементов). Выберем затем из каждого из наших уравнений по одному корню η_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, k$) и по подстановке U_ν, *производящей* группу каждого из наших уравнений. Далее, рассмотрим область $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$. Ее группа однозначно (holoëdrisch) изоморфна с произведением $G \cdot (U_1)^{i_1} \cdot (U_2)^{i_2} \cdots (U_k)^{i_k}$. Не вводя для подстановок области $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ новых обозначений, мы будем для них пользоваться символами $S \cdot U_1^{\alpha_1} \cdot U_2^{\alpha_2} \cdots U_k^{\alpha_k}$, где подстановка S пробегает группу G, а каждое α_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, k$) принимает значения $0, 1, 2, \ldots, f - 1$. Область $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ тоже нормальна, и ее порядок равен $n \cdot f^k$.

Рассмотрим теперь совокупность простых чисел, принадлежащих к отделу подстановки S в $\Omega(x)$. Исследуем, как распределяются простые числа этой совокупности по комплексам, образованным областью $\Omega(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$. Число этих комплексов равно

f^k, и каждый комплекс $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ соответствует подстановке $U_1^{\alpha_1} \cdot U_2^{\alpha_2} \cdots U_k^{\alpha_k}$ в том смысле, что простое число принадлежит к этой подстановке тогда и только тогда, когда оно лежит в комплексе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ (см. §2 настоящего сочинения, главная теорема).

В основу предстоящего исследования положим следующую классификацию комплексов.

О п р е д е л е н и е 1 3. 1) Те комплексы $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, в которых общий наибольший делитель чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, f равен единице (другими словами, подстановка $U_1^{\alpha_1} \cdot U_2^{\alpha_2} \cdots U_k^{\alpha_k}$ f-го порядка), назовем *первообразными*.

2) Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, f имеют общий наибольший делитель d (подстановка $U_1^{\alpha_1} \cdot U_2^{\alpha_2} \cdots U_k^{\alpha_k}$ порядка $\frac{f}{d}$), причем $1 < d < f$. В этом случае будем называть комплексы $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ *особенными*.

3) *Нулевой* комплекс $(0, 0, \ldots, 0)$.

Чтобы определить число различных первообразных комплексов, заметим, что: 1) число комплексов *порядка* d равно d^k, 2) каждый особенный комплекс $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ порядка f можно, деля его индексы на d, преобразовать в первообразный комплекс *порядка* $\delta = \frac{f}{d}$. В силу всего этого имеет место формула

$$\sum_{\delta | f} \psi(\delta) = f^k, \tag{73}$$

где мы через $\psi(f)$ обозначаем искомое число комплексов, а сумма в левой части распространяется на все делители δ числа f. Так как эта формула справедлива для всех значений f, то, пользуясь обычным дедекиндовским приемом обращения, мы получим для $\psi(f)$ следующее выражение:

$$\psi(f) = \sum_{d|f} \mu(d) \left(\frac{f}{d}\right)^k = f^k \left(1 - \frac{1}{q_1^k}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2^k}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_a^k}\right), \tag{74}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_a$ обозначают систему всех простых делителей числа f.

Если мы возьмем k настолько большим, чтобы k-ая степень наименьшего из всех простых чисел $q_1, q_2, \ldots, q_a$ (назовем его Q) была больше, чем каждый из биномиальных коэффициентов

$C_a^1, C_a^2, \ldots, C_a^{a-1}$, то легко убедиться в справедливости следующего неравенства:

$$\psi(f) > f^k \left(1 - \frac{a}{Q^k}\right). \tag{75}$$

Это неравенство играет в дальнейшем весьма важную роль.

Убедимся в равномерности распределения совокупности простых чисел, принадлежащих к отделу подстановки S, по комплексам. Для этого изберем индуктивный путь. Именно, сначала убедимся в этом для совокупности простых чисел, принадлежащих к тождественной подстановке в $\Omega(x)$. Их общая плотность равна $\frac{1}{n}$. Введем следующее

О п р е д е л е н и е 1 4. Систему комплексов

$$(r\alpha_1, r\alpha_2, \ldots, r\alpha_k),$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ — какой-нибудь первообразный комплекс, а r пробегает значения $0, 1, 2, \ldots, f-1$, назовем *лучом* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Если же r пробегает только взаимно простые с f значения из ряда $0, 1, 2, \ldots, f-1$, то полученную систему комплексов будем называть *первообразной частью* луча $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Если число (или идеал) лежит в одном из комплексов луча $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, то будем говорить, что оно *лежит в луче* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Из этого определения вытекают следующие очевидные теоремы.

Т е о р е м а 9. *Первообразный комплекс не может входить более чем в один луч.*

Т е о р е м а 1 0. *Число всех первообразных частей лучей равно*

$$\frac{\psi(f)}{\varphi(f)} = f^{k-1} \prod_{i=1}^{a} \frac{\left(1 - \frac{1}{q_i^k}\right)}{\left(1 - \frac{1}{q_i}\right)}. \tag{76}$$

Т е о р е м а 1 1. *Чтобы простое число p одновременно принадлежало к тождественной подстановке в $\Omega(x)$ и лежало в первообразной части луча $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, необходимо и достаточно, чтобы оно в области $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ принадлежало к отделу подстановки $1 \cdot U_1^{\alpha_1} \cdot U_2^{\alpha_2} \cdots U_k^{\alpha_k}$.*

Существование же подобных простых чисел непосредственно следует из результата Фробениуса. С другой стороны, мы можем рассматривать эти простые числа как нормы идеалов в $\Omega(x)$, а поэтому по крайней мере один из комплексов, лежащих в первообразной части луча $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, допустим в широком смысле. Стало быть, все эти комплексы допустимы, так как все комплексы луча можно рассматривать как степени какого-нибудь одного первообразного. Поэтому здесь роль $\overline{F}$ играет f^k.

Чтобы констатировать для нашего случая знак равенства в формуле (68), заметим, что плотность совокупности простых чисел, принадлежащих к тождественной подстановке в $\Omega(x)$ и лежащих во всех f^k комплексах, равна $\frac{1}{n}$. С другой стороны, совокупность простых чисел, принадлежащих к тождественной подстановке в $\Omega(x)$ и одновременно лежащих в нулевом комплексе, имеет плотность

$$\frac{1}{nf^k},$$

так как эти и только эти простые числа принадлежат к тождественной подстановке в $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$, а порядок группы этой области равен

$$nf^k.$$

Обе плотности относятся, как $f^k : 1$, т. е. $\overline{F} : 1$, что доказывает, что в формуле (68) должен быть знак равенства. Таким образом, условия достаточные для равномерности распределения наших простых чисел по комплексам, удовлетворены.

Докажем теперь равномерность распределения по комплексам простых чисел, принадлежащих к отделу подстановки (71) f-го порядка, предполагая, что равномерность доказана для тех ее степеней, порядок которых меньше f. Тогда будет достаточно доказать равномерность распределения простых чисел p, удовлетворяющих тому условию, что неприводимое уравнение

$$F(z) = 0, \tag{77}$$

корень которого принадлежит к циклической группе $(S)^i$, рассматриваемое как сравнение по модулю p, имеет рациональные корни. Чтобы провести это доказательство, нужно сперва убедиться в том, что все комплексы для уравнения (77) допустимы. Это следует уже из того, что они допустимы для меньшей совокупности простых чисел, принадлежащих в $\Omega(x)$ к тождественной подстановке. Далее, мы должны доказать, что в формуле

(68) для нашего случая имеет место знак равенства. Для этого образуем неприводимое уравнение

$$\Phi(\zeta) = 0, \tag{78}$$

корень которого ζ принадлежит к группе $(S)^i$ в $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$. Величину ζ можно рационально выразить через $z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, и каждой сопряженной с z величине будет соответствовать f^k сопряженных с ζ величин, которые мы получим, если в выражении ζ через $z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ будем над величинами $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ производить всевозможные подстановки типа соответственно $U_1^{\alpha_1}, U_2^{\alpha_2}, \ldots, U_k^{\alpha_k}$ $(\alpha_\nu = 0, 1, \ldots, f-1)$. Если поэтому простое число p лежит в нулевом комплексе, то каждому рациональному корню сравнения

$$F(z) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p) \tag{79}$$

должны соответствовать f^k различных корней сравнения

$$\Phi(z) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p). \tag{80}$$

В этом случае величины $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ сравнимы с рациональными числами, а корни сравнения (80) все различны между собой, если только p не входит в дискриминант уравнения (78). С другой стороны, из групповых соображений следует, что z может быть рационально выражено через ζ, а поэтому каждому рациональному корню сравнения (80) соответствует рациональный корень сравнения (79). Если поэтому мы применим формулу (6) к уравнению (77) и к уравнению (78), то значения ν_p для простых чисел, лежащих в нулевом комплексе, во втором случае в f^k раз больше, чем в первом, а для других простых чисел все ν_p во втором случае равны нулю. Это доказывает, что в нашем случае в формуле (68) имеет место знак равенства. Таким образом, все условия для равномерности распределения рассматриваемых простых чисел выполнены, и мы заключаем отсюда, что плотность совокупности простых чисел, принадлежащих в $\Omega(x)$ к отделу подстановки S_λ f_λ-го порядка и одновременно лежащих в одном из комплексов, равна

$$\frac{1}{f_\lambda^k} k_\lambda \frac{n_\lambda}{n},$$

а плотность совокупности простых чисел, принадлежащих в $\Omega(x)$ к этому же отделу и лежащих во всех первообразных комплексах, равна

$$\frac{\psi(f_\lambda)}{f_\lambda^k} k_\lambda \frac{n_\lambda}{n}.$$

Теперь исследуем распределение простых чисел нашего отдела по различным его классам. Для этого образуем неприводимое уравнение

$$\Phi(\xi_\lambda) = 0, \tag{81}$$

корень которого ξ_λ принадлежит к циклической группе $(S \cdot U_1^{\alpha_1} \cdot U_2^{\alpha_2} \cdots U_k^{\alpha_k})^i$в $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$, где $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ — какой-нибудь первообразный комплекс. Тогда мы сможем доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1 2. *Из трех утверждений:*

1°. *Простое число p принадлежит в $\Omega(x)$ к классу подстановки S_λ.*

2°. *Простое число лежит в одном из комплексов*

$$(r'_\mu \alpha_1, r'_\mu \alpha_2, \ldots, r'_\mu \alpha_k) \qquad \left(\mu = 1, 2, \ldots, t = \frac{\phi(f_\lambda)}{k_\lambda}\right).$$

Здесь числа $r'_1, r_2,', \ldots, r'_t$ суть корни соответственно сравнений

$$r_\mu \cdot x \equiv 1 \pmod{f_\lambda} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, t), \tag{82}$$

а числа $r_1, r_2, \ldots, r_t$ взяты таким образом, чтобы подстановки

$$S_\lambda^{r_1}, S_\lambda^{r_2}, \ldots, S_\lambda^{r_t}$$

принадлежали к классу подстановки S_λ (все r_μ взаимно просты с f_λ, так как порядок подстановки $S_\lambda^{r_\mu}$ должен быть равен f_λ).

3°. *Сравнение*

$$\Phi(\xi_\lambda) \equiv 0 \qquad \pmod{p} \tag{83}$$

имеет рациональные корни — каждое является следствием двух остальных.

A) 3° выводится из 1° и 2° следующим образом. Корня уравнения (81) рационально выражаются через $x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$. Пусть

$$\xi_\lambda = \varphi(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k).$$

Возвысим это выражение в p-ую степень и станем рассматривать результат по модулю $\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — один из простых идеальных делителей p в $\Omega(x)$.Тогда мы увидим, что x в нем претерпевает подстановку S_λ, в то время как $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ в силу 2° — соответственно подстановки

$$U_1^{r'_\mu \alpha_1}, U_2^{r'_\mu \alpha_2}, \ldots, U_k^{r'_\mu \alpha_k}$$

(последние можно рассматривать по модулю p, так как $\Omega(\eta_i)$ суть области деления круга). Рассмотрим теперь тот корень уравнения (81), который принадлежит к группе $(S_\lambda^{r_\mu} U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots U_k^{\alpha_k})^i$. Из теоремы Шёнемана следует, что этот корень сравним с собственной p-ой степенью по модулю $\mathfrak{p}$ и, значит, подавно по модулю некоторого простого идеала в $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$, а поэтому в силу обобщенной теоремы Ферма (см. [13], стр. 618) этот корень сравним по этому модулю с рациональным числом, которое должно быть корнем сравнения (83).

B) Предположим теперь, что удовлетворено условие 3°. Пусть p в $\Omega(x)$ принадлежит к классу какой-нибудь подстановки $\overline{S}$, а в $\Omega(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ — к подстановке $U_1^{\beta_1} \cdot U_2^{\beta_2} \cdots U_k^{\beta_k}$ (другими словами, лежит в комплексе $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$). Тогда, как мы убедились, в $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ оно принадлежит к классу подстановки $\overline{S} \times U_1^{\beta_1} \cdot U_2^{\beta_2} \cdots U_k^{\beta_k}$. Но Фробениус доказал ([1], стр. 701), что для существования рационального корня сравнения (83) необходимо и достаточно, чтобы хоть одна из подстановок

$$T\overline{S}T^{-1} \cdot U_1^{\beta_1} \cdot U_2^{\beta_2} \cdots U_k^{\beta_k}$$

входила в группу, к которой принадлежит ξ_λ, т. е. в

$$(S_\lambda \cdot U_1^{\alpha_1} \cdot U_2^{\alpha_2} \ldots U_k^{\alpha_k})^i.$$

Пусть, таким образом,

$$T\overline{S}T^{-1} \cdot U_1^{\beta_1} \cdot U_2^{\beta_2} \cdots U_k^{\beta_k} = S_\lambda^R \cdot U_1^{R\alpha_1} \cdot U_2^{R\alpha_2} \ldots U_k^{R\alpha_k},$$

где R — одно их чисел ряда $0, 1, 2, \ldots, f_\lambda - 1$. Но так как S_λ и $\overline{S}$ входят только величины x, а в U_ν — только η_ν и все величины $x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ рационально независимы, то должно иметь место

$$T\overline{S}T^{-1} = S_\lambda^R,\ U_1^{\beta_1} = U_1^{R\alpha_1},\ U_2^{\beta_2} = U_2^{R\alpha_2},\ \ldots,\ U_k^{\beta_k} = U_k^{R\alpha_k}. \quad (84)$$

Из этого следует, что лежит в луче $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

C) Если мы еще предположим, что выполнено условие 1°, т. е. что $\overline{S} = S_\lambda$, то тогда в группе G должна находиться такая подстановка T, что $TS_\lambda T^{-1} = S_\lambda^R$. Это показывает, что R является одним из чисел ряда $r_1, r_2, \ldots, r_t$. Но ряд $r_1, r_2, \ldots, r_t$ может отличаться от ряда $r'_1, r'_2, \ldots, r'_t$ только порядком своих членов. В самом деле, возводя соотношение

$$T_i S_\lambda T_i^{-1} = S_\lambda^{r_i}$$

в r'_i-ую степень, мы получим

$$T_i S_\lambda^{r'_i} T_i^{-1} = S_\lambda,$$

или

$$T_i^{-1} S_\lambda T_i = S_\lambda^{r'_i},$$

что показывает, что r'_i находится в ряду $r_1, r_2, \ldots, r_t$. Таким образом, утверждение 2° выполнено.

D) Из 3° и 2°, следует 1°. Действительно, утверждение 2° характеризует следующие сравнения:

$$\beta_i \equiv r_\mu \alpha_i \pmod{f_\lambda} \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

которые вместе с сравнениями

$$\beta_i \equiv R\alpha_i \pmod{f_\lambda} \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \quad (\text{см. В}))$$

дают

$$(R - r_\mu)\alpha_i \equiv 0 \pmod{f_\lambda} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Образуем при помощи этих сравнений следующее:

$$(R - r_\mu)(X_1\alpha_1 + X_2\alpha_2 + \cdots + X_k\alpha_k) \equiv 0 \pmod{f_\lambda}.$$

Подберем $X_1, X_2, \ldots, X_k$ так, чтобы $X_1\alpha_1 + X_2\alpha_2 + \cdots + X_k\alpha_k$ было взаимно просто с f_λ, что возможно в силу первообразности комплекса $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Тогда необходимо, чтобы имело место

$$R \equiv r_\mu \pmod{f_\lambda},$$

откуда $\overline{S} = T^{-1} S_\lambda^{r_\mu} T$, т. е. $\overline{S}$ принадлежит к классу подстановки S_λ. Итак, теорема доказана во всех своих частях.

Теперь докажем равномерность распределения по допустимым комплексам таких простых чисел p, что сравнение (83) имеет рациональные корни. Из предыдущего (см. В)) доказательства теоремы (12) ясно, что для этого уравнения могут быть допустимы только f_λ комплексов луча $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. С другой стороны, они действительно допустимы, так как группа этих комплексов циклическая, а совокупность первообразных комплексов из луча $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ соответствует отделу $S_\lambda \cdot U_1^{\alpha_1} \cdot U_2^{\alpha_2} \ldots U_k^{\alpha_k}$ в

$\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$. Далее, в формуле (68) имеет место знак равенства. В самом деле, если p лежит в нулевом комплексе, то левая часть сравнения (83) распадается на линейные множители, а потому $\nu_p = n \cdot f_\lambda^{k-1}$ (ведь уравнение (81) nf_λ^{k-1}-ой степени). С другой стороны, эти и только эти простые числа принадлежат к тождественной подстановке в $\Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$, а поэтому плотность их совокупности равна

$$\frac{1}{nf_\lambda^k}.$$

Таким образом, обе плотности стоят в отношении $f_\lambda : 1$. Но это число играет здесь роль $\overline{F}$. Таким образом, равномерность распределения наших простых чисел по комплексам может считаться доказанной.

Рассмотрим теперь те из наших простых чисел, которые лежат в первообразной части луча $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Если какое-нибудь из них принадлежит к классу S_λ в $\Omega(x)$, то в силу D) оно лежит в одном из комплексов

$$(r_\mu \alpha_i) \ \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, t = \frac{\varphi(f_\lambda)}{k_\lambda} \\ i = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

(для краткости мы, вместо $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, вводим обозначение (α_i)). Нетрудно видеть, что ряд $r_1, r_2, \ldots, r_t$ образует группу относительно умножения. Действительно, пусть, например,

$$S_\lambda^{r_i} = T_i S_\lambda T_i^{-1}, \qquad S_\lambda^{r_j} = T_j S_\lambda T_j^{-1};$$

тогда

$$S_\lambda^{r_i r_j} = (S_\lambda^{r_i})^{r_j} = (T_i S_\lambda T_i^{-1})^{r_j} = T_i S_\lambda^{r_j} T_i^{-1} = T_i T_j S_\lambda T_j^{-1} T_i^{-1} =$$

$$= (T_i T_j) S_\lambda (T_j T_i)^{-1}.$$

Эта группа является делителем группы всех взаимно простых с f_λ классов по модулю f_λ. Обозначив обе группы соответственно через $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{R}$, мы сможем разбить $\mathfrak{R}$ на сопряженные системы по $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + R_2\mathfrak{r} + R_3\mathfrak{r} + \cdots + R_{k_\lambda}\mathfrak{r}. \tag{85}$$

Таким образом, классы подстановок $S_\lambda, S_\lambda^{R_{2\lambda}}, \ldots, S_\lambda^{R_{k_\lambda}}$ исчерпывают весь отдел S_λ. Приурочим к этим классам значки соответственно $1, 2, 3, \ldots, k_\lambda$. Вообще около каждого простого числа будем ставить два значка: первый будет обозначать класс, к которому оно принадлежит, второй — комплекс, в котором оно лежит. Для простых чисел типов

$$p_{\nu,\alpha_i},\; p_{\nu,r_2\alpha_i},\; \ldots,\; p_{\nu,r_i\alpha_i}$$

введем общий символ $p_{\nu,\mathfrak{r}\alpha_i}$.

Каждое простое число, принадлежащее к отделу

$$S_\lambda \cdot U_1^{\alpha_1} \cdot U_2^{\alpha_2} \ldots U_k^{\alpha_k} \text{ в } \Omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k),$$

должно принадлежать к одному из следующих типов:

$$p_{1,r\alpha_i}, p_{2,R_2 r\alpha_i}, \ldots, p_{k_\lambda, R_{k_\lambda} r\alpha_i}.$$

Равномерность распределения этих простых чисел по комплексам может быть выражена следующей формулой:

$$\sum_p p_{1,\mathfrak{r}\alpha_i}^{-s} = \sum_p p_{2,R_2\mathfrak{r}\alpha_i}^{-s} + P(s-1) = \cdots = \sum_p p_{k_\lambda,R_{k_\lambda}\mathfrak{r}\alpha_i}^{-s} + P(s-1) =$$

$$= \frac{1}{k_\lambda} \sum_{\mu=1}^{k_\lambda} \sum_p p_{\mu,R_\mu\mathfrak{r}\alpha_i}^{-s} + P(s-1). \tag{86}$$

Возьмем в этой формуле в роли (α_i) каждый из комплексов (α_i), $(R_2\alpha_i), \ldots, (R_{k_\lambda}\alpha_i)$ и сложим все полученные формулы. При этом заметим, что: 1) все сопряженные системы (85) после их умножения на R_μ могут только изменить порядок своего расположения, 2) при этом ни одна из систем не может остаться не измененной. Поэтому сумма, получаемая в правой части новой формулы, распространяется на все такие простые числа, которые принадлежат к отделу S_λ в $\Omega(x)$ и вместе с тем лежат в $k_\lambda t = \varphi(f_\lambda)$ комплексах $(R_\mu\mathfrak{r}\alpha_i)$, образующих первообразную часть луча (α_i). Но так как простые числа, принадлежащие к отделу S_λ в $\Omega(x)$, равномерно распределены по всем f_λ^k комплексам, то общая плотность рассматриваемой совокупности простых чисел равна

$$\frac{\varphi(f_\lambda)}{f_\lambda^k} k_\lambda \frac{n_\lambda}{n},$$

и мы, таким образом, приходим к формуле

$$\sum_{\mu=1}^{k_\lambda}\sum_p p_{1,R_\mu\alpha_i}^{-s} = \frac{\varphi(f_\lambda)}{f_\lambda^k}\frac{n_\lambda}{n}\lg\frac{1}{s-1} + P(s-1), \tag{87}$$

где вся сумма в левой части распространяется на все простые числа, принадлежащие к классу S_λ в $\Omega(x)$ и одновременно лежащие в первообразной части луча (α_i).

Образуем теперь формулы, подобные (87), для всех $\dfrac{\psi(f_\lambda)}{\varphi(f_\lambda)}$ первообразных частей лучей (см. теорему 10) и сложим их. Этим мы еще можем не исчерпать всех простых чисел, принадлежащих к классу S_λ в $\Omega(x)$, так как еще могут существовать принадлежащие к классу S_λ в $\Omega(x)$ простые числа, лежащие вместе с тем в нулевом или в особенных комплексах. Таким образом, выражение в левой части получаемого уравнения

$$\leq \sum_p p_1^{-s} + P(s-1),$$

откуда вытекает неравенство

$$\sum_p p_1^{-s} \geq \frac{\psi(f_\lambda)}{f_\lambda^k}\frac{n_\lambda}{n}\lg\frac{1}{s-1} + P(s-1). \tag{88}$$

Возьмем k настолько большим, чтобы удовлетворялось неравенство (75). Тогда, вместо (88), мы можем написать

$$\sum p_1^{-s} > \left(1 - \frac{a}{Q^k}\right)\frac{n_\lambda}{n}\lg\frac{1}{s-1} + P(s-1). \tag{89}$$

Эта формула дает нам возможность получить искомый результат. Сперва докажем, что

$$\liminf_{s=1}\frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg\frac{1}{s-1}} \geq \frac{n_\lambda}{n}. \tag{90}$$

В самом деле, если бы имело место

$$\liminf_{s=1}\frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg\frac{1}{s-1}} = \frac{n_\lambda}{n} - \alpha,$$

где $\alpha > 0$, то, взяв

$$k > \frac{\lg n_\lambda - \lg n + \lg a - \lg \alpha}{\lg Q},$$

мы имели бы

$$\frac{n_\lambda}{n} - \alpha < \frac{n_\lambda}{n}\left(1 - \frac{a}{Q^k}\right). \tag{91}$$

С другой стороны, делая неравенство (88) на $\lg\frac{1}{s-1}$ и беря от обеих частей $\liminf\limits_{s=1}$, мы получим

$$\frac{n_\lambda}{n} - \alpha \geq \left(1 - \frac{a}{Q^k}\right)\frac{n_\lambda}{n}. \tag{92}$$

Несовместимость (91) и (92) доказывает справедливость неравенства (90).

Неравенства, подобные (90), имеют место для каждого из классов нашего отдела. Чтобы *оценить* величину

$$\limsup_{s=1} \frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg\frac{1}{s-1}},$$

перепишем формулу (20) таким образом: (93)

$$\frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg\frac{1}{s-1}} = k_\lambda\frac{n_\lambda}{n} - \left\{\frac{\sum\limits_p p_2^{-s}}{\lg\frac{1}{s-1}} + \frac{\sum\limits_p p_3^{-s}}{\lg\frac{1}{s-1}} + \dots + \frac{\sum\limits_p p_{k_\lambda}^{-s}}{\lg\frac{1}{s-1}}\right\} + \frac{P(s-1)}{\lg\dfrac{1}{s-1}}.$$

Взяв от обеих частей $\limsup\limits_{s=1}$, мы в силу очевидного неравенства

$$\liminf(\alpha + \beta + \dots) \geq \liminf\alpha + \liminf\beta + \dots$$

и неравенства (90), примененного ко $2, 3, \dots, k_\lambda$-му классу нашего отдела, получим

$$\limsup_{s=1} \frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg\frac{1}{s-1}} \leq k_\lambda\frac{n_\lambda}{n} - \overbrace{\left(\frac{n_\lambda}{n} + \frac{n_\lambda}{n} + \dots + \frac{n_\lambda}{n}\right)}^{k_\lambda - 1 \text{ раз}} = \frac{n_\lambda}{n}. \tag{94}$$

Сопоставим неравенства (90) и (94):

$$\frac{n_\lambda}{n} \leq \liminf_{s=1} \frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg \frac{1}{s-1}} \leq \limsup_{s=1} \frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg \frac{1}{s-1}} \leq \frac{n_\lambda}{n}. \tag{95}$$

Эти соотношения могут быть справедливы только тогда, когда в них везде будет иметь место знак равенства. Стало быть

$$\liminf_{s=1} \frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg \frac{1}{s-1}} = \limsup_{s=1} \frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg \frac{1}{s-1}} = \lim_{s=1} \frac{\sum\limits_p p_1^{-s}}{\lg \frac{1}{s-1}} = \frac{n_\lambda}{n}, \tag{96}$$

и искомая плотность найдена.

§5. Критерий родственности областей

В этой главе я исследую связь между *степенью родства* нескольких алгебраических областей и разложением определяющих их уравнений, рассматриваемых как сравнения по простым модулям. До сих пор были разобраны два следующих частных случая этой задачи.

1) Если одна область является делителем другой, то принадлежность простого числа к известному классу подстановок во второй области влечет за собой принадлежность его к вполне определенному классу в первой. В частности, если простое число принадлежит во второй области к тождественной подстановке, то в первой оно тоже принадлежит к тождественной подстановке. Имеет место также обратная теорема, пользуясь которой, Б.Н. Делоне [9] доказал частный случай известной теоремы Кронекера–Вебера о том, что всякая абелева область есть область деления круга.

2) Две области взаимно просты. Тогда, взяв по произволу из обеих областей по классу подстановок, можно найти бесчисленное множество простых чисел, принадлежащих к классам этих подстановок в соответственных областях. Этот случай рассмотрен М. Бауэром (loc. cit.).

Рассмотрим самый общий случай. Возьмем две произвольные области ω_1 и ω_2 и составим их нормы, т. е. наименьшие заключающие их нормальные области: Ω_1 и Ω_2. Образуем их наименьшую общую область Ω, которая тоже будет нормальна, и пусть ее группа будет G, а группы, которым принадлежат области, — соответственно G_1 и G_2. Известно, что G_1 и G_2 являются нормальными делителями G. Их гёльдеровские дополнения

$$H_1 = \frac{G}{G_1} \text{ и } H_2 = \frac{G}{G_2}$$

изоморфны с группами Галуа внутри областей соответственно Ω_1 и Ω_2. Обозначим пересечение областей Ω_1 и Ω_2 через $\overline{\Omega}$. Группа K, к которой оно принадлежит внутри Ω, является наименьшей группой, содержащей группы G_1 и G_2, и потому в силу нормальности последних может быть выражена как их символическое произведение

$$K = G_1 G_2.$$

Внутри каждой из областей Ω_1 и Ω_2 оно принадлежит соответственно к группам

$$K_1 = \frac{K}{G_1} \text{ и } K_2 = \frac{K}{G_2}.$$

Индексы $(G, K), (H_1, K_1), (H_2, K_2)$ будут, очевидно, равны одному и тому же числу j.

Разложим теперь группу G на сопряженные системы по K, группу H_1 — по K_1 группу H_2 — по K_2,

$$G = K + KU_1 + KU_2 + \cdots + KU_{j-1}, \tag{97}$$

$$H_1 = K_1 + K_1V_1 + K_1V_2 + \cdots + K_1V_{j-1}, \tag{98}$$

$$H_2 = K_2 + K_2W_1 + K_2W_2 + \cdots + K_2W_{j-1}. \tag{99}$$

Подстановки V_i и W_i выберем так, чтобы они соответствовали системам соответственно G_1U_i и G_2U_i (вспомним определение гёльдеровского дополнения).

Ясно, что если простое число p принадлежит в Ω к классу подстановки, входящей в систему KU_i, то в Ω_1 и Ω_2 оно будет принадлежать к классам подстановок, входящих в системы соответственно K_1V_i и K_2W_i. Докажем, что если две подстановки T_1 и T_2 внутри Ω_1 и Ω_2 будут входить в системы соответственно K_1V_i и K_2W_i, то можно найти соответствующую им подстановку внутри Ω, входящую в систему KU_i. Достаточно доказать это для систем K_1, K_2, K. Чтобы найти подстановку из K, соответствующую подстановкам T_1 из K_1 и T_2 из K_2, достаточно найти подстановку, соответствующую T_1 из K_1 и 1 из K_2, а затем найти подстановку, соответствующую 1 из K_1 и T_2 из K_2. Найдем первое. Для этого достаточно показать, что внутри Ω существует подстановка, оставляющая величины из Ω_2 на месте (т. е. входящая в G_2) и производящая над величинами из Ω_1 любую подстановку группы $K_1 = \frac{K}{G_1}$. Допустим противное, т. е. что подстановки из G_2 производят над величинами из Ω_1 не всевозможные подстановки группы K_1, а только некоторые, которые должны образовать группу $\overline{K}_1$, являющуюся делителем группы K_1.

Рассмотрим величины, принадлежащие внутри Ω к группе $\overline{K}_1$. С одной стороны, они входят в Ω_1, с другой стороны, не изменяясь в Ω от подстановок группы G_2, они входят в Ω_2; значит, они входят в их пересечение $\overline{\Omega}$. Это же невозможно в том случае, если группа $\overline{K}_1$ является *настоящим* делителем группы K_1. Все это позволяет считать нашу теорему доказанной.

Если Ω_2 целиком входит в Ω_1, то $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = \overline{\Omega}$,$K = G_2, K_2 = 1$. Здесь для каждой подстановки в G_1 мы в силу разложений (97), (98), (99) получим вполне определенную подстановку в G_2. В частности, если мы в G_1 выбрали тождественную подстановку, то в G_2 соответствующая подстановка должна быть тоже тождественной.

Если Ω_2 не входит в Ω_1, то G_2 является *настоящим* делителем K, K_2 содержит не тождественные элементы, а потому существуют простые числа, принадлежащие в Ω_1 к тождественной подстановке, а в Ω_2 — к подстановке, отличной от тождественной. Эта теорема противоположная предыдущей; следовательно, справедлива и обратная.

Наконец, если Ω_1 и Ω_2 взаимно просты, т. е. если $\overline{\Omega}$ есть область рациональных чисел, то $K = G, K_1 = G_1, K_2 = G_2$ $(j = 1)$. В этом случае в обеих областях можно выбрать подстановки совершенно независимо.

Если мы имеем дело с бо́льшим количеством областей, то исследование придется вести следующим образом: сначала надо исследовать, подобно предыдущему, какие-нибудь две из заданных областей; затем взять их общую область вместе с третьей; затем область, заключающую все три области, вместе с четвертой и т. д. В этом случае более симметричного закона подыскать нельзя. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть области $\Omega(\sqrt{2}), \Omega(\sqrt{3}), \Omega(\sqrt{6})$. Любые две из этих областей взаимно просты, и потому подстановки в них независимы; когда же мы выбрали в обеих областях по подстановке, то этим мы вполне определили подстановку в третьей области, так как третья область входит делителем в наименьшую область, заключающую в себе обе остальные области.

Для разрешения в каждом отдельном случае вопроса, существуют ли простые числа, одновременно принадлежащие к заданным классам подстановок в нескольких различных областях, достаточно выяснить, существует ли в группе области, образованной из этих областей, подстановка, которая внутри каждой из заданных областей производит соответствующую заданную подстановку. Вспомним, что каждому простому числу соответствует класс подстановок, а каждому простому идеалу — одна определенная подстановка (ср. [1], конец). Этот принцип более общий, так как здесь не играет никакой роли нормальность областей.

§6. Теорема Гильберта о существовании простых идеалов с заданной вычетностью

Принцип, высказанный в конце предыдущей главы, позволяет доказать, притом в несколько расширенной формулировке, теорему Гильберта о существовании бесчисленного множества простых идеалов с заданной вычетностью (см. [6], стр. 426, Satz 152).

Дана нормальная область Ω, содержащая в себе l-ые корни из единицы. Пусть α будет целое алгебраическое число из Ω, а $\mathfrak{p}$ — простой идеал, не входящий в α. На основании обобщенной теоремы Ферма

$$\alpha^{p^f-1} \equiv 1 \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{p}), \tag{100}$$

где f — *порядок* идеала $\mathfrak{p}$. Но так как Ω содержит в себе l-ый корень из единицы $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$, то внутри области $\omega(\zeta)$ порядок простого идеального делителя p является делителем f, а потому должно иметь место сравнение

$$p^f \equiv 1 \qquad (\operatorname{mod} l),$$

т. е. $p^f - 1$ должно делиться на l.

Из формулы (100) нетрудно получить

$$\alpha^{\frac{pf-1}{l}} \equiv \zeta^c \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}), \tag{101}$$

где c — одно из чисел $0, 1, 2, \ldots, l-1$. Условимся в этом случае в обозначении $\zeta^c = \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}$ (см. [6], стр. 365). Теорема, которую я собираюсь доказать, заключается в следующем.

Даны t целых чисел из Ω

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t,$$

притом так, что произведение

$$\alpha_1^{m_1} \cdot \alpha_2^{m_2} \cdots \alpha_t^{m_t}$$

может только тогда быть l-ой степенью числа из Ω, если каждое из чисел $m_1, m_2, \ldots, m_t$ делится на l. Зададим по произволу t l-ых корней из единицы: $\zeta^{c_1}, \zeta^{c_2}, \ldots, \zeta^{c_t}$. Тогда в Ω существует бесчисленное множество таких простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых одновременно имеют место равенства

$$\left\{\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right\} = \zeta^{c_1}, \left\{\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right\} = \zeta^{c_2}, \ldots, \left\{\frac{\alpha_t}{\mathfrak{p}}\right\} = \zeta^{c_t}. \tag{102}$$

Ограничимся рассмотрением простых идеалов первого порядка, т. е. таких, для которых $f = 1$; иначе говоря, эти идеалы будут в Ω принадлежать к тождественной подстановке.

Присоединим к Ω величины

$$\beta_1 = \sqrt[l]{\alpha_1}, \beta_2 = \sqrt[l]{\alpha_2}, \ldots, \beta_t = \sqrt[l]{\alpha_t}.$$

Считая Ω областью рациональности, мы получим абелеву область, группа которой состоит из подстановок, переводящих величины β_i в $\zeta_i\beta_i$, где ζ_i — какой-нибудь корень из единицы. Докажем, что порядок этой области по отношению к Ω равен l^t . Допустим противное, т. е. что порядок ее ниже. Тогда, если мы станем присоединять к Ω последовательно корни уравнений

$$z^l - \alpha_1 = 0,\ z^l - \alpha_2 = 0, \ldots, z^l - \alpha_t = 0, \tag{103}$$

то какое-нибудь из этих уравнений должно будет сделаться приводимым в области, образованной из области Ω посредством присоединения к ней корней предыдущих уравнений. Но в силу нормальности каждого из этих уравнений внутри Ω уравнение должно распасться на множители одной и той же степени, которая благодаря тому, что l — простое число, должна быть первой. Пусть первое из таких уравнений будет $z^l - \alpha_\nu = 0$. Тогда мы получим

$$\beta_\nu = \varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}). \tag{104}$$

С другой стороны, область $\Omega(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1})$ должна быть порядка $l^{\nu-1}$ относительно Ω. Обозначим через S_i операцию над $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}$, заключающуюся в умножении β_i на ζ и оставляющую величины $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{\nu-1}$ без перемены. Группа Галуа области $\Omega(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1})$ состоит из подстановок типа $S_1^{\xi_1} S_2^{\xi_2} \cdots S_{\nu-1}^{\xi_{\nu-1}}$. Для того чтобы эта группа была порядка $l^{\nu-1}$, необходимо, чтобы показатели $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu-1}$ пробегали независимо друг от друга все значения $0, 1, 2, \ldots, l-1$. В частности, все подстановки S_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$ должны входить в группу области. Таким образом, величина $\varphi(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \zeta\beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{\nu-1})$ будет сопряженной с β_ν, т. е. она должна быть равна $\zeta^c \beta_\nu$, где c — какое-нибудь из чисел $0, 1, 2, \ldots, l-1$. Соотношение (104) можно переписать следующим образом:

$$\beta_\nu = A_0 + A_1 \beta_{\nu-1} + A_2 \beta_{\nu-1}^2 + \cdots + A_{l-1} \beta_{\nu-1}^{l-1},$$

где $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{l-1}$ — элементы области $\Omega(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-2})$. Тогда

$$\zeta^c \beta_\nu = A_0 + A_1 \zeta \beta_{\nu-1} + A_2 \zeta^2 \beta_{\nu-1}^2 + \cdots + A_{l-1} \zeta^{l-1} \beta_{\nu-1}^{l-1}.$$

Далее,

$$\zeta^{2c} \beta_\nu = A_0 + A_1 \zeta^2 \beta_{\nu-1} + A_2 \zeta^4 \beta_{\nu-1}^2 + \cdots + A_{l-1} \zeta^{2(l-1)} \beta_{\nu-1}^{l-1},$$

. . . .

$$\zeta^{(l-1)c} \beta_\nu = A_0 + A_1 \zeta^{l-1} \beta_{\nu-1} + A_2 \zeta^{2(l-1)} \beta_{\nu-1}^2 + \cdots + A_{l-1} \zeta^{(l-1)^2} \beta_{\nu-1}^{l-1}.$$

Из этих равенств легко заключить, что все A, кроме A_c, равны нулю. Продолжая рассуждение подобным же образом применительно к

$$\beta_{\nu-2}, \beta_{\nu-3}, \ldots, \beta_2, \beta_1,$$

мы увидим, что наше соотношение должно иметь вид

$$\beta_\nu = A\beta_1^{c_1} \cdot \beta_2^{c_2} \cdots \beta_{\nu-1}^{c_{\nu-1}},$$

где A — элемент области Ω. Возведем это соотношение в l-ую степень. Получим

$$\alpha_\nu = A^l\alpha_1^{c_1} \cdot \alpha_2^{c_2} \cdots \alpha_{\nu-1}^{c_{\nu-1}}.$$

Возможность такого соотношения исключена при формулировке теоремы. Поэтому область $\Omega(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$ должна быть l-го порядка относительно Ω и ее группа должна состоять из подстановок типа

$$S_1^{\xi_1} \cdot S_2^{\xi_2} \cdots S_t^{\xi_t},$$

где каждая подстановка S_i изменяет β_i в $\zeta\beta_i$ и оставляет величины

$$\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_t$$

без перемены, а показатели $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$ пробегают независимо друг от друга все значения $0, 1, 2, \ldots, l-1$. Эти же подстановки должны входить в группу *нормы* области $\Omega(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$, т. е. наименьшей заключающей ее нормальной области, а потому в силу результата главы IV существует бесчисленное множество простых чисел , принадлежащих к классу подстановки

$$S = S_1^{c_1} \cdot S_2^{c_2} \cdots S_t^{c_t}.$$

Эти простые числа внутри Ω разлагаются на идеальные множители первого порядка, так как подстановка S оставляет величины из Ω без перемены. Внутри же нормы области $\Omega(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$ каждое такое простое число p разобьется на простые идеалы таким образом, что хоть один из них, например π, будет принадлежать к подстановке S. Применяя характеризующее принадлежность к S сравнение к величинам $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$, мы получим ряд сравнений

$$\beta_1^p \equiv \zeta^{c_1}\beta_1, \beta_2^p \equiv \zeta^{c_2}\beta_2, \ldots, \beta_t^p \equiv \zeta^{c_t}\beta_t \qquad (\mathrm{mod}\ \pi). \tag{105}$$

Разделив эти сравнения соответственно на $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$, мы будем иметь

$$\beta_1^{p-1} \equiv \zeta^{c_1}, \beta_2^{p-1} \equiv \zeta^{c_2}, \ldots, \beta_t^{p-1} = \zeta^{c_t} \qquad (\mathrm{mod}\ \pi). \tag{106}$$

Но так как в силу того, что $f = 1$, число $p - 1$ делится на l, мы можем переписать сравнения (106) так:

$$\alpha_1^{\frac{p-1}{l}} \equiv \zeta^{c_1}, \alpha_2^{\frac{p-1}{l}} \equiv \zeta^{c_2}, \ldots, \alpha_t^{\frac{p-1}{l}} \equiv \zeta^{c_t} \pmod{\pi}. \tag{107}$$

В сравнениях (107) фигурируют величины из Ω, а потому эти сравнения будут справедливы и для простого внутри Ω модуля $\mathfrak{p}$, в который π входит множителем.

Далее, из сравнения

$$\alpha^{\frac{p-1}{l}} \equiv \left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\} \pmod{\pi} \tag{108}$$

и сравнений (107) мы получаем

$$\left\{\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right\} \equiv \zeta^{c_1}, \left\{\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right\} \equiv \zeta^{c_2}, \ldots, \left\{\frac{\alpha_t}{\mathfrak{p}}\right\} \equiv \zeta^{c_t} \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{109}$$

Эти сравнения должны быть заменены равенствами, так как различные корни из единицы не могут быть сравнимы по модулю $\mathfrak{p}$, не входящему в дискриминант уравнения $\zeta^{l-1} + \zeta^{l-2} + \cdots + \zeta + 1 = 0$. Значит, идеалы $\mathfrak{p}$ удовлетворяют поставленным требованиям, т. е. теорема доказана.

Литература

[1] Frobenius. Über Beziehungen u. s. w. Sitzungsber. Berl. Akad., 1896, стр. 689.
[2] Dedekind, Zur Theorie der Ideale. Gött. Nachr., 1894.
[3] Dirichlet. Werke, Bd. I, стр. 307, 313, 1837, Vorlesungen über Zahlentheorie.
[4] Kummer. Über die Divisoren u. s. w. Joura. f. Math. 30, 35.
[5] Kronecker. Über Irreducibilitäl von Gleichungen. Monaisber. Berl. Akad., 1880, стр. 156.
[6] D. Hilbert. Zahlbericht, стр. 424–428.
[7] Furtwängler. Allgemeiner Existenzbeweis u. s. w. Math. Ann. 63.
[8] Furtwängler. Allgemeine Reziprozitätsgesetze. Math. Ann. 72, 74.
[9] B. Delaunay. Zur Bestimmung algebraischer Zahlkörper u. s. w. Journ. f. reine und angew. Math. 152, стр. 120.
[10] H. Weber. Über Zahlgruppen u. s. w. Math. Ann. 49.
[11] D. Hilbert. Relativquadratischer Zahlkörper. Math. Ann. 51, Sätze 30, 31, стр. 53 сл.
[12] Landau. Verteilung der Primzahlen in den Idealklassen. Math. Ann. 63, стр. 150.
[13] H. Weber. Lehrbuch d. Alg., Bd. II, XXI Abschnitt, стр. 693–735.
[14] Lejeune–Dirichlet. Vorles. über Zahlenth., 4-te Aufl., стр. 358.

ЧЕБОТАРЕВ И ЕГО ТЕОРЕМА ПЛОТНОСТИ

П. Стивенхаген и Х. В. Ленстра[*,1]

Введение

Слава русского теоретико-числовика Николая Григорьевича Чеботарева [2] (1894–1947) основывается почти исключительно на его доказательстве в 1922 году гипотезы Фробениуса, ныне известной как теорема плотности Чеботарева. С тех пор специалисты по алгебраической теории чисел высоко оценивают эту теорему из-за ее важности и красоты.

В настоящей статье мы познакомим читателя с биографией Чеботарева и его теоремой. Опираясь на русскоязычные источники, мы описываем его жизнь и обстоятельства, при которых он доказал свою теорему плотности. Приводим два характерных примера, иллюстрирующих сущность других его работ. Далее мы объясняем содержание его теоремы, сводя к минимуму специальную терминологию, в которую обычно облекается эта теорема. Мы увидим, что ключевая идея доказательства Чеботарева позволила Артину доказать закон взаимности; однако если бы история сложилась несколько иначе, то Н.Г. Чеботарев доказал бы это первым. Для специалистов мы приводим в приложении к этой статье наше изложение доказательства (самого) Чеботарева его теоремы плотности. Оно не использует теорию полей классов, и ощутимо более элементарно по сравнению с трактовкой, которую можно найти в современных учебниках.

Мы не будем обсуждать важную роль, которую играет теорема плотности Чеботарева в современной арифметической алгебраической геометрии. Заинтересованный читатель может обратиться к [34] и [35].

*Chebotarëv and his Density Theorem. P. Stevenhagen and H.V. Lenstra, Jr. The Mathematical Intelligencer, Vol. 18, No 2 @ 1996 Springer-Verlag New York.

[1]Первый автор благодарит И.Р. Шафаревича и А.Г. Сергеева за предоставленные биографические материалы о Чеботареве. Второй автор был поддержан грантом DMS 92-24205 научного фонда NSF. Часть работы над статьей выполнена вторым автором в качестве профессора Миллеровского института фундаментальных научных исследований. Д.Ю. Бернштейн, И.А. Бухман, Г.Х. Фрей, А. Ге, С. Хиллион, А. Схинзель и В.М. Тихомиров любезно оказали помощь.

[2]Транслитерация кириллических имен в статье следует текущему стандарту Mathematical Reviews.

Жизнь

Николай Григорьевич Чеботарев родился в Каменец-Подольском 15 июня 1894 года; 3 июня по юлианскому календарю, который все еще использовался в России. Его отец, Григорий Николаевич, служил в российской судебной системе в нескольких городах Украины и был главой районного суда, когда революция 1917 года прервала его карьеру. Он лишился статуса и разорился, скончался Григорий Николаевич от холеры в Одессе в 1922 году. У Николая был младший брат – Григорий, врач, который был замечен в рядах Белой армии во время гражданской войны. Он эмигрировал в Югославию и не вернулся в Советский Союз.

Николай получил образование, типичное для людей его сословия, под строгим контролем своей матери. Неслучайно математика, неподконтрольная ей область, стала любимым занятием Николая, когда ему было пятнадцать или шестнадцать лет. В этот период он часто не мог посещать школу, так как страдал от плеврита, а зимой 1910-11 годов мать привезла Николая на Итальянскую Ривьеру для восстановления после пневмонии. В 1912 году он стал студентом физико-математического факультета Киевого университета, тогда известном как Университет Святого Владимира. Он стал учеником Д.А. Граве вместе с Б.Н. Делоне, который позже безуспешно пытался заманить Н.Г. Чеботарева в Ленинград, и О.Ю. Шмидтом, который впоследствии стал известным специалистом по теории групп, а также вице-президентом Академии наук. Д.А. Граве был учеником П.Л. Чебышева и А.Н. Коркина, и на тот момент единственным истинным математиком в Киеве. В эти годы у Николая сформировались математические интересы. Несмотря на трудности, возникшие в результате Первой мировой войны, которые потребовали временного перевода университета в Саратов, он окончил его в 1916 году и получил звание приват-доцента после сдачи магистерского экзамена в 1918 году. Он продолжал жить как студент, зарабатывая деньги на частных уроках и преподавая в старших классах школы. В 1921 году он переехал в Одессу, чтобы помочь своим родителям, которые жили там в ужасных условиях. Вскоре после этого скончался отец Николая. После смерти отца Николая его мать добывала средства к существованию продажей на рынке капусты.

Несмотря на профессиональную и материальную поддержку местных математиков, таких как С.О. Шатуновский и В.Ф. Каган, Николаю было трудно найти себе место в Одессе: математика здесь была сосредоточена в основном на строгом обосновании начал математических дисциплин, а они были чужды его интересам.

Затем наступило лето 1922 года. Чеботарев вспоминает обстоятельства того времени в письме, написанном в 1945 году М.И. Рокотовскому [8], который пытался заинтересовать его своими планами по организации труда ученых:

«В действительности же типов ученых так же много, как пород растений. Вы описываете нежную розу, которая для своего произрастания требует подпорок, удобренной почвы, поливки и т. п. Наша же суровая действительность воспитала скорее чертополохи, дающие грубоватые, но красивые цветы при всяких условиях. Что бы было с нашей наукой, если бы наши ученые могли работать только при условии тишины или «не громкой, но хорошей музыки» в своих кабинетах? Я принадлежу к старшему поколению советских ученых, сформировавшихся в условиях гражданской войны. Свою лучшую работу я обдумывал, нося воду из нижней части города (Пересыпи в Одессе) в верхнюю, или нося ведра с капустой на базар, где моя мать ее продавала и тем прокармливала всю семью.»[1]

Этот «лучший результат» был теоремой плотности Чеботарева. Это была искра с небес, которая обеспечила Н.Г. Чеботареву признание в советской математике и увековечила его имя в алгебраической теории чисел.

Тяжелое финансовое положение семьи Чеботаревых значительно улучшилось в 1923 году, когда Николай женился на учительнице и ассистенте-физиологе Марии Александровне Смирницкой. Работая с бывшей ученицей известного физиолога И.П. Павлова, она получала достойную зарплату. Ее отношения со свекровью, которая напрасно настаивала на религиозном браке, по-видимому, были не слишком дружескими.

В 1924 году Николай наконец нашел работу в Московском институте гражданских инженеров. Здесь он познакомился с казанским математиком Н.Н. Парфентьевым, это была его первая

[1]Мы приводим выдержку из оригинала письма Н.Г. Чеботарева. – Прим. перев.

связь с Казанью. Николай был холодно принят своими московскими коллегами; он узнал, что занимает должность Д.Ф. Егорова, и через семь месяцев уволился. Д.Ф. Егоров, который основал московскую школу чистой математики вместе со своим учеником Н.Н. Лузиным, был уволен по политическим мотивам. В конце концов он будет арестован как «религиозный фанатик» и объявит голодовку. В 1931 году его смертельно больного, доставили в тюремную больницу Казани, где жена Николая работала врачом [36]. По предположениям, он умер в доме Чеботаревых.

Вернувшись в Одессу, Николай получил плохо оплачиваемую и неопределенную должность секретаря научно-исследовательской кафедры при Одесском институте народного образования. Его положение не стало более благополучным и в 1926 году, когда у него родился сын, названный по семейной традиции Григорием. С научной точки зрения, однако, он добился многого. Талантливый семнадцатилетний юноша Марк Крейн, который приехал в Одессу, начал работать под руководством Николая и смог привлечь достаточно студентов для семинара по алгебраическим функциям. Когда Николай в 1927 году покинул Одессу, Крейн продолжил работу семинара и основал школу по функциональному анализу. До этого, в 1925 году, Николаю удалось совершить свою первую научную поездку за границу, на съезд Немецкого математического общества (DMV) в Данциге, где он встретился с Э. Нетер, Гензелем и Хассе, учеником Гензеля. Он отправился в Берлин, где посетил И. Шура, и в Геттинген, где встретился со своим земляком А.М. Островским. Как и Николай, Островский был студентом Граве в Киеве. Граве отправил его за границу, чтобы он смог продолжить образование, поскольку евреи не могли поступать в аспирантуру в царской России. Николай произвел сильное впечатление на Островского, предоставив оригинальное решение одной из его задач. Мы обсудим это чуть позже в данном разделе.

В 1927 году Чеботарев наконец защитил в Украинской Академии наук докторскую диссертацию, основанную на его теореме плотности 1922 года. Ранее Делоне приглашал его защитить докторскую диссертацию в Ленинграде, но это уже было невозможно: присуждение докторской степени было упразднено в России в 1926 году как буржуазный пережиток. Вскоре после получения докторской степени Чеботареву предложили должность как в Ленинграде, где уже имелась сильная группа алгебраистов, так и в провинциальном городе Казани, примерно в 800 километрах к востоку от Москвы, где ему предстояло бы создать собственную школу. В то время Казанский университет мог гордиться собственным журналом, в котором Чеботарев уже опубликовал несколько работ, и богатой библиотекой. Казанский университет имел международную известность, поскольку регулярно вручал престижную премию в области геометрии имени Лобачевского, знаменитого геометра, работавшего в Казани в XIX веке. К сожалению, самостоятельность провинциальных университетов постепенно стала подавляться в сталинскую эпоху, и к 1945 году журнал и премия были упразднены, как и большинство научных контактов с капиталистическими странами. После некоторых колебаний Чеботарев выбрал Казань, где ему суждено было остаться на всю оставшуюся жизнь. Он покинул Одессу в декабре 1927 года. Его жена и сын последовали за ним весной 1928 года. Это событие положило конец трудностям совместного проживания с матерью Николая, которая переехала жить к сестрам в Краснодар. Она умерла в 1939 году.

В Казани Чеботареву удалось создать собственную алгебраическую школу, а его ученики получили должности в нескольких советских университетах. Во время казанского периода жизни его деятельность приобрела общее признание в СССР. В 1929 году он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 1934 году был приглашен выступить на 2-м Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде. В 1943 году он стал заслуженным деятелем науки РСФСР. Он был номинирован на Сталинскую премию в 1943 и 1946 годах, однако получил эту долгожданную премию лишь посмертно, в 1948 году. Он был награжден за работу над тринадцатой проблемой Гильберта о невозможности решения уравнения седьмой степени с помощью непрерывных функций двух аргументов. В 1954 году выяснилось, что один из его результатов по этой проблеме был неверным, контрпример был найден его сыном Григорием, который также стал математиком [22].

Известность Чеботарева не ограничивалась Советским Союзом. В 1932 году он принял почетное приглашение выступить на пленарном заседании Международного конгресса математиков в Цюрихе. Его доклад «Проблемы современной теории Галуа» ([7], Т. 3, с. 5–46) был посвящён столетию со дня смерти Эвариста Галуа.

Николай плодотворно работал на протяжении двадцати лет, проведенных в Казани. Научные работы в его «Собрании сочинений» [7] посвящены широкому кругу проблем – многие по теории чисел и по его «официальной» специальности, теории Галуа, а также по группам Ли, абелевым интегралам, теории распределении корней полиномов и теории приближений. Кроме того, он подготовил курсы лекций по высшей алгебре, вариационному исчислению и топологии. Его учебник «Основы теории Галуа» вышел в двух томах в 1934 и 1937 годах вместе с монографией «Теория Галуа» (1936), в которой были представлены результаты по обратной задаче теории Галуа и теории резольвент. Отредактированный и расширенный немецкий перевод первого тома с включениями из монографии появился в 1950 году после десятилетней задержки, вызванной войной [9]. Интерес Чеботарева к резольвентам привел его к изучению групп Ли. Результатом этой работы стала его монография «Теория групп Ли», первый русский учебник по группам Ли, который увидел свет в 1940 году. За ним последовала посмертно опубликованная монография «Теория алгебраических функций». Кроме того, Чеботарев потратил много сил на редактирование собрания сочинений Золотарёва. Он инициировал издание собрания сочинений Галуа на русском языке в 1936 году, перевод которого осуществил его любимый ученик Н.Н. Мейман. Другие его работы, такие как создание энциклопедии элементарной математики, оставались незавершенными, когда весной 1947 года Чеботарев начал страдать от рака желудка. Операция стала неизбежной. В июне 1947 года он был госпитализирован в Институт Склифосовского в Москве. Он перенес операцию, но умер от осложнений через одиннадцать дней, 2 июля.

Семья Чеботаревых играла важную роль в академической общественной жизни Казани. Новая просторная квартира, которую он получил в 1937 году, стала местом встречи студентов, ученых и других гостей. Николай имел свое рабочее место в доме – что удивительно, это был не письменный стол, а кровать, – и обширную библиотеку репринтов, состоящих в основном из множества статей, которые он рецензировал для Zentralblatt. Во время войны университеты и отдельные учебные заведения Москвы и блокадного Ленинграда были эвакуированы в Казань, и здесь в университете было огромное сосредоточение ученых. С жильем было проблематично. Нередко в доме Чеботаревых ночевало до двадцати гостей.

Несмотря на свою неприязнь к административным обязанностям, в 1943 году Чеботарев сменил Н.Н. Парфентьева на посту декана Казанского физико-математического факультета [1]. В 30-е годы он являлся директором НИИММ, Научно-исследовательского института математики и механики при университете. Эта должность вызывала частые споры между Николаем Чеботаревым и ректором университета. Во всем остальном, как кажется, его легкий и благожелательный характер и чуткая вежливость обычно удерживали его от конфликтов.

Чтобы охарактеризовать стиль Чеботарева как математика, приведем два его результата, которые ему самому особенно нравились. Первым результатом является решение задачи, поставленной ему Островским в Геттингене. Данный результат имеет важные приложения к подсчету числа особых точек на границе сходимости некоторых лакунарных степенных рядов [32]. Сам Чеботарев называет его ([8], с. 5-6) «очень скромным результатом», однако, упоминая о комплиментах «мрачного и угрюмого» Островского по поводу этого результата, отмечает, что он «отвечает требованиям математической эстетики».

З а д а ч а. Пусть p – простое число и $\zeta \in \mathbb{C}$ – примитивный корень степени p из единицы. Показать, что все миноры определителя Вандермонда $|\zeta^{rs}|_{r,s=0}^{p-1}$ отличны от нуля.

Островский безуспешно пытался вывести это из известных свойств определителя и простых оценок на модули комплексных чисел. Новизна же подхода Чеботарева состояла в том, чтобы показать, что указанные миноры, которые, очевидно, являются элементами p-кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta)$, не обнуляются в p-адическом

[1] Авторы ошибочно указывают, что Н.Г. Чеботарев стал деканом физико-математического факультета. – Прим. перев.

пополнении $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ поля $\mathbb{Q}(\zeta)$. Также как каждое p-адическое число имеет p-адическое разложение, так и каждый элемент из поля $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ имеет π-адическое разложение, где $\pi = \zeta - 1$. Таким образом, каждый элемент определителя имеет следующее разложение:

$$\zeta^{rs} = (1+\pi)^{rs} = 1 + \binom{rs}{1}\pi + \binom{rs}{2}\pi^2 + \ldots \quad .$$

Воспользовавшись линейностью определителя по столбцам, минор порядка n можно раскрыть как

$$M = |\zeta^{r_i s_j}|_{i,j=1}^n = \left|\sum_{k\geq 0}\binom{r_i s_j}{k}\pi^k\right|_{i,j=1}^n =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_n}\begin{vmatrix} \binom{r_1 s_1}{k_1} & \cdots & \binom{r_1 s_n}{k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{r_n s_1}{k_1} & \cdots & \binom{r_n s_n}{k_n}\end{vmatrix}\pi^{k_1+\ldots+k_n}.$$

Обозначим возникшие в правой части определители через $D_{k_1,\ldots,k_n}$. Допустим, что для некоторого $d \leq n$ в последовательности $k_1, \ldots, k_n$ найдется хотя бы $d+1$ членов, меньших чем d. Тогда $D_{k_1,\ldots,k_n} = 0$. Действительно, элементы столбца j матрицы, соответствующей $D_{k_1,\ldots,k_n}$, получаются при подстановке r_i в многочлен $\binom{s_j X}{k_j}$ степени k_j, а любые $d+1$ многочленов степени меньшей d линейно зависимы. Таким образом, $D_{k_1,\ldots,k_n}$ всегда равен нулю при $k_1 + k_2 + \ldots + k_n < 0 + 1 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$. В случае же равенства $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n(n-1)/2$ определитель $D_{k_1,\ldots,k_n}$ может быть ненулевым лишь при совпадении множеств $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ и $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Но тогда $D_{k_1,\ldots,k_n}$ есть в точности определитель Вандермонда. Итак, мы получаем оценку $M = C \cdot \pi^{n(n-1)/2} + O(\pi^{1+n(n-1)/2})$, где константа

$$C = \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma)\frac{s_1^{\sigma(0)} s_2^{\sigma(1)} \ldots s_n^{\sigma(n-1)}}{0!\,1!\,2!\ldots(n-1)!}\prod_{1\leq i<j\leq n}(r_j - r_i).$$

Здесь σ пробегает все перестановки множества $\{0, 1, ..., n-1\}$. Мы еще раз узнаем определитель Вандермонда, получая

$$C = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (r_j - r_i) \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (s_j - s_i)}{0!\,1!\,2!\,...\,(n-1)!}.$$

Так как C – целое число, взаимно простое с p, то оно не делится на π, и мы находим, что π-адическое нормирование числа M равно $n(n-1)/2$. Отметим, что эта норма зависит только от *порядка* минора M. В частности, $M \neq 0$, что и завершает доказательство.

Данная задача имеет большое число опубликованных решений: А. Данилевский (1937), Ю. Г. Решетняк (1955) и М. Ньюман (1975) по-своему видоизменили доказательство Чеботарева, в то время как Дьедонне независимо доказал эту теорему в 1970 году (см. [13]).

Вторая задача, которую мы обсуждаем, в высшей степени классической природы. Чеботарев взял ее как подходящий пример для включения в свой учебник по теории Галуа. Как в предыдущей задаче и теореме плотности, Чеботарев с помощью существующих методов смог «копнуть глубже» и обнаружить то, чего не заметили другие. Начнем с наблюдения, восходящего к Гиппократу Хиосскому (примерно 430 год до н.э.). Пусть треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный, как указано на рис. 1. Тогда площадь треугольника ABC равна площади затененной луночки, ограниченного дугой AB описанной окружности и дугой окружности, касающейся катетов AC и BC. Данное открытие позволяло квадрировать некоторые луночки, что было с энтузиазмом встречено в Древней Греции, так как это был многообещающий шаг к решению знаменитой задачи квадратуры круга.

В общем случае, пусть m и n – натуральные числа и $m > n$. Рассмотрим луночку, ограниченную дугами AB окружностей с центрами в M и N, причем углы $\angle AMB$ и $\angle ANB$ относятся как $m : n$. Таким образом, на рис. 2, где $m = 3$, а $n = 2$, имеем $2\mu : 2\nu = 3 : 2$. Проведем m хорд на внешней дуге и n хорд на внутренней дуге, как показано на рис. 2: хорды AC, CD и DB имеют одинаковую длину, так же как и хорды AE и EB.

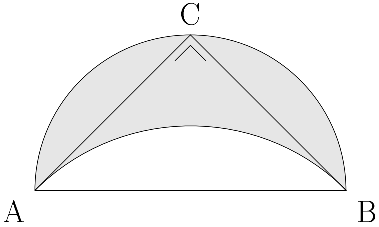


Рис. 1

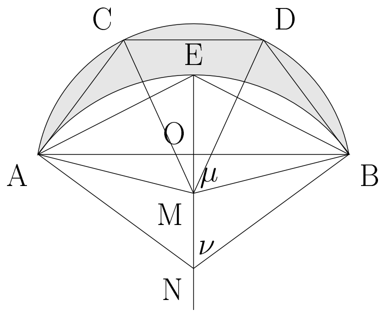


Рис. 2

Все $m+n$ углов, стягиваемых этими хордами в центрах соответствующих дуг, равны и, таким образом, $m+n$ круговых сегментов, вырезаемых этими хордами, подобны друг другу. Следовательно, отношение площади внешнего сегмента к площади внутреннего сегмента равно квадрату отношения радиусов двух дуг. Допустим, что это отношение оказалось равным $n : m$. Тогда суммы площадей сегментов на внешней и внутренних дугах в точности равны; на рис. 2 сумма площадей сегментов AC, CD и DB равна сумме площадей сегментов AE и EB. Таким образом, площадь луночки равна площади «спрямленной» луночки, т. е. многоугольника ($AEBDC$ на рис. 2), ограниченного $m+n$ хордами. Заметим, что эта площадь есть не что иное как площадь четырехугольника $ANBM$, так как суммарная площадь m треугольников с центром M и основаниями на хордах внешней дуги равна суммарной площади n треугольников с центром N и основаниями на хордах внутренней дуги. В таком случае будем говорить, что луночка является *квадрируемой*.

Если середину AB обозначить за O и положить OB равным единице, то радиусы MB и NB равны $1/\sin\nu$ и $1/\sin\mu$. Поэтому, если мы положим $\nu = m\vartheta$ и $\mu = n\vartheta$, то соответствующая луночка может быть квадрируемой тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\left(\frac{\sin m\vartheta}{\sin n\vartheta}\right)^2 = \frac{m}{n}. \qquad (*)$$

Мы получили алгебраическое уравнение относительно $x = \cos\vartheta$. Если это уравнение имеет корень, который может быть построен с помощью циркуля и линейки на основе отрезка единичной длины, то мы получаем пример луночки, для которой с помощью циркуля и линейки может быть построен квадрат равной площади. Очевидно, что вопрос о квадрируемости соответствующей луночки зависит только от отношения $m : n$. Тогда задача о квадратуре луночек может быть переформулирована в следующем виде.

Задача. *Найти все такие отношения $m : n$ взаимно простых натуральных чисел, что уравнение $(*)$ имеет решение $x = \cos w$, которое может быть построено с помощью циркуля и линейки на основе отрезка единичной длины.*

Пример на рис. 1 соответствует случаю $m : n = 2 : 1$, который имеет решение $x = 1/\sqrt{2}$. Для отношения $m : n = 3 : 2$ на рис. 2, уже известному Гиппократу, уравнение $(*)$ является квадратным относительно $\cos w$ и соответствующая луночка квадрируема. Квадрируемая луночка, соответствующая отношению $m : n = 3 : 1$, также была известна Гиппократу. В 1840 году Клаузен [10] опубликовал дополнительно еще два примера $m : n = 5 : 1$ и $m : n = 5 : 3$, не зная при этом, что две из его «четырех новых луночек» были известны еще Гиппократу, а две другие – математику 18 века Мартину Юхану Уинквисту (см. [19], с. 200). В заключение статьи Клаузен высказал гипотезу, что других примеров квадируемых луночек не существует:

Ich glaube schwerlich, daß sich die Größen, die die Winkel der andern Verhältnissen entsprechenden Ausschnitte bestimmen, geometrisch finden lassen.

[Трудно поверить, что величины, определяющие углы сегментов, соответствующие другим отношениям, могут быть найдены геометрически].

Некоторые продвижения в сторону доказательства гипотезы Клаузена были сделаны Ландау (1903) и болгарским математиком Чакаловым (1929-1930), который записал уравнение $(*)$ относительной новой переменной $y = e^{2i\theta}$ в виде

$$F(y) = (y^m - 1)^2 - \frac{m}{n} y^{m-n} (y^n - 1)^2 = 0$$

и в некоторых случаях смог найти группу Галуа неприводимых множителей F над $\mathbb{Q}$. Заметим, что F равен разности квадратов в $\mathbb{Q}(\sqrt{m/n})$, если ограничиться более простым случаем, когда разность $m-n$ четна. Путем исследования арифметических свойств многочлена F, в частности ветвления поля разложения многочлена F над $\mathbb{Q}$, Чеботарев в 1934 году показал (см. [6]), что в этом случае гипотеза Клаузена выполняется. Общий случай оставался открытым, пока, незадолго до безвременной кончины Чеботарева в 1947 году, его ученик А.В. Дороднов не закончил работу учителя, полностью доказав гипотезу Клаузена (см. [15]).

1. Теорема плотности

Теорему плотности Чеботарева можно рассматривать как обобщение теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогресии (1837) и теоремы Фробениуса (1880; опубликована в 1896).

Теорему Дирихле легко открыть экспериментально. Выпишем простые числа меньшие 100, сгруппировав их по последнему разряду:

$$\begin{aligned}
&1: 11, 31, 41, 61, 71\\
&2: 2\\
&3: 3, 13, 23, 43, 53, 73, 83\\
&5: 5\\
&7: 7, 17, 37, 47, 67, 97\\
&9: 19, 29, 59, 79, 89.
\end{aligned}$$

Не удивительно, что в таблице нет ни одного простого числа, оканчивающегося на 0, 4, 6 или 8, и что только два простых числа оканчиваются либо на 2, либо на 5. При этом можно предположить, что существует бесконечно много простых чисел, которые оканчиваются на 1, 3, 7, 9, причем они расположены достаточно равномерно на числовой прямой. Это и в самом деле так; это частный случай при $m = 10$ следующей теоремы, доказанной Дирихле (1805–1859) в 1837 году (см. [14]). Обозначим через $\varphi(m)$ число натуральных x, меньших, либо равных m и взаимно простых с ним; так $\varphi(10) = 4$.

Т е о р е м а Д и р и х л е. Пусть m – натуральное число. Тогда для каждого натурального a такого, что НОД$(a, m) = 1$, плотность множества простых чисел p таких, что $p \equiv a \bmod m$, равна $1/\varphi(m)$.

Мы говорим, что некоторое подмножество S простых чисел имеет *плотность* δ, если

$$\left(\sum_{p\in S}\frac{1}{p^s}\right)\bigg/\left(\sum_{p\ \text{простое}}\frac{1}{p^s}\right)\to\delta \qquad \text{при } s\downarrow 1.$$

Очевидно, плотность множества всех простых чисел равна 1. Плотность же конечного набора простых чисел равна 0, т. к. ряд $\sum\limits_p \frac{1}{p^s}$ расходится. Таким образом, при $m = 10$ «исключительно» простые числа 2 и 5 ничтожны с точки зрения вклада в плотность, а все остальные простые числа "равномерно" распределены между классами вычетов 1, 3, 7 и 9 по модулю 10 в том смысле, что плотности этих четырех множеств равны. Исходная формулировка теоремы Дирихле не содержит утверждения о плотности, но оно неявно присутствует в его доказательстве.

Введенное нами понятие плотности часто называют *аналитической плотностью* или *плотностью Дирихле*. С интуитивной точки зрения, было бы логичнее сказать, что множество S простых чисел имеет плотность δ, если

$$\frac{\#\{p\le x : p\in S\}}{\#\{p\le x : p\ \text{простое}\}}\to\delta \qquad \text{при } x\to\infty.$$

При использовании такого определения плотности, называемого *асимптотической плотностью*, теорема Дирихле также верна, но доказательство заметно усложняется, и было впервые получено де ла Валле-Пуссеном только в 1896 году (см. [11]). Если множество простых чисел обладает асимптотической плотностью, то оно обладает и аналитической плотностью, причем значения плотностей совпадают; обратное же не верно. Результаты, представленные ниже, также изначально были доказаны для аналитической плотности, с которой легче работать. Они сохраняются и для асимптотической плотности, но при этом нужен ряд дополнительных соображений, большей частью принадлежащих Гекке [20].

Теорема Фробениуса (1849-1917), обобщенная Чеботаревым, заслуживает того, чтобы быть известной в большей мере, чем это имеет место быть. Для множества приложений теоремы Чеботарева достаточно использовать теорему Фробениуса, которая стала известна раньше (1880) и доказывается легче теоремы Чеботарева (1922).

Как и в случае с теоремой Дирихле, теорему Фробениуса можно открыть эмпирически. Рассмотрим многочлен f с целочисленными коэффициентами, скажем, $f = X^4 + 3X^2 + 7X + 4$, и предположим, что нас интересует вопрос разложимости f над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. Стандартный подход состоит в разложении f на множители по модулю нескольких простых чисел p. В нашем случае

$$f \equiv X \cdot (X^3 + X + 1) \bmod 2,$$

где многочлены X и $X^3 + X + 1$ неприводимы над полем $\mathbf{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ из двух элементов. Будем говорить, что тип разложения f по модулю 2 равен 1, 3. Отсюда непосредственно получаем, что если многочлен f раскладывается на нетривиальные множители над $\mathbb{Z}$, то разложение тоже будет иметь тип 1, 3: линейный множитель и неприводимый кубический многочлен. Однако, эта возможность несовместима с тем фактом, что по модулю 11 тип разложения равен 2, 2:

$$f \equiv (X^2 + 5X - 1) \cdot (X^2 - 5X - 4) \bmod 11,$$

где оба множителя неприводимы над $\mathbf{F}_{11}$. Итак, многочлен f неприводим над $\mathbb{Z}$.

А можно ли судить о разложимости f только по одному простому числу? По модулю такого числа многочлен f должен быть неприводим, т. е. иметь тип разложения 4. С помощью любого из пакетов компьютерной алгебры легко провести численный эксперимент. Есть только 168 простых чисел, меньших 1000. Среди них два простых числа $p = 7$ и $p = 19$ являются особенными, а именно, при факторизации по данным модулям, многочлен f

имеет кратные множители:

$$f \equiv (X-3)^2 \cdot (X+3)^2 \bmod 7,$$
$$f \equiv (X-3)^2 \cdot (X+9)^2 \bmod 19.$$

Для всех остальных простых чисел кратные множители не возникают, и мы можем получить следующие типы:

$$\begin{aligned} \text{тип } 1,3: &\quad 112 \text{ простых } (67.5\%), \\ \text{тип } 2,2: &\quad 44 \text{ простых } (26.5\%), \\ \text{тип } 1,1,1,1: &\quad 10 \text{ простых } (6.0\%). \end{aligned}$$

Можно предположить, что множество простых чисел с типом 1, 3 имеет плотность $\frac{2}{3}$; множество простых чисел с типом 2, 2 имеет плотность $\frac{1}{4}$; не существует простых чисел с типами 4 или 1, 1, 2; и наконец, чтобы суммарная плотность равнялась единице, множество простых чисел с типом 1, 1, 1, 1 должно иметь плотность $\frac{1}{12}$.

В таблице ниже представлены результаты подобного эксперимента, проведенного на нескольких многочленах степени 4. Для каждого многочлена f приведена плотность множества простых чисел, по модулю которых многочлен имеет указанный тип.

f	4	$1,3$	$2,2$	$1,1,2$	$1,1,1,1$
$X^4 - X - 1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$
$X^4 - X^2 + 1$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$X^3 - X^2 - 1$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$X^4 + 3X^2 + 7X + 4$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$

Теорема Фробениуса говорит, как можно понять эти дроби посредством *группы Галуа* многочлена.

Пусть теперь f – произвольный многочлен степени n с целочисленными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1. Предположим, что дискриминант $\Delta(f)$ многочлена f отличен от нуля, т. е. f имеет n различных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в подходящем расширении поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Через K обозначим поле, порожденное этими корнями: $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Группой Галуа G многочлена f называют группу G автоморфизмов поля

K. Каждый автоморфизм $\sigma \in G$ переставляет корни $\alpha_1, ..., \alpha_n$ многочлена f и, в свою очередь, полностью определяется этой перестановкой. Таким образом, можно рассматривать группу G как подгруппу S_n. Если мы разложим элемент $\sigma \in G$ в произведение независимых циклов (включая циклы длины 1), и оставим только длины этих циклов, то получим цикловой шаблон σ, представляющий собой разбиение $n_1, n_2, ..., n_t$ числа n.

Если простое число p не является делителем $\Delta(f)$, то по модулю p многочлен f разлагается в произведение различных неприводимых над $\mathbb{F}_p$ многочленов. Степени этих многочленов образуют тип разложения f по модулю p, и, в то же время, это некоторое разбиение числа n. Если говорить неформально, то теорема Фробениуса утверждает, что «число» простых чисел с фиксированным типом разложения пропорционально числу $\sigma \in G$ с таким же цикловым шаблоном.

Т е о р е м а Ф р о б е н и у с а. Плотность множества простых чисел p, по модулю которых многочлен f имеет фиксированный тип разложения $n_1, n_2, ..., n_t$, существует и равна произведению $1/\#G$ на число перестановок $\sigma \in G$ с цикловым шаблоном $n_1, n_2, ..., n_t$.

К примеру, рассмотрим разбиение, в котором все n_i равны 1. Этому условию удовлетворяет только тождественная перестановка. А значит, плотность множества простых чисел p, по модулю которых многочлен f раскладывается на линейные множители, равна $1/\#G$. Таким образом, из последнего столбца таблицы выше мы заключаем, что порядки групп Галуа указанных многочленов равны 24, 4, 4, 8 и 12 соответственно. Более того, эти группы Галуа представляют собой симметрическую группу S_4, группу Клейна V_4, циклическую группу C_4, группу Диэдра D_4 и знакопеременную группу A_4. Указанные выше группы образуют полный список всех транзитивных подгрупп S_4, а значит, каждый неприводимый многочлен f имеет такой же набор плотностей и типов, как и один из многочленов в таблице. Для приводимого многочлена f есть и другие возможности.

Знакопеременная группа A_4, помимо тождественной перестановки, содержит восемь элементов типа 1, 3 и три элемента типа

2, 2. Что и в самом деле дает плотности $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ и $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, которые мы нашли для многочлена $f = X^4 + 3X^2 + 7X + 4$.

Воспользовавшись элементами теории групп, нетрудно вывести несколько интересных следствий из теоремы Фробениуса. К примеру, если многочлен f для всех простых чисел p имеет корень над $\mathbb{F}_p$, то многочлен f либо линейный, либо приводимый. Кроме того, число неприводимых множителей f над $\mathbb{Z}$ равно среднему (в естественном смысле) числу корней f над $\mathbf{F}_p$, где p пробегает все простые числа. С исторической точки зрения, рассуждения шли в обратном порядке: сначала последнее утверждение было доказано Кронекером в 1880 году [23], а потом на основе его Фробениус доказал свою теорему; при этом теория групп была использована Фробениусом, но не Кронекером.

Чтобы увидеть взаимосвязь между теоремами Дирихле и Фробениуса, рассмотрим многочлен $f = X^m - 1$, где число m натурально. Так как $\Delta(m) = (-1)^{m(m-1)/2} m^m$, то исключим из рассмотрения простые делители числа m. Для остальных простых p нетрудно найти тип разложения $X^m - 1$ по модулю p, пользуясь простыми свойствами конечных полей (см. [25], теорема 2.47). Так при $m = 12$ мы видим, что тип разложения зависит от класса вычетов p по модулю 12:

$$\begin{aligned} p \equiv 1 \bmod 12: &\quad 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\\ p \equiv 5 \bmod 12: &\quad 1,1,1,1,2,2,2,2,\\ p \equiv 7 \bmod 12: &\quad 1,1,1,1,1,1,2,2,2,\\ p \equiv 11 \bmod 12: &\quad 1,1,2,2,2,2,2. \end{aligned}$$

Заметим, что каждому типу разложения соответствует в точности один класс вычетов. Значит, при $m = 12$ теорема Дирихле вытекает из теоремы Фробениуса. Впрочем, это верно не для всех m. К примеру, если мы рассмотрим типы разложения при $m = 10$, то получим следующую таблицу:

$$\begin{aligned} p \equiv 1 \bmod 10: &\quad 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\\ p \equiv 3 \text{ или } 7 \bmod 10: &\quad 1,1,4,4,\\ p \equiv 9 \bmod 10: &\quad 1,1,2,2,2,2. \end{aligned}$$

И хотя тип разложения также зависит лишь от класса вычетов p по модулю 10, теорема Фробениуса не различает классы вычетов $3 \bmod 10$ и $7 \bmod 10$. В общем случае для многочлена $f = X^m - 1$

теорема Фробениуса вытекает из теоремы Дирихле, а не наоборот.

Можно получить усиленную версию теоремы Фробениуса, из которой вытекает теорема Дирихле путем рассмотрения многочлена $f = X^m - 1$. Для этого нужно ответить на вопрос, на который наводит соответствие между типами разложения и цикловыми шаблонами. А именно, можно ли каждому простому p, который не является делителем $\Delta(f)$, каким-нибудь естественным образом сопоставить элемент $\sigma_p \in G$ такой, что тип разложения f по модулю p совпадает с цикловым шаблоном σ_p? Ответ на вопрос почти утвердительный: это действительно можно сделать с той лишь оговоркой, что элемент σ_p, традиционно называемый *подстановкой Фробениуса*, определяется с точностью до сопряжения в G. А так как сопряженные подстановки обладают одинаковой цикловой структурой, то нас это вполне устраивает. Как только подстановка Фробениуса определена, можно поинтересоваться плотностью множества простых чисел p, для которых σ_p совпадает с заданным элементом группы G. Это и приводит нас к желаемому совместному обобщению теорем Фробениуса и Дирихле. В качестве гипотезы оно было сформулировано Фробениусом и в конечном итоге доказано Чеботаревым.

Несколько техническое построение подстановки Фробениуса является основной причиной относительно малой популярности теоремы Чеботарева за пределами алгебраической теории чисел. В нашем изложении несколько просто формулируемых фактов считаются общеизвестными.

Фиксируем простое число p и за $\overline{\mathbf{F}}_p$ обозначим алгебраическое замыкание поля $\mathbf{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Основным инструментом при работе с конечными полями является *отображение Фробениуса* $\mathrm{Frob} : \overline{\mathbf{F}}_p \to \overline{\mathbf{F}}_p$, определяемое как $\mathrm{Frob}(\alpha) = \alpha^p$. Это отображение, очевидно, сохраняет произведение, но, что удивительно, оно сохраняет и сложение: это автоморфизм поля $\overline{\mathbf{F}}_p$. Следовательно, отображение Frob переставляет корни каждого многочлена g с коэффициентами в $\mathbf{F}_p$. Теория Галуа позволяет утверждать, что цикловой шаблон отображения Frob, рассматриваемый как перестановка корней g, совпадает с типом разложения g над $\mathbf{F}_p$. Это верно для любого многочлена g с коэффициентами из $\mathbf{F}_p$, который не имеет кратных множителей. Несложными рассуждениями доказательство сводится к рассмотрению неприводимого многочлена g, для которого остается применить теорему 2.14 из [25]. Нас будет интересовать случай $g = (f \bmod p)$, где многочлен f тот же, что и ранее.

Отображение Фробениуса есть автоморфизм поля $\overline{\mathbf{F}}_p$ характеристики p, в то время как подстановке Фробениуса σ_p суждено быть автоморфизмом поля K характеристики 0. Чтобы связать эти два поля, мы разработаем метод редуцирования элементов поля $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ по модулю p, таким образом, что «корни $(f \bmod p)$» могут рассматриваться как «(корни f) $\bmod p$».

Под *точкой* поля K над p будем понимать отображение $\psi : K \to \overline{\mathbf{F}}_p \cup \{\infty\}$, для которого выполняются следующие свойства:

(i) $\psi^{-1}\overline{\mathbf{F}}_p$ образует подкольцо K и $\psi : \psi^{-1}\overline{\mathbf{F}}_p \to \overline{\mathbf{F}}_p$ является кольцевым гомоморфизмом;

(ii) для каждого ненулевого $x \in K$, $\psi(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\psi(x^{-1}) = 0$.

Заметим, что если мы хотим научиться брать элементы K по модулю p, то без добавления символа ∞ не обойтись: разумно потребовать, чтобы $p \bmod p$ равнялось нулю, но тогда $(1/p) \bmod p = 1/0 = \infty$.

Отметим ряд простых свойств точек:

(a) точка поля K над p существует для всех простых p;

(b) если ψ, ψ' – две точки поля K над p, то $\psi' = \psi \circ \tau$ для некоторого $\tau \in G$;

(c) если p не делит $\Delta(f)$, то элемент $\tau \in G$ из п. (b) определяется однозначно по паре ψ, ψ'.

В использованной нами формулировке эти утверждения трудно найти в имеющейся литературе. Заинтересованному читателю предлагается доказать их в качестве упражнения.

Пусть теперь простое число p не является делителем $\Delta(f)$ и пусть ψ – точка K над p. Нетрудно видеть, что $\psi(\alpha_1), \psi(\alpha_2), ..., \psi(\alpha_n)$ – корни $(f \bmod p)$ в $\overline{\mathbf{F}}_p$. Применяя свойства (b) и (c) к отображению $\psi' = \mathrm{Frob} \circ \psi$, которое также является точкой K над p (считаем, что $\mathrm{Frob}(\infty) = \infty$), получаем, что существует единственный элемент $\mathrm{Frob}_\psi \in G$, для которого

$$\psi \circ \mathrm{Frob}_\psi = \mathrm{Frob} \circ \psi.$$

Полученный автоморфизм и будет подстановкой Фробениуса. Как элемент G он характеризуется свойством

$$\psi(\mathrm{Frob}_\psi(x)) = \mathrm{Frob}(\psi(x)) \qquad \text{при всех } x \in K.$$

Это показывает, что Frob_ψ переставляет $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ таким же образом, как Frob переставляет корни $\psi(\alpha_1), \psi(\alpha_2), ..., \psi(\alpha_n)$ многочлена $(f \bmod p)$. Таким образом, цикловой шаблон Frob_ψ действительно совпадает с типом разложения f по модулю p.

Подстановка Фробениуса Frob_ψ в общем случае зависит от выбора точки ψ над p. В силу свойства (b) любая другая точка над p имеет вид $\psi \circ \tau$, откуда непосредственно следует $\mathrm{Frob}_{\psi\circ\tau} = \tau^{-1} \circ \mathrm{Frob} \circ \tau$; таким образом, если ψ пробегает точки над фиксированным простым p, то Frob_ψ пробегает класс сопряженности в G. Обозначим представителя данного класса через σ_p; он определен с точностью до сопряжения и называется *подстановкой Фробениуса* числа p.

Чтобы проиллюстрировать вышесказанное, снова рассмотрим многочлен $f = X^m - 1$. В этом случае K есть поле деления круга, получаемое присоединением к $\mathbb{Q}$ первообразного корня ζ степени m из единицы. Группа Галуа G имеет порядок $\varphi(m)$ и естественно изоморфна группе $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$; при этом $\tau \in G$ соответствует классу $(a \bmod m) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, если $\tau(\zeta) = \zeta^a$. Пусть простое число p не делит m. Так как группа Галуа G абелева, то подстановка Фробениуса σ_p определена однозначно. Чтобы вычислить ее, возьмем некоторую точку ψ над p. Тогда $\eta = \psi(\zeta)$ будет первообразным корнем степени m из единицы в $\overline{\mathbf{F}}_p$. По определению σ_p $\psi(\sigma_p(x)) = \psi(x)^p$ для всех $x \in K$. Взяв в качестве x элемент ζ, а в качестве a такое натуральное число, что $\sigma_p(\zeta) = \zeta^a$, мы получим равенство $\eta^a = \eta^p$, откуда следует $a \equiv p \bmod m$. Другими словами, если простое число p не делит m, то подстановка Фробениуса σ_p есть в точности тот элемент G, который под действием естественного изоморфизма $G \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ переходит в $(p \bmod m)$.

Приведенный пример позволяет переформулировать теорему Дирихле следующим образом: если $f = X^m - 1$ для некоторого натурального m, то плотность множества простых чисел p, для которых σ_p равно заданному элементу G, существует и равна $1/\#G$. Таким образом, подстановки Фробениуса «равномерно» пробегают группу Галуа, когда p пробегает все простые числа, которые не делят m. Теорема Чеботарева расширяет этот результат на все многочлены f.

Теорема плотности Чеботарева. Пусть f – многочлен с целочисленными коэффициентами, у которого старший коэффициент равен 1, и C – некоторый класс сопряженности в группе Галуа G многочлена f. Предположим, что дискриминант $\Delta(f)$ отличен от нуля. Тогда плотность множества простых чисел p, которые не делят $\Delta(f)$ и для которых σ_p принадлежит C, существует и равна $\#C/\#G$.

На первый взгляд может показаться, что теорема Чеботарева ненамного сильнее теоремы Фробениуса. Если применить последнюю теорему к хорошо подобранному многочлену (имеющему то же поле разложения, что и f), то можно получить вариацию теоремы плотности, в которой C является отделом G, вместо класса сопряженности; два элемента группы G принадлежат одному отделу, если порожденные ими циклические подгруппы сопряжены в G. В таком виде теорема была переформулирована еще Фробениусом. Однако разбиение G на отделы, как правило, менее точно, чем разбиение на классы сопряженности, и, следовательно, теорема Фробениуса все же заметно слабее теоремы Чеботарева. К примеру, классы $3 \bmod 10$ и $7 \bmod 10$ принадлежат одному отделу группы $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$, и как раз поэтому в рассмотренном ранее примере теорема Фробениуса не могла различить простые числа, принадлежащие этим классам.

Завершим этот параграф тремя простыми приложениями теоремы плотности Чеботарева. Для их доказательства достаточно применить теорему к правильно подобранным полям так же, как мы получили теорему Дирихле из рассмотрения полей деления круга.

Первое приложение относится к алгебраической теории чисел: простые идеалы кольца целых чисел алгебраического числового поля равномерно распределены среди классов идеалов. Для доказательства потребуется понятие Гильбертова поля классов.

Второе приложение связано с квадратичными формами: плотность множества простых чисел p, которых можно представить в виде $p = 3x^2 + xy + 4y^2$ для некоторых целочисленных x и y, определена и равна $\frac{1}{5}$. Результаты подобного типа основываются на рассмотрении кольцевого поля классов.

Последнее приложение, как и первый пример, будет касаться основания 10: плотность множества простых чисел p, для которых число $\frac{1}{p}$ в десятичной системе имеет период нечетной длины, существует и равна $\frac{1}{3}$ (см. [31]). Интересно, что результат опирается на рассмотрение бесконечного числа многочленов, а именно многочленов вида $f = X^{2^k} - 100$ для всех $k \geq 2$.

2. Теория полей классов и теорема Чеботарева

Статья, в которой Фробениус доказал свою теорему и сформулировал гипотезу, ставшую впоследствии теоремой плотности Чеботарева, была написана им в 1880 году. Он поделился полученными результатами с Штикельбергером и Дедекиндом, но отложил публикацию до тех пор, пока не будет опубликована теория идеалов Дедекинда. Это произошло в 1894 году, а в 1896 году вышла статья Фробениуса.

Таким образом, гипотеза Фробениуса оставалась недоказанной в течении 42 лет, пока Чеботарев не доказал ее в 1922 году. В течение этих лет алгебраическая теория чисел серьезно продвинулась вперед: Дедекинд и Кронекер заложили основы теории, Гильберт выпустил обзор *Zahlbericht*, Вебер и Гильберт сформулировали основные теоремы *теории полей классов* и, вскоре после окончания Первой мировой войны, японский математик Такаги дополнил доказательства этих теорем (см. [18]).

Теория полей классов позволяет описать все абелевы расширения заданного алгебраического числового поля. И хотя этому результату уже более 90 лет, теория полей классов считается достаточно сложной теорией. Ее основные результаты звучат естественно, но их доказательства длинны, извилисты и не объясняют, почему эти результаты верны.

Как можно видеть, теория полей классов предоставила Чеботареву мощное средство для доказательства его теоремы. И в самом деле, в современном изложении доказательство теоремы плотности Чеботарева неизменно опирается на результаты теории полей классов (см. к примеру [24], гл. VIII, §4; [30], гл. V, §6). Но, как ни удивительно, это не относится к оригинальному доказательству. Более того, на тот момент Чеботарев не был знаком с теорией полей классов и доказал свою теорему по существу голыми руками. Как мы увидим далее, доказательство Чеботарева оказало большее влияние на развитие теории полей классов, чем теория полей классов повлияла на доказательство теоремы.

Рассуждения Чеботарева основывались на изобретенном им методе «скрещивания» произвольных абелевых расширений числовых полей с круговыми расширениями, получаемыми присоединением корня из единицы. Не используя ничего, кроме основ теории Галуа, Чеботарев показал, что эта операция сводит общий случай его теоремы к случаю (относительных) круговых расширений. Этот случай он исследовал при помощи достаточно стандартных рассуждений, похожих на те, что использовал Дирихле. Другие детали можно найти в ясно написанном обзоре Шрейера [33], современника событий, а также в приложении к настоящей статье.

Доказательство теоремы плотности было опубликовано Чеботаревым сначала на русском языке в 1923 году [4] и затем на немецком в 1925 году [5]. В то же время, в 1923 году Артин опубликовал свой закон взаимности ([1], Satz 2). И хотя в основополагающем труде Вебера и Гильберта не было намека на этот результат, в наше время он считается одним из основных результатов теории полей классов. Артин нисколько не сомневаясь назвал свой закон теоремой, но при этом указал, что доказательство ему неизвестно. Также Артин отметил, что из его закона взаимности можно вывести гипотезу Фробениуса ([1], Abschnitt 7). В письме к Хассе от 10 февраля 1925 года Артин писал ([16], с. 23):

Haben Sie die Arbeit von Tschebotareff in den Annalen Bd 95 gelesen? Ich konnte sie nicht verstehen und mich auch aus Zeitmangel noch nicht richtig dahinterklemmen. Wenn die richtig ist, hat man sicher die allgemeinen Abelschen Reziprozitätsgesetze in der Tasche. Das Studium der Arbeit haben wir hier auf das nächste Semester verschoben. Vielleicht haben Sie sie schon gelesen und wissen also ob falsch oder richtig?

[Прочли ли вы статью Чеботарева в 95 томе Анналов? Я не смог ее понять, а нехватка времени не позволяет пока всерьез взяться за нее. Если статья верна, то из нее легко выводится общий абелевый закон взаимности. Мы отложили изучение статьи до следующего семестра. Быть может вы уже прочли ее и можете сказать верна ли она?]

Интуиция не подвела Артина. Чеботарев писал ([7], т. 3, с. 155–156):

Летом 1927 г., изучая теорию полей классов, я пришел к убеждению, что можно доказать закон Артина, воспользовавшись моим приемом присоединения полей деления круга. Когда у меня уже начали намечаться контуры доказательства, пока еще довольно смутные, мы переехали с дачи в город, и там я сейчас же увидел на библиотечной витрине томик Hamb. Abh. со статьей Артина "Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes" ([2]). Моя досада была сразу смягчена, когда я увидел, что Артин упоминает в начале статьи, что основная мысль доказательства, присоединение полей деления круга (Kreiskörpererweiterung) была им заимствована из моей работы. Я был очень тронут щепетильностью Артина в вопросах цитирования, так как между способами применения метода присоединения полей деления круга в обеих статьях имеется лишь неполная аналогия.

Артин закончил свое доказательство в июле 1927 года (см. [16], с. 31–32), когда Чеботарев был уже близок к этому.

Техника, введенная Чеботаревым, до сих пор является неотъемлемой частью самого известного доказательства закона взаимности Артина (к примеру, см. [24], гл. X, §2). Многим эта техника представляется искусственной и контр-интуитивной, как и большинство доказательств теории полей классов. На это Чеботарев мог бы сказать, что это нашу интуицию и психологию стоит видоизменить, а не его идеально выверенный и эффективный метод. И на самом деле, Нойкирх в своем изложении теории [30] настолько тесно вплетает приём Чеботарева, что можно поверить, что когда-нибудь он будет частью нашего образа мыслить о законе взаимности.

С другой стороны, прием Чеботарева исчез из современных изложений его теоремы плотности: как только доказан закон взаимности, мы можем напрямую работать с абелевыми расширениями, без апеллирования к круговым расширениям. Те же, кто прочтет приложение к этой статье, наверняка согласятся, что этот подход, восходящий к Дойрингу [12], весьма естественен; но в нем теорема Чеботарева выглядит труднее, чем она есть в действительности.

Приложение

Приведем доказательство теоремы Чеботарева, которое следует его изначальной стратегии, если и не его тактике. Все приведенные ниже ссылки относятся к [24]. Мы предполагаем наличие у читателя знаний основ алгебраической теории чисел, включая основные свойства дзета-функций [VIII.1-3], но не требуем знания теории полей классов.

Мы докажем более общий вариант теоремы, в которой в качестве основного поля выступает произвольное алгебраическое числовое поле, а не только поле $\mathbb{Q}$. Как и в случае $F = \mathbb{Q}$, на множестве простых дивизоров поля F определена плотность [VIII.4]. Пусть K – конечное расширение Галуа поля F с группой Галуа G. Тогда для всех простых дивизоров $\mathfrak{p}$ поля F, за исключением некоторого конечного подмножества, с точностью до сопряжения определена подстановка Фробениуса $\sigma_{\mathfrak{p}} \in G$.

Т е о р е м а Ч е б о т а р е в а. *Для каждого класса сопряженности C группы G плотность $d(K/F, C)$ множества простых дивизоров $\mathfrak{p}$ поля F, для которых $\sigma_{\mathfrak{p}} \in C$, существует и равна $\#C/\#G$.*

Вначале покажем, что достаточно ограничиться случаем абелевых расширений. Фиксируем элемент $\sigma \in C$ и положим $E = \{x \in K : \sigma x = x\}$. Тогда K будет расширением Галуа поля E с группой Галуа $< \sigma >$. Используя несложные рассуждения, аналогичные проведенным в [VIII.4, доказательство теоремы 10], мы видим, что

(∗) заключение теоремы выполняется для K, F, C тогда и только тогда, когда оно выполняется для $K, E, \{\sigma\}$.

Остается заметить, что группа Галуа $< \sigma >$ поля K над E абелева.

Далее рассмотрим случай, когда K является круговым расширением поля F, т. е. $K = F(\zeta)$ для некоторого корня из единицы ζ. В этом случае при $F = \mathbb{Q}$ мы получаем теорему Дирихле, а в общем случае ход рассуждений опирается на доказательство этой теоремы. Воспользовавшись тем, что подстановка Фробениуса простого дивизора $\mathfrak{p}$ зависит только от нормы $\mathfrak{p}$ по модулю порядка ζ (см. [VIII.4, пример]), дзета-функцию $\zeta_K(s)$ поля K

можно разложить в произведение подходящих L-функций поля F. После этого, обратив внимание на порядок полюса в точке $s = 1$, нетрудно завершить доказательство, воспользовавшись классическими аргументами, как в [VIII.4, следствие после теоремы 8].

Чтобы перейти к произвольным абелевым расширениям, удобно было бы показать, что для абелевых расширений сохраняются основные свойства круговых расширений, которые использовались выше. Однако это не так то и просто – для этого потребуется углубиться в теорию полей классов. Это приведет нас к доказательству Дойринга теоремы Чеботарева [VIII.4, теорема 10].

Воспользуемся подходом Чеботарева, который не требует знания теории полей классов. Пусть K – абелево расширение Галуа поля F степени n с группой Галуа G. Пусть также m – любое простое число, которое не делит дискриминант Δ поля K как расширения поля $\mathbb{Q}$, и обозначим через ζ примитивный корень степени m из единицы. Тогда группа Галуа H поля $F(\zeta)$ над F изоморфна $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, а группу Галуа $K(\zeta)$ над F можно отождествить с группой $G \times H$. Если для простого дивизора $\mathfrak{p}$ поля F определена подстановка Фробениуса $(\sigma, \tau) \in G \times H$, то в G его подстановкой Фробениуса будет σ. Обозначим за $d_{\inf}$ *нижнюю плотность*, которая получается, если в определении плотности заменить предел $\lim$ на нижний предел $\underline{\lim}$. Тогда $d_{\inf}(K/F, \{\sigma\}) \geq \sum\limits_{\tau \in H} d_{\inf}(K(\zeta)/F, \{(\sigma, \tau)\})$. Фиксируем элементы $\sigma \in G$ и $\tau \in H$, и предположим, что n делит порядок τ. Тогда подгруппы $< (\sigma, \tau) >$ и $G \times \{1\}$ группы $G \times H$ пересекаются только по нейтральному элементу. Поэтому для неподвижного поля L группы $< (\sigma, \tau) >$ выполняется равенство $L(\zeta) = K(\zeta)$, следовательно, расширение $L \subseteq K(\zeta)$ является круговым. Воспользовавшись разобранным ранее случаем круговых расширений, получаем плотность $d(K(\zeta)/L, \{(\sigma, \tau)\})$ существует и корректно определена. В силу $(*)$ также определена и плотность $d(K(\zeta)/F, \{(\sigma, \tau)\})$, которая, следовательно, равна $1/(\#G \cdot \#H)$. Просуммировав по $\tau \in H$, получаем, что $d_{\inf}(K/F, \{\sigma\}) \geq \#H_n/(\#G \cdot \#H)$, где H_n – множество $\tau \in H$, порядок которых делится на n. Отсюда уже легко вывести, что когда m пробегает все простые числа, которые не делят Δ, значение дроби $\#H_n/\#H$

может принимать значения, сколь угодно близкие к единице (воспользуйтесь, к примеру, теоремой Дирихле и в качестве m возьмите числа, сравнимые с 1 по модулю n^k для больших k). Таким образом, $d_{\inf}(K/F, \{\sigma\}) \geq 1/\#G$. Применяя эти рассуждения для всех *остальных* элементов группы, убеждаемся, что верхняя плотность $d_{\sup}(K/F, \{\sigma\})$ не превосходит $1/\#G$. Следовательно, нижняя и верхняя плотности совпадают и равны $1/\#G$, что и завершает доказательство теоремы.

Источники о жизни и творчестве Н.Г.Чеботарева

Математические работы Чеботарева хорошо представлены в книгах и статьях, которые появились в течение его жизни или вскоре после его смерти. Русские версии опубликованных статей можно найти в его собрании сочинений [7]. Кроме того, Чеботарев написал несколько обзоров своих работ в томах, выходивших под названием «Математика в СССР за ... лет», см. например, [26]. Изложение его работ имеется в книге [21] и в подробном описании творчества Чеботарева и его казанских учеников, принадлежащем его коллеге и другу Морозову [28].

Что касается жизнеописания Чеботарева, то здесь иная ситуация. В его собрании сочинений имеется «слегка сокращенная» версия математической автобиографии, написанной в 1927 году. Она сфокусирована на его математических достижениях и научной карьере, как и, в несколько меньшей степени, некролог в «Успехах математических наук» [29]. Морозов написал о Чеботареве биографический очерк гораздо более личного характера в 1963 г., когда при преемнике Сталина Хрущеве наступила определенная политическая оттепель [27]. Морозов дважды безуспешно пытался опубликовать этот очерк в журнале «Алгебра и логика», по случаю 20-й и 25-й годовщины смерти Чеботарева. Как и воспоминания сына Чеботарева Григория о жизни его отца [3], а также некоторые избранные рукописи Чеботарева и Морозова [8], очерк Морозова до сих пор не опубликован[1]. Однако И.Р. Шафаревич любезно предоставил нам копии этих документов. Количество деталей, касающихся событий политического прошлого, варьируется в источниках в зависимости от времени их написания.

[1] Воспоминания сына Чеботарева и очерк Морозова были опубликованы в кн.: Николай Григорьевич Чеботарев (1894-1947). – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1994. См. сноски к [3] и [27] из списка литературы. Эти источники также воспроизведены в настоящем сборнике. – Прим. перев.

Можно сравнить описание событий в «сокращенной» автобиографии в собрании сочинений 1949-50 гг., в очерке Морозова 1963 г., который включает отрывки из несокращенной автобиографии, и в недавних воспоминаниях [3].

Литература

[1] E. Artin, Über eine neue Art von L-Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1923), 89–108; Collected papers, pp. 105–124. Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.

[2] E. Artin, Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 353–363; Collected papers, pp. 131–141. Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.

[3] G. N. Chebotarev, *Iz vospominanii ob ottse (From the recollections on my father),* (unpublished). [3]

[4] Н. Г. Чеботарев, Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок, Изв. РАН (1923), с. 231–250; Собр. соч. т. I, с. 27–65.

[5] N. Tschebotareff (= N. G. Chebotarëv), Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann. 95 (1925), 191–228.

[6] N. Tschebotarow (= N. G. Chebotarev), Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke, I, Math. Z. 39 (1935), 161–175.

[7] Н. Г. Чеботарев, *Собрание сочинений,* 3 тома, Москва-Ленинград, 1949–1950.

[8] N. G. Chebotarev, Letter to Mikhail Il'ich Rokotovskii, July 3, 1945, in: Pis'ma i Vospominaniya (Letters and Recollections), (16 pp., unpublished).

[9] N. Tschebotarow (= N. G. Chebotarev), *Grundzüge der Galois schen Theorie,* übersetzt und bearbeitet von H. Schwerdtfeger, Noordhoff, Groningen, 1950.

[10] Th. Clausen, Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist, J. Reine Angew. Math. 21 (1840), 375–376.

[11] Ch. de la Vallée-Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Deuxiéme partie: Les fonctions de Dirichlet et les nombres premiers de la forme linéaire Mx + N, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 20 (1896), 281–362.

[12] M. Deuring, Über den Tschebotareffschen Dichtigkeitssatz, Math. Ann. 110 (1935), 414–415.

[13] J. Dieudonné, Une propriété des racines d'unité, Revista Un. mat. Argentina 25 (1970), 1–3, Math. Rev. 47, #8495; see also [7], Vol. 3, p. 162; Math. Rev. 17, 338x; Math. Rev. 53, #7997.

[14] G. Lejeune Dirichlet, Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, Abh. der

[3] Г.Н. Чеботарев, Из воспоминаний об отце // Николай Григорьевич Чеботарев (1894–1947). – Казань: Издательство Казанского университета, 1994. – С. 54–68. – Прим. перев. (см. также настоящий сб.)

Königl. Akad. der Wissenschaft. Berlin, math. Abh. (1837), 45–71; Werke I, pp. 313–342. Georg Reimer, Berlin, 1889.

[15] Дороднов А.В. О круговых луночках, квадрируемых при помощи циркуля и линейки // Докл. АН СССР. — 1947. — Т. LVIII, № 6. — С. 965–968.

[16] G. Frei, *Die Briefe von E. Artin an H. Hasse* (1923–1953), Collection Mathématique, Département de Mathématiques, Université Laval, Québec, 1981.

[17] F. G. Frobenius, Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Sitzungsberichte der Königl. Preubischen Akad. der Wissenschaft. Berlin (1896), 689–703; Gesammelte Abhandlungen II, 719–733. Springer, Berlin, 1968.

[18] H. Hasse, History of class field theory, *Algebraic Number Theory, Proceedings of an Instructional Conference,* (J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, eds), Academic Press, London, 1967, pp. 266–279.

[19] T. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Oxford University Press, Oxford, 1921, Vol. I.

[20] E. Hecke, Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. (1917), 299–318; Mathematische Werke, 178–197. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1959.

[21] *История отечественной математики,* том 3, Киев: Наукова думка, 1968.

[22] E. R. Kolchin, Math. Rev. 17 (1956), 1045.

[23] L. Kronecker, Über die Irreductibilität von Gleichungen, Monatsberichte der Königlich Preubischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1880), 155–162; Werke II, 83–93. B. G. Teubner, Leipzig, 1897.

[24] S. Lang, *Algebraic number theory,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1970.

[25] R. Lidl, H. Niederreiter, *Finite fields,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.

[26] *Математика в СССР за 30 лет, 1917–1947,* Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1948, 1044 с.

[27] V.V. Morozov, Nikolai Grigor'evich Chebotarëv (28 pp., unpublished). [4]

[28] В. В. Морозов, Казанская математическая школа за 30 лет, Успехи математических наук, том 2, выпуск 6(22), 1947, 3–8.

[29] Н. Г. Чеботарёв (некролог), Успехи математических наук, том 2, выпуск 6(22), 1947, 68–71.

[30] J. Neukirch, *Class field theory,* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[31] R. W. K. Odoni, A conjecture of Krishnamurthy on decimal periods and some allied problems, J. Number Theory 13 (1981), 303–319.

[32] A. M. Ostrowski, Über Singulariätten gewisser mit Lücken behafteten Potenzreihen. Mathematische Miszellen, VII, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 35 (1926), 269–280; Collected mathematical papers 5, 181–192. Birkhäuser, Basel, 1985.

[4] В.В. Морозов, Николай Григорьевич Чеботарев // Николай Григорьевич Чеботарев (1894–1947). – Казань: Издательство Казанского университета, 1994. – с. 9–53. – Прим. перев. (см. также настоящий сб.)

[33] O. Schreier, Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 5 (1927), 1–6.

[34] J-P. Serre, *Abelian l-adic representations and elliptic curves,* W. A. Benjamin, New York, 1969.

[35] J-P. Serre, Quelques applications du théoréme de densité de Chebotarev, Publ. Math. I.H.E.S. 54 (1981), 123-201; OEuvres III, 563–641. Springer, Berlin, 1986.

[36] A.L. Shields, Luzin and Egorov, Math. Intellgencer 9(4) (1987), 24–27.

Перевод А.Н. Абызова и Д.Т. Тапкина.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

А.Н. Абызов, Ю.А. Альпин, С.М. Скрябин, С.Н. Тронин

Казанская алгебраическая школа была основана выдающимся математиком, членом-корреспондентом АН СССР Николаем Григорьевичем Чеботаревым, он же руководил основанной им в 1934 г. кафедрой алгебры вплоть до своей кончины в 1947 г. На 30-е и 40-е годы приходится период расцвета алгебраических исследований в университете, постепенно превративших Казань в один из мировых алгебраических центров. Основную роль в этом играл организованный Н.Г. Чеботаревым семинар, участниками которого были, кроме Николая Григорьевича, его первые казанские ученики И.Д. Адо, В.В. Морозов, Н.Н. Мейман, к которым позднее присоединились А.И. Гаврилов, В.Н. Цапырин и А.В. Дороднов. Именно на этом семинаре определились основные направления научно-исследовательской деятельности коллектива, часть из которых продолжает развиваться в Казанском университете и в настоящее время.

Рассказ об основных направлениях алгебраических исследований в Казани начнем с истории решения Чеботаревым и его учеником Дородновым одной из знаменитых математических задач, известной со времен Древней Греции — задачи о гиппократовых луночках. Напомним условия этой задачи. Гиппократовы луночки — это серповидные фигуры, ограниченные дугами окружностей (см. рис.).

Луночка ограничена двумя дугами — полуокружностью с диаметром на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника ABC и дугой окружности с центром в C. При этом площадь заштрихованной луночки равна площади ABC. Квадрируемость луночки означает, что можно циркулем и линейкой построить квадрат, площадь которого равна площади луночки. В данном случае сначала строится треугольник — половина квадрата.

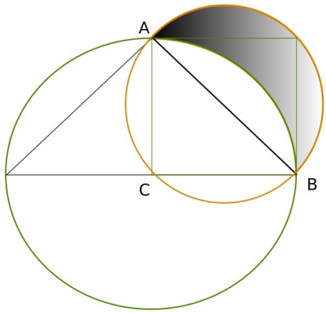


Рис.

Гиппократ нашел три квадрируемые луночки. Даниил Бернулли в “Математических упражнениях” (1724) указал условие, которому должны удовлетворять алгебраически квадрируемые луночки, и привел уравнение, дающее четвертую квадрируемую луночку. Немного позднее (1766) финский математик Уинквист и независимо от него Леонард Эйлер (1771) обнаружили ту же четвертую, и в дополнение к ней еще одну, пятую луночку. В 1840 году Томас Клаузен независимо обнаружил и исследовал те же два негиппократовых типа квадрируемых луночек. Более детально история задачи о луночках изложена в книге [7].

Современный подход к решению задачи о луночках, использующий теорию Галуа, был найден Чеботаревым в 1930-х годах (см. его книгу [91]).

Опишем вкратце идею доказательства. Решение задачи о луночках сводится к нахождению корней некоторого многочлена. Но из теории Галуа известен следующий результат.

Для того, чтобы корни неприводимого многочлена могли быть найдены построениями посредством циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы группа Галуа этого многочлена имела порядок, равный степени двойки.

Пусть a означает длину общей хорды луночки, α и β — величины центральных углов, соответствующих дугам, ограничивающим луночку. Тогда площадь рационально выразится через хорду и тригонометрические функции углов α и β. Отметим, что рассматривался только случай, когда α и β соизмеримы, т. е. $\alpha = m\theta$, $\beta = n\theta$, где m и n — взаимно простые натуральные числа. В конечном счете, как уже было сказано, все сводится к решению некоторого уравнения, явный вид которого можно найти в [7]. Задача о квадрируемости луночки теперь эквивалентна вопросу о том, когда группа Галуа этого многочлена (или неприводимого множителя левой части) имеет порядок, равный степени двойки. А это, в свою очередь, равносильно следующему вопросу: при каких комбинациях m и n такое возможно? Все известные, начиная с Гиппократа, к моменту написания книги Чеботарева случаи квадрируемости укладываются в описанную выше схему. Эти случаи следующие (в третьей колонке — размеры углов α и β):

$$\begin{array}{lll} m=2, & n=1 & (180^\circ : 90^\circ); \\ m=3, & n=1 & (205,6^\circ : 68,5^\circ); \\ m=3, & n=2 & (160,9^\circ : 107,2^\circ); \\ m=5, & n=1 & (234.4^\circ : 46.9^\circ); \\ m=5, & n=3 & (168.0^\circ : 100.8^\circ). \end{array}$$

Первые три случая найдены Гиппократом, остальные два случая впервые были указаны в середине XVIII века Эйлером и Уинквистом.

Чеботарев доказал, что при нечетных m и n квадрируемыми луночками будут только те, у которых $m = 3$, $n = 1$, или $m = 5$, $n = 1$ либо $n = 3$. Остальные случаи рассмотрел Дороднов [13]–[15]. Им было показано, что при сделанных предположениях относительно α и β других квадрируемых с помощью циркуля и линейки луночек не существует.

Дородновым была также (частично) решена более общая задача, о квадрируемости с помощью конических сечений. На язык теории Галуа эта задача переводится следующим образом. Луночки, квадрируемые с помощью конических сечений, соответствуют тем значениям m и n, для которых группа Галуа соответствующего уравнения, или какого-нибудь неприводимого множителя его левой части, имеет порядок $2^u 3^v$.

Дороднов, используя метод Чеботарева, нашел пятнадцать случаев квадрируемости, включая пять упомянутых выше случаев для циркуля и линейки. Вот эти случаи:

m	n	m	n	m	n
2	1	5	1	7	3
3	1	5	2	7	5
3	2	5	3	9	1
4	1	5	4	9	5
4	3	7	1	9	7

В дальнейшем несколько новых случаев квадрируемости с помощью конических сечений обнаружил Л.М. Беркович, ученик Дороднова [8]. Современное изложение результатов Чеботарева и Дороднова содержится в 16-й главе книги М.М. Постникова [57].

В круге интересов Чеботарева большое место занимали вопросы, связанные с проблемой Рауса–Гурвица. В частности, аспиранту Мейману был поставлен вопрос об R-продолжаемости полиномов. Полином называется R-продолжаемым, если он допускает такое дописывание старших членов, чтобы у полученного после дописывания полинома все корни были вещественными. Оказалось, что условия, необходимые и достаточные для R-продолжаемости, не выражаются конечным числом неравенств, налагаемых на коэффициенты, и потому проблема представила особую трудность. Тем не менее Мейман придумал алгоритм, позволяющий решить задачу конечным числом действий. В своих исследованиях он рассматривал выпуклые тела в многомерных пространствах. За представленную Мейманом диссертацию ему была присуждена сразу степень доктора физико-математических наук.

В классической постановке проблема Рауса–Гурвица состоит в нахождении условий на коэффициенты полинома, при которых его корни имеют отрицательные вещественные части. Позднее в связи с нуждами автоматического регулирования и радиотехники вопрос, аналогичный проблеме Рауса–Гурвица, стал актуальным для квазиполиномов и целых функций вообще. В этой области Чеботаревым и Мейманом были получены фундаментальные результаты, описанные в книге [92]. Впоследствии Мейман много сотрудничал с физиками (см. [6]). За математические работы, связанные с созданием атомной бомбы, он, совместно с Л.Д. Ландау и И.М. Халатниковым, получил Сталинскую премию 2-й степени.

Интерес к теории групп Ли, который у Чеботарева проявился в 1930-е годы, дал толчок к развитию этого направления в Казанском университете.

Первым казанским аспирантом Чеботарева был Адо. Результатом научных изысканий Адо стало доказательство существования точного конечномерного представления у любой конечномерной алгебры Ли[1] над полем нулевой характеристики (другими словами, конечномерную алгебру Ли можно реализовать в виде подалгебры матричной алгебры Ли). Этот вопрос возник еще у Софуса Ли в связи с доказательством так называемой третьей (обратной) фундаментальной теоремы, заключающейся в том, что каждая конечномерная алгебра Ли есть алгебра Ли некоторой (локальной) группы Ли. Однако Ли обосновал существование точного представления только в случае, когда алгебра Ли имеет тривиальный центр, и в полной общности вопрос оставался открытым [2]. Теорема Адо позволяет доказать также глобальный вариант третьей теоремы Ли, известной как теорема Картана. В более точной формулировке: категория связных односвязных групп Ли эквивалентна категории конечномерных вещественных алгебр Ли.

Неудивительно, что результаты Адо, опубликованные в [1], получили всемирное признание. При защите кандидатской диссертации в 1935 г. ему была сразу присуждена ученая степень доктора физико-математических наук. Впоследствии было дано несколько доказательств теоремы Адо разными математиками, а сам Адо вернулся к этой теме еще раз в работе 1947 г. [2]. Помимо этого, Адо опубликовал ряд статей о строении абстрактных групп и представлениях конечных групп, но в дальнейшем сосредоточился на преподавательской деятельности.

Владимир Владимирович Морозов, другой ученик Чеботарева, имел разносторонние математические интересы, но и его главные научные достижения связаны с теорией групп и алгебр Ли. Задача, предложенная ему Чеботаревым, заключалась в описании

[1] Термин "алгебра Ли" был введен в 1934 г. Г. Вейлем. Вместо него употреблялся термин "инфинитезимальная группа Ли", причем первое слово для краткости часто опускалось, хотя имелись в виду именно алгебры, а не группы Ли.

[2] По этой причине первое доказательство третьей теоремы Ли было применимо не всегда. Сам Ли привел два других доказательства, которые не опираются на представление алгебры Ли матрицами. Разумеется, в формулировке Ли речь шла не об алгебрах Ли, а о наборах структурных констант, связанных тождеством Якоби.

примитивных групп преобразований. Эта задача и послужила мотивацией для обеих диссертаций Морозова.

Транзитивное действие некоторой группы на множестве называется примитивным, если это множество нельзя представить нетривиальным образом в виде дизъюнктного объединения подмножеств, переставляемых между собой каждым элементом группы. Это равносильно тому, что стабилизаторы точек множества являются максимальными подгруппами. В локальной постановке, восходящей к Софусу Ли, задача сводится к нахождению максимальных подалгебр конечномерных алгебр Ли[1].

Основные результаты кандидатской диссертации Морозова опубликованы в статье [46]. В этой работе Морозов полностью исследовал соответствующие примитивным группам преобразований пары (G, G_1), состоящие из конечномерной алгебры Ли G и ее максимальной подалгебры G_1, в случае, когда G имеет нетривиальный разрешимый радикал, а также в случае, когда G полупроста, но не проста.

Принципиальную трудность доставляет случай простой алгебры Ли. Здесь Морозов получил описание максимальных регулярных подалгебр при некоторых дополнительных предположениях. Напомним, что максимальная подалгебра является регулярной, если она содержит некоторую картановскую подалгебру исходной алгебры Ли.

Это была первая работа, в которой для описания примитивных групп применена структурная теория алгебр Ли, созданная усилиями Киллинга и Картана. В конце статьи Морозов перечисляет примитивные группы преобразований пространств размерности до четвертой включительно. В случае прямой, плоскости и трехмерного пространства эти группы были найдены еще Софусом Ли[2]. Перечисление этих групп для четырехмерного пространства было целью предшествующей работы Морозова [45], в которой были применены более грубые методы. Как отмечает сам Морозов, в [45] он исходил из достаточного условия примитивности, которое, вообще говоря, не является необходимым, и

---

[1] На самом деле требуется также реализация алгебры Ли векторными полями, т.е. инфинитезимальными операторами в старой терминологии, а условие, что действие группы точное означает, что подалгебра, соответствующая стабилизатору точки, не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли.

[2] Ли исследовал также импримитивные группы преобразований, но в трехмерном случае полного списка этих групп, по-видимому, им опубликовано не было.

при этом два типа групп оказались пропущенными вследствие ошибок вычислений.

Забегая на два десятилетия вперед, скажем, что импримитивные транзитивные группы преобразований четырехмерного пространства рассмотрел Я.И. Заботин, один из учеников Морозова. В статье [31] перечислены полупростые импримитивные группы, а в [32] — неразрешимые импримитивные группы, подгруппы Леви которых действуют в пространстве транзитивно[1]. По всей видимости, в размерности 4 достигнут предел, где можно пытаться осмыслить весь список групп преобразований.

Итоговым результатом докторской диссертации Морозова явилось перечисление, в виде серии таблиц, неполупростых максимальных подалгебр всех простых комплексных алгебр Ли. Диссертация была защищена в 1943 г., еще до того как в обиход вошел язык простых корней и диаграмм Дынкина. По этой причине формулировка ответа была не настолько элегантной, как это впоследствии было сделано Ф.И. Карпелевичем [33]. Ключевую роль в диссертационном исследовании Морозова сыграла теорема регулярности, согласно которой любая неполупростая максимальная подалгебра полупростой алгебры Ли регулярна, т. е. содержит какую-нибудь картановскую подалгебру этой алгебры Ли. Первое доказательство теоремы регулярности было технически сложно, и только в 1956 г. Морозов существенно упростил его [49].

Докторская диссертация Морозова не была опубликована, но знакомство с ней стало возможным благодаря экземпляру диссертации, сохранившемуся у родственников Морозова. Содержание диссертации обсуждается в кратком очерке Ю.Б. Ермолаева [25], а в статье Э.Б. Винберга и Д.И. Панюшева [121] проанализированы также доказательства содержащихся там результатов. Как отмечено в [121], некоторые утверждения были переоткрыты и опубликованы уже другими известными математиками спустя годы. В частности, в диссертации приводятся, правда без какого-либо обоснования, таблицы полупростых максимальных регулярных подалгебр простых алгебр Ли. Как подтверждено последующими исследованиями, эти таблицы абсолютно точны. Что же

[1] Интересно отметить, что Заботин, следуя традиции, по сути отождествляет алгебру Ли с группой Ли, хотя его публикации относятся к концу 1950-х годов.

касается нерегулярных максимальных подалгебр, то они были описаны А.И. Мальцевым [44] для классических типов $A_n - D_n$ алгебр Ли, а в общем случае — Е.Б. Дынкиным в статье 1952 г. [16]. Тем самым перечисление максимальных подалгебр было завершено.

Несколько важных результатов из текста докторской диссертации все же были опубликованы самим Морозовым за год до защиты. Один из них, известный в наше время как теорема Джекобсона–Морозова[1], утверждает, что любой ненулевой нильпотентный элемент полупростой алгебры Ли можно включить в так называемую sl_2-тройку, т. е. тройку элементов, образующих стандартный базис простой трехмерной подалгебры. Используя этот результат, Морозов показал в заметке [47], что каждая разрешимая подалгебра S полупростой алгебры Ли L приводится к треугольному виду в том смысле, что найдутся картановская подалгебра H и регулярный элемент $h_0 \in H$ такие, что в терминах корневого разложения алгебры L относительно H выполнено включение

$$S \subset H + \sum_{\alpha \in R,\ \alpha(h_0)>0} L_\alpha \,,$$

где R — соответствующая система корней. По существу, это равносильно утверждению о сопряженности всех максимальных разрешимых подалгебр[2], известному как теорема Бореля–Морозова.

В 1960 г. Морозов опубликовал новое доказательство теоремы о нильпотентном элементе [51]. По всей видимости, для Морозова этот результат был только вспомогательным средством, используемым в доказательстве теоремы регулярности. Однако его значение выходит далеко за рамки этого применения. Теорема Джекобсона–Морозова лежит в основе классификации нильпотентных элементов простых алгебр Ли (а также унипотентных элементов соответствующих групп), которой занимались многие математики. Изложению этой теории посвящена монография [102].

Нильпотентные элементы нашли важные применения в теории представлений. С каждым примитивным идеалом I универсальной обертывающей алгебры простой алгебры Ли L связывается ассоциированное многообразие $V(I)$, которое представляет собой

[1] Н. Джекобсон обратил внимание на пробел в доказательстве первой теоремы о нильпотентном элементе из работы [47] и предложил собственное короткое доказательство.

[2] Максимальные разрешимые подалгебры принято называть борелевскими.

замкнутое в топологии Зарисского подмножество двойственного к L пространства L^*. В силу теоремы, доказанной А. Йозефом [115], многообразие $V(I)$ является замыканием одной нильпотентной орбиты действия присоединенной группы, при отождествлении L^* с L, доставляемом формой Киллинга. Таким образом, классификация нильпотентных элементов оказывается необходимой для описания примитивных идеалов.

В статье 1958 г. [50] Морозов изложил классификацию нильпотентных алгебр Ли вплоть до размерности шесть над произвольным полем характеристики 0, не обязательно алгебраически замкнутым. Его метод основан на том, что максимальный абелев идеал нильпотентной алгебры Ли является точным модулем для факторалгебры по этому идеалу. Наиболее трудоемое случай, когда максимальный абелев идеал 6-мерной нильпотентной алгебры Ли имеет размерность 4. В статье перечисляются все алгебры Ли нильпотентных линейных преобразований 4-мерного пространства, что позволяет найти и структурные константы всех возможных 6-мерных нильпотентных алгебр Ли указанного типа. На последнем этапе исследуется, какие пары алгебр Ли из найденного списка изоморфны друг другу.

В конце статьи Морозов привел таблицы 6-мерных комплексных нильпотентных алгебр Ли из работы К.А. Умляуфа 1891 г., которую Морозов назвал библиографической редкостью. В таблицах Умляуфа алгебры Ли разделены по размерности центра, так что использовался другой подход к их перечислению. Сравнивая эти таблицы со списком Морозова, можно заметить, что в них присутствует большое число изоморфных пар алгебр.

Исследование структур алгебр Ли малой размерности было продолжено Г.М. Мубаракзяновым и Э.Н. Сафиуллиной, учениками Морозова. В статьях [52], [53] были классифицированы вещественные алгебры Ли размерности 4 и 5, а в [54] — все разрешимые вещественные алгебры Ли размерности 6 за исключением случая, когда максимальный нильпотентный идеал имеет размерность 4. Некоторые результаты, применимые в том числе и к оставшемуся неразобранным в [54] случаю, приведены в [55]. Наконец, в [59] рассматривались нильпотентные алгебры Ли размерности 7.

С увеличением размерности алгебр Ли трудности их явного перечисления несоизмеримо возрастают, и приходится иметь дело с параметрическими семействами алгебр. Тем не менее эта тематика продолжала и дальше интересовать некоторых математиков, хотя в Казани этим никто больше не занимался. В 1989 г. таблицы 7-мерных нильпотентных алгебр Ли были опубликованы в статьях [98], [127]. Сравнение результатов этих двух работ затруднительно ввиду того, что в них перечисление алгебр Ли основывалось на разных наборах инвариантов, а проверка также не представляется возможной ввиду большого числа типов алгебр и отсутствия какого-либо обоснования. В обзоре [107] М. Гозе и Ю. Хакимджанов высказали мнение, что имеющиеся таблицы 7-мерных нильпотентных алгебр Ли могут содержать погрешности.

В 1950–60-е годы Морозов работал со многими студентами и аспирантами. Исследования Заботина, Мубаракзянова и Сафиуллиной уже были упомянуты. В статье [95] Л.Д. Эскин, другой ученик Морозова, указал способ построения операторов Лапласа на унимодулярной комплексной группе. Следуя терминологии, введенной И.М. Гельфандом, под операторами Лапласа понимались инвариантные дифференциальные операторы, соответствующие центральным элементам универсальной обертывающей алгебры. С использованием этих результатов в другой заметке Эскина [96] были получены формулы для матричных элементов унитарных представлений класса I основной серии группы Лоренца. В последующие годы Эскин применил методы теории Ли к исследованию задач математической физики.

Е.Л. Столов, ученик Эскина, также изучал матричные элементы унитарных представлений и связанные с ними специальные функции. В [75] им найдены выражения, в виде интегралов Фурье, матричных элементов представлений основной серии класса I группы $SL(2,\mathbb{C})$ на диагональных матрицах с вещественными положительными диагональными элементами, а также найдены старшие члены их асимптотик. В [76], [77] исследовались специальные функции, возникающие в случае представлений группы $SO(n)$.

Как Чеботарев, так и Морозов исходили из классического понимания теории Ли, в рамках которого изучались группы и алгебры, комплексные или вещественные. Но после того как немецкий математик Э. Витт обнаружил[1] первый пример простой алгебры Ли положительной характеристики, не имеющей аналогов среди конечномерных алгебр Ли в характеристике 0, алгебры Ли над полями характеристики $p > 0$ стали рассматривать Н. Джекобсон и Х. Цассенхауз. Постепенно ими стали интересоваться и другие математики, преимущественно в США. Так родилась теория модулярных алгебр Ли, как ее стали именовать в более позднее время.

Морозов осознавал этот тренд в развитии лиевой теории. В 1952 г. А.В. Сульдин, еще один ученик Морозова, доказал аналог теоремы Адо над полями характеристики p [78]. Впрочем, приоритет здесь принадлежит не ему. Четырьмя годами ранее японский математик К. Ивасава опубликовал новое доказательство существования точного конечномерного представления, в котором был разобран также модулярный случай [111]. В другой заметке 1954 г. [79] Сульдин показал, что размерности неприводимых представлений конечномерной модулярной алгебры Ли ограничены некоторым числом, зависящим только от характеристики поля и структуры алгебры Ли. Более глубоко общие свойства представлений модулярных алгебр Ли были исследованы Цассенхаузом в работе, опубликованной в том же году [134].

Упомянутые выше ученики Морозова, защитив кандидатские диссертации, со временем отошли от алгебраической тематики, но продолжили успешную карьеру в других областях математики. Тем не менее, с конца 1960-х годов на кафедре алгебры начала формироваться группа ученых, основным направлением деятельности которой стала теория модулярных алгебр Ли. Костяк этой группы составили А.Х. Долотказин и Ю.Б. Ермолаев, также ученики Морозова. Позднее к исследованиям в этой области присоединились М.Ю. Целоусов, Г.О. Эльстинг, Н.А. Корешков и С.М. Скрябин, ученики Долотказина.

К середине 1960-х годов было известно много примеров простых конечномерных модулярных алгебр Ли, не появляющихся

[1] Согласно устному преданию это произошло ранее 1937 г.

в характеристике 0, и казалось, что эти примеры не подчиняются никакой закономерности. Перелом наступил, когда московские математики А.И. Кострикин и И.Р. Шафаревич выяснили, что все известные неклассические простые алгебры Ли допускают единообразное описание как модулярные аналоги четырех серий бесконечномерных комплексных алгебр Ли W_n, S_n, H_n и K_n, соответствующих бесконечномерным примитивным псевдогруппам преобразований, которые были классифицированы Э. Картаном в начале 20-го века.

Первоначально это наблюдение касалось только так называемых p-алгебр Ли[1], в которых помимо лиевского умножения имеется дополнительная операция возведения в p-ю степень. Но в статье 1969 г. все четыре серии градуированных модулярных алгебр Ли картановского типа уже были введены в общем случае [40]. Была сформулирована гипотеза, согласно которой любая простая конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 5$ является или классической алгеброй, или фильтрованной деформацией некоторой градуированной алгебры Ли картановского типа[2]. Под классическими алгебрами понимаются модулярные аналоги простых конечномерных комплексных алгебр Ли всех типов $A_n - G_2$. С появлением гипотезы Кострикина–Шафаревича задача классификации простых конечномерных алгебр Ли стала наиболее актуальной в модулярной теории.

Алгебры Ли, построенные в [40], снабжены стандартными градуировками, и термин "градуированная алгебра Ли картановского типа" понимается именно в этом смысле. Их фильтрованные деформации были описаны В.Г. Кацем [34] совершенно аналогичным образом как подалгебры в конечномерных алгебрах Ли общего картановского типа W, но характеризуемые своим действием на формы объема, гамильтоновы и контактные формы более общего вида по сравнению с теми, что были использованы в [40]. Некоторые результаты этой работы были впоследствии уточнены. Таким образом, возникает более широкий класс модулярных

[1] Как синоним употребляют термин "ограниченная алгебра Ли".

[2] Это обобщение первого варианта гипотезы Кострикина–Шафаревича, в котором речь шла только о простых p-алгебрах Ли.

алгебр Ли картановского типа, снабженных стандартными фильтрациями. Эти алгебры во многом непохожи на классические алгебры, и в то время их свойства еще не были хорошо изучены. С этим связано еще одно направление деятельности в модулярной теории.

Под влиянием новых идей Морозов предложил Долотказину заняться модулярными алгебрами Ли ранга 1 (это алгебры Ли, содержащие картановскую подалгебру размерности 1)[1]. К тому времени И. Капланский доказал в [116] ряд общих фактов о корневых пространствах L_α алгебры Ли L относительно 1-мерной картановской подалгебры H. Опираясь на них Р.Е. Блок установил, что в случае алгебраически замкнутого поля характеристики $p > 3$ любая такая алгебра Ли размерности больше 3 и с невырожденными спариваниями $L_\alpha \times L_{-\alpha} \to H$, возникающими из лиевского умножения, принадлежит известному классу алгебр Ли, называемых алгебрами Алберта–Цассенхауза[2] [101].

В статьях [11], [12] Долотказин обобщил, также при $p > 3$, несколько результатов Капланского на случай, когда $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \neq 0$ для всех ненулевых корней α, отказываясь от условия невырожденности спариваний между L_α и $L_{-\alpha}$. В частности, для такой алгебры Ли размерности больше 3 было показано, что корни образуют аддитивную группу. Существенно более точное описание этих алгебр Ли было получено в случае, когда все корни являются целочисленными кратными одного корня. Было показано, что любая p-алгебра Ли из рассматриваемого класса либо трехмерна, либо является полупрямым произведением p-мерной алгебры Витта и ее полупростого модуля.

Первые работы Ермолаева были посвящены приведению к каноническому виду пары форм [17], [18]. Однако в 1970-е годы он приступает к исследованиям в области модулярных алгебр Ли. В [19] им было дано исчерпывающее описание алгебр Ли ранга 1 над произвольным полем характеристики $p > 2$ в предположении, что алгебра Ли совпадает со своим коммутантом и содержит регулярный элемент, все корни которого лежат в простом

[1] Следует иметь в виду, что модулярная теория кардинально отличается от теории в характеристике 0. В частности, конечномерная алгебра Ли может иметь картановские подалгебры разной размерности.

[2] Все эти алгебры являются алгебрами картановского типа.

поле из p элементов. В отличие от результатов, полученных Долотказиным, присоединенное действие регулярного элемента не предполагалось диагонализируемым.

Вопрос о полной классификации простых алгебр Ли ранга 1 оказался весьма трудным. Он был решен при $p > 7$ в работе Дж.М. Бенкарт и Дж.М. Осборна [100], причем им потребовалась детальная информация о представлениях алгебр Ли, найденных Ермолаевым в упомянутой статье [19].

В серии публикаций, оформленных в виде кратких сообщений, Ермолаев рассмотрел класс градуированных алгебр Ли, названных им моногенными. Полученные результаты подытожены в [24]. В этой статье накладываются достаточно естественные, с позиций классификации, условия[1] на градуированную алгебру Ли $L = \bigoplus_{i=-q}^{r} L_i$. По каждому набору $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ однородных элементов, образующих базис подалгебры, натянутой на компоненты L_i степени $i < 0$, определяется число

$$r_0(e) = \sum_{i=1}^{n} s_i(p^{m_i} - 1) - q,$$

где $s_i = -\deg e_i$, а m_i — наименьшее натуральное число такое, что $e_i^{p^{m_i}}$ лежит в центре универсальной обертывающей алгебры. Пусть r_0 — наименьшее значение величин $r_0(e)$. Тогда $r \leq r_0$. При $p > 2$ и незначительных ограничениях снизу на степени p^{m_i}, в теореме 1, сформулированной для случая $q = 1$, утверждается, что L является алгеброй картановского типа, если $r = r_0$, или $r = r_0 - 1$, или $r = r_0 - 2$. Кроме того, неравенства $r_0 - P_{\min} + 4 \leq r \leq r_0 - 3$, где $P_{\min}$ — наименьшее среди чисел $p^{m_1}, \ldots, p^{m_n}$, выполняться не могут. Теорема 2 содержит похожие утверждения для случая $q = 2$. По всей видимости, подробные доказательства этих результатов опубликованы не были.

Результат того же типа для простых градуированных алгебр Ли L глубины $q = 1$ при $p > 5$ был опубликован, также без подробных доказательств, Эльстингом [94]. В теореме 1 этой работы утверждается, что если градуировка алгебры L является длинной, то L изоморфна одной из градуированных алгебр Ли картановского типа W, S, или H. Градуировка была названа длинной,

[1] В первоначальном определении моногенной алгебры, данном в предшествующих статьях, требовалась неприводимость L_0-модуля L_r, а не L_{-1}, как в [24].

если $r \geq r_0 - P_{\min} + 2$, в обозначениях из вышеупомянутых работ Ермолаева. Как следствие, в предположениях этой теоремы выполняется неравенство $r \geq r_0 - 2$.

Перейдем теперь к исследованиям, посвященным изучению модулярных алгебр Ли картановского типа. Для того чтобы не перегружать изложение техническими деталями, ограничения на характеристику p далее указываться не будут.

М.Ю. Целоусов дал описание дифференцирований градуированных алгебр Ли картановского типа [90]. Для всего класса алгебр Ли картановского типа это было сделано значительно позже М.И. Кузнецовым с использованием техники коиндуцированных модулей [42]. К сожалению, Целоусов трагически погиб вскоре после начала своей работы на кафедре алгебры.

В [20], [21] Ермолаев нашел в явном виде нетривиальный центральный элемент универсальной обертывающей алгебры алгебры Витта $W_1(1)$, а также соотношение целой зависимости над p-центром[1], которому удовлетворяет этот элемент. В [22], [23] эти результаты были обобщены на алгебры Ли $W_1(r)$, изоморфные алгебрам Цассенхауза. В этом случае имеется r нетривиальных центральных элементов, которые вместе с p-центром порождают весь центр универсальной обертывающей алгебры. Кроме того, Ермолаев дал описание подалгебр инвариантных[2] элементов симметрических алгебр этих алгебр Ли.

Корешков предложил способ построения серий центральных элементов в универсальных обертывающих алгебрах p-алгебр Ли картановского типа с использованием нелиевых $\mathbb{Z}$-форм этих алгебр Ли [38], [39].

В работе С.М. Скрябина [131] было дано описание подалгебры инвариантных элементов симметрической алгебры пуассоновой p-алгебры Ли размерности p^{2n}. Тривиальными инвариантами являются p-е степени элементов. Вся алгебра инвариантов в рассматриваемом случае порождается над своей тривиальной частью набором из p^n однородных элементов. При этом инварианты, степени не делящейся на p, из этого набора поднимаются до центральных элементов в универсальной обертывающей алгебре, в то время как про другие инварианты это неизвестно. В [131]

[1] Под p-центром универсальной обертывающей алгебры $U(L)$ модулярной алгебры Ли L понимается подалгебра в $U(L)$, порожденная центральными элементами из p-оболочки L.

[2] Имеются в виду инварианты относительно присоединенного действия алгебры Ли.

были исследованы также инварианты относительно группы автоморфизмов пуассоновой алгебры. Полученные результаты могут быть переформулированы для гамильтоновой алгебры Ли, центральным расширением которой является пуассонова алгебра.

За исключением случая, исследованного Ермолаевым, для других алгебр Ли картановского типа до сих пор имеется мало информации о центрах их универсальных обертывающих алгебр. Изучение центров остается трудной задачей, к полному решению которой пока еще не найдено подходов.

В своих более ранних работах Корешков занимался представлениями простых p-алгебр Ли картановского типа и их максимальных подалгебр минимальной коразмерности [35]–[37]. Неприводимые L-модули высоты 1, т. е. те, в которых член L_1 стандартной убывающей фильтрации (L_i) действует нильпотентно, были исследованы Я.С. Крылюком [41][1]. Почти все они индуцированы[2] с неприводимых L_0-модулей, а небольшое число исключительных модулей выделено для каждого картановского типа. Неприводимые L-модули высоты $r > 1$ также оказываются индуцированными с подалгебры L_0, если r ограничено некоторой константой, зависящей от L. При больших значениях r ситуация становится неоднозначной и не поддающейся исчерпывающему анализу, что можно объяснить тем, что существенную роль начинает играть действие в модуле центра универсальной обертывающей алгебры. Путем трудоемких вычислений Корешков исследовал неприводимые представления p-алгебр Ли H_2 и W_2. В депонированных статьях рассматривались также p-алгебры Ли W_n, S_n и H_n.

В кандидатской диссертации Скрябина, подготовленной под руководством А.И. Кострикина, был развит теоретико-кольцевой подход к классу алгебр Ли картановского типа, охватывающему как модулярный случай, так и алгебры Ли векторных полей на многообразиях. Были исследованы условия, обеспечивающие простоту этих алгебр. Позднее результаты были обобщены в публикации [128], где дается описание идеалов алгебр Ли из рассматриваемого класса.

---

[1] В результатах Крылюка L — градуированная алгебра Ли картановского типа, но не обязательно p-алгебра.

[2] Имеется в виду усеченное индуцирование, дающее фактормодуль полного индуцированного модуля, в котором все элементы p-центра универсальной обертывающей алгебры действуют как скалярные операторы.

Были классифицированы гамильтоновы формы с коэффициентами в алгебрах разделенных степеней, и тем самым получена параметризация простых модулярных алгебр Ли гамильтонова типа [72]. Неразложимые гамильтоновы формы разбиваются на классы, определяемые достаточно сложным дискретным множеством параметров. Каждый из этих классов содержит либо только эквивалентные формы, либо семейство форм, классы эквивалентности которых зависят от одного параметра из основного поля. Представление произвольной гамильтоновой формы в виде суммы неразложимых форм от непересекающихся групп переменных единственно с точностью до эквивалентности слагаемых.

Как известно, параметризация модулярных алгебр Ли других картановских типов намного проще. В частности, все алгебры Ли серий W и K обладают стандартными градуировками, т. е. нетривиальных фильтрованных деформаций для этих типов вообще не существует. Это не означает жесткости этих алгебр по отношению к произвольным деформациям (см. А.С. Джумадильдаев [10]).

В статье [129] было завершено описание форм модулярных алгебр Ли картановского типа над алгебраически незамкнутыми полями. Итоговый результат состоит в том, что эти алгебры сами являются алгебрами картановского типа в смысле уже упомянутого теоретико-кольцевого обобщения. Они реализуются дифференцированиями конечномерных коммутативных ассоциативных алгебр, не содержащих нетривиальных идеалов, устойчивых относительно действия всей алгебры Ли. Тем самым класс модулярных алгебр Ли картановского типа еще более обобщается.

Расщепление алгебр происходит, вообще говоря, над несепарабельными расширениями поля, в силу чего стандартная техника нахождения форм алгебр, основанная на когомологиях Галуа, здесь неприменима. Была использована техника строго плоского спуска, что потребовало рассмотрения алгебр Ли, получаемых расширением поля до какого-либо коммутативного кольца. Доказанная в [129] теорема об изоморфизмах этих алгебр Ли картановского типа над коммутативными кольцами играет ключевую роль. Изоморфизмы даются стандартной, в определенном смысле, конструкцией, но в характеристиках 2 и 3 возникают исключения, некоторые из которых были рассмотрены. Полученные результаты составили содержание докторской диссертации, защищенной в 1999 г.

За истекший период времени основная цель теории модулярных алгебр Ли была достигнута. Гипотеза Кострикина–Шафаревича для p-алгебр Ли была доказана Р.Е. Блоком и Р.Л. Уилсоном, после чего Х. Штраде в серии работ справился с неограниченными алгебрами Ли, а в совместных работах А. Премета и Х. Штраде классификация простых алгебр Ли была распространена на характеристики 5 и 7. Трехтомная монография Х. Штраде [132] подвела итог этой деятельности.

Что касается классификации простых алгебр Ли над полями характеристики 2 и 3, то здесь были сделаны только первые шаги, и возможность полного решения этой проблемы в настоящее время не просматривается. Несколько результатов Скрябина, целиком посвященных алгебрам Ли малой характеристики, опубликованы в [73], [74], [130].

Можно без преувеличения сказать, что Морозов был одним из инициаторов исследований по теории модулярных алгебр Ли в нашей стране, а сотрудники кафедры внесли большой вклад в ее разработку. Отметим, что результаты, полученные самим Морозовым, представляют интерес и для модулярной теории, что демонстрирует совсем свежая работа А. Премета [122].

В последние годы Корешков занимался пучками ассоциативных и лиевых структур, а Скрябин переключился на алгебры Хопфа. Конкретные примеры алгебр Хопфа возникают естественным образом в теории Ли, и поэтому изучение алгебр Хопфа в более общем контексте может рассматриваться как развитие теории Ли в ином направлении.

В 2012 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему “Инварианты действия конечномерной алгебры Хопфа на алгебрах специального вида” М.С. Еряшкин, ученик Скрябина. Основные результаты диссертации были опубликованы в [26], [27], относительно недавно они были существенно усилены в [28], [29]. Еряшкин изучал вопрос о целой зависимости ассоциативной алгебры, удовлетворяющей полиномиальному тождеству, над подалгеброй элементов, инвариантных относительно действия конечномерной алгебры Хопфа.

Развитие классических направлений алгебры, представленное в настоящем обзоре, во многих случаях предполагает утонченное использование матричной техники. «Чистой» теории матриц посвящена работа Морозова [48]. Впоследствии теорией матриц на кафедре алгебры занимались Ю.А. Альпин и С.Н. Ильин. Изучалась проблема обратимости матриц над полукольцами, описаны новые области локализации собственных значений, исследованы нормальные формы систем матриц, предложены критерии унитарного подобия и унитарной конгруэнтности матриц, некоторые результаты теории Перрона–Фробениуса неотрицательных матриц обобщены на полугруппы неотрицательных матриц [3]–[5].

Полиадическими числами занимался Е.В. Новоселов, ученик Морозова. Полиадические числа впервые появились в работе немецкого математика Х. Прюфера [124]. Конструкцию полиадических чисел предлагал также Дж. фон Нейман [120]. Кольцо полиадических чисел является прямым произведением колец целых p-адических чисел по всем простым числам. Новоселов определял кольцо полиадических чисел эквивалентным способом: множество целых чисел можно рассматривать как топологическое кольцо относительно метризуемой топологии, полная система окрестностей которой имеет вид $n + mZ$. Тогда кольцо полиадических чисел определяется как пополнение этого топологического кольца. Им была изучена арифметика колец полиадических чисел и построена теория меры и интеграла на таких кольцах. Разработанную теорию Новоселов применил в различных вопросах теории чисел, в частности, им были изучены проблемы, связанные с распределением значений арифметических функций. Результаты, полученные Новоселовым, подробно изложены в его монографии [56] и в книге А.Г. Постникова [58]. В настоящее время арифметические свойства полиадических чисел изучаются В.Г. Чирским и его учениками. Кольцо полиадических чисел под названием кольца целых универсальных чисел находит глубокие приложения в теории абелевых групп (П.А. Крылов, А.А. Фомин).

Морозов всегда стремился расширить тематику исследований. Благодаря ему на кафедре алгебры появилось новое направление — теория колец и модулей. Основная проблематика в области исследований по теории колец и модулей была сформирована во многом благодаря программе в области гомологической классификации колец, выдвинутой в 1961 г. Л.А. Скорняковым [70], [71]. Основная цель этой программы — исследовать связи между свойствами кольца и категории модулей над ним.

В 1960 г. Х. Басс [99] получил характеризацию колец, над которыми проективны все правые плоские модули. Такие кольца называются *совершенными справа* и имеют внутреннее описание, а именно, кольцо R является совершенным справа тогда и только тогда, когда R – полулокальное кольцо и его радикал Джекобсона T-нильпотентен справа, т. е. для всякой последовательности элементов $a_1, \dots, a_n, \dots$ из $J(R)$ существует такое k, что $a_k a_{k-1} \dots a_1 = 0$. В 60-е годы И.И. Сахаев, ученик Морозова, изучал кольца, над которыми каждый конечнопорожденный плоский правый модуль является проективным. Такие кольца в настоящее время называются правыми S-кольцами. Кольцам этого типа были посвящены многие работы, в частности, статьи С. Эндо [104] и В. Васкенселоса [136], рассматривавших коммутативные S-кольца, статьи Сахаева [60], [65], С. Йондрупа [113], совместные работы И.И. Сахаева, А. Факкини и Д. Херберы [105], [106]. Основные результаты о S-кольцах Сахаев получил с помощью развитой им техники работы с регулярными последовательностями. Последовательность $a_1, a_2, \dots$ элементов кольца R называется регулярной, если $a_{i+1} a_i = a_i$ для каждого $i = 1, 2, \dots$. В 1965 году Сахаев установил [60], что для произвольного кольца R проективность каждого n-порожденного плоского правого R-модуля эквивалентна стабилизации всякой цепочки правых идеалов

$$A_1 R_n \subseteq A_2 R_n \subseteq \dots \subseteq A_m R_n \subseteq \dots,$$

где A_m $(m = 1, 2, \dots)$ – регулярная последовательность $n \times n$ матриц над кольцом R. Ученик Сахаева Г.В. Чирков построил пример кольца, над которым каждый циклический плоский модуль является проективным, но не всякий конечнопорожденный плоский модуль обладает этим свойством [93].

В 1974 г. Д. Лазаром в статье [118] была выдвинута гипотеза о конечной порожденности каждого проективного модуля P, у которого фактор-модуль $P/PJ(R)$ конечнопорожден. Для коммутативных колец эта гипотеза была доказана самим Лазаром [118]. Справедливость этой гипотезы для PI-колец была установлена Йондрупом [114]. Сахаев показал, что гипотеза Лазара эквивалентна проективности всякого конечнопорожденного плоского правого R -модуля P, у которого фактор-модуль $P/PJ(P)$ является проективным $R/J(R)$-модулем [64]. Х. Цешингером [135] и независимо Сахаевым [67] для произвольного кольца R была установлена эквивалентность следующих двух условий:

(1) если для проективного правого R-модуля P фактор-модуль $P/PJ(R)$ является циклическим, то модуль P конечнопорожден;
(2) для любых элементов a и b из кольца R выполнена импликация
$ab = 0$ и $1 - (a + b) \in J(R) \Rightarrow b(a + b)^{-1}a = 0.$

В.Н. Герасимовым и Сахаевым был построен пример полулокального кольца, опровергающий гипотезу Лазара [9]. Ввиду принципиальной важности этого примера приведем основные этапы его построения. Пусть $R = F < x, y \mid yx = 0 >$ — алгебра над полем F, порожденная элементами x, y и с одним определяющим соотношением $yx = 0$. Рассмотрим гомоморфизм $\phi : R \to F \times F$, при котором $\phi(x) = (1, 0), \phi(y) = (0, 1)$. Пусть Σ — множество всех квадратных матриц над R, у которых образ под действием гомоморфизма ϕ является обратимым и R_Σ — универсальное Σ-обращающее R-кольцо. Тогда R_Σ — полулокальное кольцо без нетривиальных идемпотентов, $R_\Sigma/J(R_\Sigma) \cong F \times F$ и $J(R_\Sigma) = (1 - y_1)R_\Sigma \cap R_\Sigma(1 - x_1)$, где x_1, y_1 — образы элементов x, y соответственно в R_Σ. Причем $R_\Sigma(1 - x_1)$ и $(1 - y_1)R_\Sigma$ — единственные максимальные двусторонние (и односторонние) идеалы кольца R_Σ . Элементы x_1, y_1 удовлетворяют следующим условиям: $y_1x_1 = 0, 1 - (x_1 + y_1) \in J(R_\Sigma)$ и $x_1(x_1 + y_1)^{-1}y_1 \neq 0$. Из последних условий и результатов Цешингера и Сахаева следует, что кольцо R_Σ является контрпримером к гипотезе Лазара. Более точно, Сахаевым было показано, что над кольцом R_Σ правый проективный модуль $P = \bigcup_{i=1}^{\infty}(x_1 + y_1)^{-i-1}x_1(x_1 + y_1)^i R_\Sigma$ не является конечнопорожденным модулем и $P/J(P)$ — циклический модуль. Кольцо R_Σ в настоящее время называется кольцом

Герасимова–Сахаева [103]. В работе [105] показано, что кольцо R_Σ также является контрпримером к следующим гипотезам:

(1) если P — проективный модуль и $P/J(P)$ — простой модуль, то P — локальный модуль ([133]).
(2) если P — проективный модуль и $End(P)$ – полулокальное кольцо, то модуль P конечнопорожден ([119]).

Необходимое и достаточное условие, при котором проективный модуль с полулокальным кольцом эндоморфизмов является конечнопорожденным, было найдено в работе Х. Ломпа, М.Ф. Насрутдинова (ученика Сахаева) и И.И. Сахаева [43]. В статье [125] Г.Е. Пунинским на основе техники Сахаева и результатов Факкини был построен еще один контрпример к гипотезе Лазара. В последние годы результаты Сахаева получили развитие в работах Факкини, Херберы, Пунинского, Приходы. Отметим некоторые из результатов, полученных в последнее время. В работе [103] показано, что R_Σ – проективно-свободное кольцо, над которым каждый проективный правый модуль является прямой суммой копий модулей P и R_Σ . На основе техники Сахаева в работе [106] получено описание плоских модулей. В работе [123] Прихода показал, что каждый проективный правый R-модуль P, у которого $P/J(P)$ является циклическим, имеет вид $P = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i R$, где $p_1, p_2, \ldots \in P$ и для некоторого $r \in R$ имеют место равенства $p_{i+1} = p_i r (i \in \mathbb{N})$. Из вышеизложенного видно, что полулокальные кольца, построенные в работах Герасимова, Сахаева и Пунинского, дают примеры колец, для которых невыполнимы ряд классических утверждений. Методы Сахаева позволяют находить необходимые и достаточные условия, при которых соответствующие классические результаты имеют место.

Теории операд и их приложениям посвящены работы С.Н. Тронина – ученика Сахаева. Тронин под руководством Сахаева в 1989 г. защитил кандидатскую диссертацию “О ретракциях свободных алгебр и модулей”, где в качестве приложения развитых им общих методов изучения ретракций свободных алгебр было показано, что любой ретракт алгебры многочленов (т.е. проективная алгебра) над совершенным полем, имеющий размерность Крулля, равную двум, изоморфен кольцу многочленов от двух переменных [80]. Этот результат не улучшен до сих пор. В 1990-х годах. Тронин получил ряд результатов в разных разделах алгебры. В частности, им была найдена конструкция категорий частных, являющаяся обобщением колец частных Герасимова и Малколмсона [81]. С конца 1990-х гг. Тронин занимается исследованиями в области теории операд. Предложенный им подход основывается на более общем определении самого понятия операды, причем обобщение состоит в том, что вместо действия симметрических групп (что используется в абсолютном большинстве других исследований) берется действие морфизмов особых категорий, названных автором вербальными. Одним из частных случаев является категория с морфизмами — всевозможными конечными подстановками (случай традиционных симметрических операд). При этом других примеров вербальных категорий очень много, по крайней мере, континуум. Используя этот подход, было показано, что любое многообразие универсальных алгебр с точностью до рациональной эквивалентности есть многообразие алгебр над некоторой (обобщенной) операдой. Вербальные категории позволяют дать некоторую классификацию всех возможных типов тождеств в универсальной алгебре, причем эта классификация не зависит от выбора сигнатуры. В частности, класс многообразий линейных алгебр над линейными симметрическими операдами с точностью до рациональной эквивалентности совпадает с классом многообразий, определяемых полилинейными тождествами. Использование операд позволило также построить общую теорию (всех возможных) супералгебр и их представлений [82], [83]. По результатам этих исследований в 2011 г. Трониным была защищена докторская диссертация на тему “Операдные и категорные методы в теории многообразий универсальных алгебр” [84]. В последние несколько лет Тронин занялся исследованиями в области алгебраической криптографии.

В начале 90-х годов XX века Сахаевым было инициировано изучение слабо регулярных модулей и, в частности, колец, над которыми каждый модуль является слабо регулярным. В работах Х. Хакми, ученика Сахаева, были изучены проективные слабо регулярные модули и их кольца эндоморфизмов. В частности, им были описаны кольца, над которыми каждый проективный модуль имеет слабо регулярное кольцо эндоморфизмов [108]. Проблема описания колец, над которыми каждый правый модуль является слабо регулярным, рассматривалась в работах [85]–[88] и монографиях [89], [112]. Ее полное решение получено в работе А.Н. Абызова, ученика Сахаева, и А.А. Туганбаева [97].

Одной из классических проблем современной алгебры является гомологическая классификация колец, т. е. изучение связей между свойствами колец и категорий модулей над ними. Аналогичные задачи естественным образом возникают в теории полуколец и полумодулей. Исследованиям в этой области посвящен ряд работ С.Н. Ильина. В частности, в статье [30] получен полукольцевой аналог теоремы Капланского о коммутативных V-кольцах; в работе [109] полностью подтверждено высказанное Е.Б. Кацовым в статье [117] предположение об отсутствии односторонне совершенных полуколец, не являющихся кольцами; в совместной работе С.Н. Ильина и Е.Б. Кацова [110] дано решение полукольцевого аналога известной проблемы Серра о свободности всех проективных модулей для полиномиальных колец над полями.

Литература

[1] Адо И.Д. *О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных перестановок*, Изв. Казанского физ.-мат. о-ва **7** (3), 1–13 (1935).

[2] Адо И.Д. *Представления алгебр Ли матрицами*, Успехи матем. наук **2** (6), 159–173 (1947).

[3] Альпин Ю.А. *Границы для совместных спектральных радиусов неотрицательных матриц*, Матем. заметки **87** (1), 13–16 (2010).

[4] Al'pin Yu.A., Elsner L., Ikramov Kh.D. *On condensed forms for partially commuting matrices*, Linear Algebra Appl. **306**, 165–182 (2000).

[5] Альпин Ю.А., Альпина В.С. *Комбинаторная структура k-полупримитивных семейств матриц*, Матем. сб. **207** (5), 3–16 (2016).

[6] Аносов Д.В., Гинзбург В.Л., Жижченко А.Б., Монастырский М.И., Новиков С.П., Синай Я.Г., Соловьев М.А. *Наум Натанович Мейман (некролог)*, УМН **57** (2), 179–184 (2002).

[7] Белозеров С.Е. *Пять знаменитых задач древности (История и современная теория)* (Изд-во Ростовского ун-та, Ростов, 1975).

[8] Беркович Л.М. *О круговых луночках, квадрируемых при помощи конических сечений*, Учен. зап. Казан. ун-та. **117** (2), 7–10 (1957).

[9] Герасимов В.Н., Сахаев И.И. *Контрпример к двум гипотезам о проективных и плоских модулях*, Сиб. матем. журн. **25** (6), 31–53 (1984).

[10] Джумадильдаев А.С. *Деформации алгебр Ли $W_n(\mathbf{m})$*, Матем. сб. **180** (2), 168–186 (1989).

[11] Долотказин А.Х. *Алгебры Ли ранга один с ненулевым внутренним произведением, I*, Изв. вузов. Матем., № 4, 36–43 (1966).

[12] Долотказин А.Х. *Алгебры Ли ранга один с ненулевым внутренним произведением, II*, Изв. вузов. Матем., № 5, 70–77 (1966).

[13] Дороднов А.В. *Исследования по квадрируемым луночкам*, Дисс. ... канд. физ-матем. наук (Казань, 1940).

[14] Дороднов А.В. *О круговых луночках, квадрируемых с помощью конических сечений*, Изв. физ.-матем. об-ва при Казан. гос. ун-те. Сер. 3. **XIII**, 95–126 (1945).

[15] Дороднов А.В. *О круговых луночках, квадрируемых при помощи циркуля и линейки*, ДАН СССР. **LVIII** (6), 965–968 (1947).

[16] Дынкин Е.Б. *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли*, Матем. сб. **30** (2), 349–462 (1952).

[17] Ермолаев Ю.Б. *Одновременное приведение пары билинейных форм к каноническому виду*, ДАН СССР **132** (2), 257–259 (1960).

[18] Ермолаев Ю.Б. *Одновременное приведение симметрической и эрмитовой форм*, Изв. вузов. Матем., № 2, 10–21 (1961).

[19] Ермолаев Ю.Б. *Об алгебрах Ли ранга* 1 *с корневой системой в простом поле*, Изв. вузов. Матем., № 5, 38–50 (1972).

[20] Ермолаев Ю.Б. *Вычисление центрального элемента универсальной обертывающей алгебры алгебры Витта*, Изв. вузов. Матем., № 5, 20–26 (1975).

[21] Ермолаев Ю.Б. *Минимальный многочлен центрального элемента универсальной обертывающей алгебры алгебры Витта*, Изв. вузов. Матем., № 10, 32–41 (1976).

[22] Ермолаев Ю.Б. *О центральных элементах универсальной обертывающей алгебры алгебры Цассенхауза*, Изв. вузов. Матем., № 6, 73–88 (1978).

[23] Ермолаев Ю.Б. *О структуре центра универсальной обертывающей алгебры алгебры Цассенхауза*, Изв. вузов. Матем., № 12, 46–59 (1978).

[24] Ермолаев Ю.Б. *Алгебры Ли с моногенной градуировкой достаточно большой длины*, Изв. вузов. Матем., № 2, 60–63 (1984).

[25] Ермолаев Ю.Б. *Теорема регулярности В.В. Морозова*, Изв. вузов. Матем., № 10, 5–10 (1991).

[26] Еряшкин М.С. *Инварианты действия полупростой конечномерной алгебры Хопфа на алгебрах специального вида*, Изв. вузов. Матем., № 8, 14–22 (2011).

[27] Еряшкин М.С. *Кольца Мартиндейла и H-модульные алгебры, обладающие инвариантными характеристическими многочленами*, Сиб. матем. журн. **53** (4), 822–838 (2012).

[28] Еряшкин М.С. *Инварианты и кольца частных H-полупервичных H-модульных алгебр, удовлетворяющих полиномиальному тождеству*, Изв. вузов. Матем., № 5, 22–40 (2016).

[29] Еряшкин М.С. *Инварианты действия полупростой алгебры Хопфа на PI-алгебре*, Изв. вузов. Матем., № 8, 21–34 (2016).

[30] Ильин С.Н. *V-полукольца*, Сиб. матем. журн. **53** (2), 277–290 (2012).

[31] Заботин Я.И. *Полупростые транзитивные импримитивные группы четырехмерного комплексного пространства*, Изв. вузов. Матем., № 4, 67–79 (1958).

[32] Заботин Я.И. *О транзитивных импримитивных группах с радикалом в четырехмерном комплексном пространстве*, Изв. вузов. Матем., № 6, 73–85 (1958).

[33] Карпелевич Ф.И. *О неполупростых максимальных подалгебрах полупростых алгебр Ли*, ДАН СССР **76** (6), 775–778 (1951).

[34] Кац В.Г. *Описание фильтрованных алгебр Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли картановского типа*, Изв. АН СССР Сер. Матем. **38**, 800–838 (1974).

[35] Корешков Н.А. *О неприводимых представлениях гамильтоновой алгебры Ли размерности* $p^2 - 2$, Изв. вузов. Матем., № 10, 37–46 (1978).

[36] Корешков Н.А. *О неприводимых представлениях p-алгебры Ли* W_2, Изв. вузов. Матем., № 4, 39–46 (1980).

[37] Корешков Н.А. *О неприводимых представлениях максимальных подалгебр алгебр Ли картановского типа*, Изв. вузов. Матем., № 11, 26–32 (1986).

[38] Корешков Н.А. *Центральные элементы алгебры* $U(K_m)$, Изв. вузов. Матем., № 5, 16–22 (1991).

[39] Корешков Н.А. *Об одном инварианте алгебры* W_n, Изв. вузов. Матем., № 10, 40–42 (1991).

[40] Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики*, Изв. АН СССР Сер. Матем. **33**, 251-322 (1969).

[41] Крылюк Я.С. *Алгебры картановского типа: продолжения и представления*, Дисс. ... канд. физ-матем. наук (МГУ, Москва, 1978).

[42] Кузнецов М.И. *Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p*, Изв. АН СССР Сер. Матем. **53**, 557–589 (1989).

[43] Ломп Х., Насрутдинов М.Ф., Сахаев И.И. *О проективных модулях с полулокальным кольцом эндоморфизмов*, Изв. вузов. Матем., № 8, 23–29 (2002).

[44] Мальцев А.И. *О полупростых подгруппах групп Ли*, Изв. АН СССР Сер. Матем. **8** (4), 143–174 (1944).

[45] Морозов В.В. *О примитивных группах в четырех переменных*, Тр. ин-та инж. коммун. строит. **5**, 3–30 (1938).

[46] Морозов В.В. *О примитивных группах*, Матем. сб. **5** (2), 355–390 (1939).

[47] Морозов В.В. *О нильпотентном элементе в полупростой алгебре Ли*, ДАН СССР **36** (3), 91–94 (1942).

[48] Морозов В.В. *О коммутативных матрицах*, Уч. зап. Казан. ун-та **112** (9), 17–20 (1952).

[49] Морозов В.В. *Доказательство теоремы регулярности*, Успехи матем. наук **11** (5), 191–194 (1956).

[50] Морозов В.В. *Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка*, Изв. вузов. Матем., № 4, 161–171 (1958).

[51] Морозов В.В. *К теореме о нильпотентном элементе в полупростой алгебре Ли*, Успехи матем. наук **5** (6), 137–139 (1960).

[52] Мубаракзянов Г.М. *О разрешимых алгебрах Ли*, Изв. вузов. Матем., № 1, 114–123 (1963).

[53] Мубаракзянов Г.М. *Классификация вещественных структур разрешимых алгебр Ли 5-го порядка*, Изв. вузов. Матем., № 3, 99–106 (1963).

[54] Мубаракзянов Г.М. *Классификация разрешимых алгебр Ли 6-го порядка с одним нильпотентным базисным элементом*, Изв. вузов. Матем., № 4, 104–116 (1963).

[55] Мубаракзянов Г.М. *Некоторые теоремы о разрешимых алгебрах Ли*, Изв. вузов. Матем., № 6, 95–98 (1966).

[56] Новоселов Е.В. *Введение в полиадический анализ* (Петрозаводск, 1982).

[57] Постников М. М. *Теория Галуа* (Факториал Пресс, М., 2003).

[58] Постников А. Г. *Введение в аналитическую теорию чисел* (Наука, М., 1971).

[59] Сафиуллина Э.Н. *Классификация нильпотентных алгебр Ли 7-го порядка*, в «Сборник аспирантских работ» (Изд-во Казанск. ун-та, 1963), с. 103–105.

[60] Сахаев И.И. *О проективности конечно порожденных плоских модулей*, Сиб. матем. журн. **6**, 564–573 (1965).

[61] Сахаев И.И. *О кольцах, над которыми всякий конечно порожденный плоский модуль проективен*, Изв. вузов. Матем., № 9, 65–73 (1969).

[62] Сахаев И.И., Чирков Г.В. *Проективность конечно-порожденных плоских модулей над полулокальным кольцом с единственным примитивным идеалом*, Изв. вузов. Матем., № 6, 106 (1970).

[63] Сахаев И.И., Чирков Г.В. *О проективности конечно порожденных плоских модулей*, Изв. вузов. Матем., № 1, 85–93 (1972).

[64] Сахаев И.И. *О конечной порожденности проективных модулей*, Изв. вузов. Матем., № 9, 69–79 (1977).

[65] Сахаев И.И. *О проективности конечно порожденных плоских модулей над полулокальным кольцами*, Матем. заметки **37** (2), 152–161 (1985).

[66] Сахаев И.И. *О критерии проективности конечно-порожденных плоских модулей*, Изв. вузов. Матем., № 10, 68–75 (1991).

[67] Сахаев И.И. *О поднятии конечной порожденности проективного модуля по модулю его радикала*, Матем. заметки **49** (3), 97–108 (1991).

[68] Сахаев И.И. *О конечной порожденности проективных модулей над кольцами с полиномиальными тождествами*, Изв. вузов. Матем., № 8, 65–75 (1993).

[69] Сахаев И.И. *Конечная порожденность проективных модулей над некоторыми кольцами*, Изв. вузов. Матем., № 10, 63–75 (1996).

[70] Скорняков Л.А. *Гомологическая классификация колец*, в сб. «Тр. IV Всесоюзного математического съезда, Т. 2» (Изд-во АН СССР, Л., 1964), с. 22–32.

[71] Скорняков Л.А. *Гомологическая классификация колец*, Матем. вестник **4** (4), 415–434 (1967).

[72] Скрябин С.М. *Классификация гамильтоновых форм над алгебрами разделенных степеней*, Матем. сб. **181** (1), 114–133 (1990).

[73] Скрябин С.М. *Новые серии простых алгебр Ли характеристики* 3, Матем. сб. **183** (8), 3–22 (1992).

[74] Скрябин С.М. *Контрагредиентная алгебра Ли размерности* 29 *в характеристике* 3, Сиб. матем. журн. **34** (3), 171–178 (1993).

[75] Столов Е.Л. *Об одном методе исследования матричных элементов представлений групп*, Изв. вузов. Матем., № 7, 79–86 (1969).

[76] Столов Е.Л. *О матричных элементах представлений* $SO(n)$ *класса* I *относительно* $SO(n-1)$, Изв. вузов. Матем., № 5, 86–91 (1970).

[77] Столов Е.Л. *Две асимптотические формулы для специальных функций, связанных с представлениями групп* $SO(n)$ *и* $M(n-1)$, Изв. вузов. Матем., № 2, 72–77 (1972).

[78] Сульдин А.В. *О линейных представлениях алгебр Ли над полем характеристики* $p>0$, ДАН СССР **82** (4), 529–531 (1952).

[79] Сульдин А.В. *О неприводимых представлениях алгебр Ли над полями характеристики* $p>0$, Учен. зап. Казан. ун-та **114** (2), 167–168 (1954).

[80] Тронин С.Н. *О коммутативных ассоциативных проективных алгебрах ранга 2 над совершенным полем*, Матем. заметки **41** (6), 776–780 (1987).

[81] Тронин С.Н. *Произведения в категориях частных и универсальное обращение гомоморфизмов*, Матем. сб. **188** (10), 109–130 (1997).

[82] Тронин С.Н. *Супералгебры и операды. I*, Сиб. матем. журн. **50** (3), 631–646 (2009).

[83] Тронин С.Н. *О супералгебрах над операдами*, Сиб. матем. журн. **50** (6), 1401–1412 (2009).

[84] Тронин С.Н. *Операдные и категорные методы в теории многообразий универсальных алгебр*, Дисс. ... докт. физ-матем. наук (Казань, 2011).

[85] Туганбаев А.А. *Модули с большим числом прямых слагаемых*, Фундамент. и прикл. матем. **12** (8), 233–241 (2006).

[86] Туганбаев А.А. *Кольца, над которыми все модули полурегулярны*, Фундамент. и прикл. матем. **13** (2), 185–194 (2007).

[87] Туганбаев А.А. *Кольца, над которыми все модули являются* I_0*-модулями*, Фундамент. и прикл. матем. **13** (5), 193–200 (2007).

[88] Туганбаев А.А. *Кольца без бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов*, Фундамент. и прикл. матем. **14** (2), 207–221 (2008).

[89] Туганбаев А.А. *Теория колец. Арифметические модули и кольца* (МЦНМО, М., 2009).

[90] Целоусов М.Ю. *Дифференцирования алгебр Ли картановского типа*, Изв. вузов. Матем., № 7, 126–134 (1970).

[91] Чеботарев Н.Г. *Основы теории Галуа. Часть первая.* (ОНТИ, М.–Л., 1934).

[92] Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н. *Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций*, Тр. Матем. ин-та АН СССР **26**, 3–331 (1949).

[93] Чирков Г.В *Лево-полусовершенное кольцо, не являющееся лево-f-полусовершенным*, Изв. вузов. Матем., № 6, 102–110 (1971).

[94] Эльстинг Г.О. *О градуированных алгебрах Ли с длинными градуировками*, УМН **34** (2), 221–222 (1979).

[95] Эскин Л.Д. *Замечание об операторах Лапласа на унимодулярной группе*, Изв. вузов. Матем., № 2, 259-269 (1959).

[96] Эскин Л.Д. *О матричных элементах неприводимых представлений группы Лоренца*, Изв. вузов. Матем., № 6, 179–184 (1961).

[97] Abyzov A.N. Tuganbaev A.A. *Rings over which all modules are I_0-modules II*, J. Math. Sci. **162** (5), 587-593 (2009).

[98] Ancochea Bermudez J.M., Goze M. *Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension* 7, Arch. Math. **52**, 175–185 (1989).

[99] Bass H. *Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings* , Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 466–488 (1960).

[100] Benkart G.M., Osborn J.M. *Rank one Lie algebras*, Ann. Math. **119**, 437–463 (1984).

[101] Block R.E. *On Lie algebras of rank one*, Trans. Amer. Math. Soc. **112**, 19–31 (1964).

[102] Collingwood D.H., McGovern W.M. *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras* (Van Nostrand Reinhold, 1993).

[103] Dubrovin N., Prihoda P., Puninski G. *Projective modules over the Gerasimov-Sakhaev counterexample*, J. Algebra **319** (8), 3259–3279 (2008).

[104] Endo S. *On semi-hereditary rings*, J. Math. Soc. Japan **13**, 109–119 (1961).

[105] Facchini A., Herbera D., Sakhajev I. *Finitely Generated Flat Modules and a Characterisation of Semiperfect Rings*, Comm. Algebra **31** (9), 4195–4214 (2003).

[106] Facchini A., Herbera D., Sakhajev I. *Flat modules and lifting of finitely generated projective modules*, Pacific J. Math. **220** (1), 49–67 (2005).

[107] Goze M., Khakimdjanov Yu. *Nilpotent and solvable Lie algebras*, в сб. «Handbook of algebra. V. 2» (North Holland, 2000), p. 615-663.

[108] Hamza H. *I_0-rings and I_0-modules*, Math. J. Okayama Univ. **40**, 91–97 (1998).

[109] Il'in S.N. *On projective covers of semimodules and perfect semirings*, J. Algebra Appl. **13** (6), 1450014 (2014).

[110] Il'in S.N., Katsov Y. *On Serre's problem on projective semimodules over polynomial semirings*, Comm. Algebra **42** (9), 4021–4032 (2014).

[111] Iwasawa K. *On the representations of Lie algebras*, Japan. J. Math. **19**, 405–426 (1948).

[112] Jain S.K., Srivastava A.K., Tuganbaev A.A. *Cyclic Modules and the Structure of Rings* (Oxford Univer. Press, Oxford, 2012).

[113] Jøndrup S. *On Finitely generated flat modules*, Math. Scand. **26**, 233–240 (1970).

[114] Jøndrup S. *Flat and projective modules*, Math. Scand. **43**, 336–342 (1978).

[115] Joseph A. *On the associated variety of a primitive ideal*, J. Algebra **93**, 509–523 (1985).

[116] Kaplansky I. *Lie algebras of characteristic p*, Trans. Amer. Math. Soc. **89**, 149–183 (1958).
[117] Katsov Y. *Toward homological characterization of semirings: Serre's conjecture and Bass's perfectness in a semiring context*, Algebra Universalis **52**, 197–214 (2004).
[118] Lazard D. *Liberté des gros modules projectifs*, J. Algebra **31**, 437–451 (1974).
[119] Lomp C. *On semilocal modules and rings*, Comm. Algebra **27** (4), 1921–1935 (1999).
[120] Neumann J., von. *Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen*, Acta Litt. Sci. Szeged **2**, 193–227 (1926).
[121] Panyushev D.I., Vinberg E.B. *The work of Vladimir Morozov on Lie algebras*, Transform. Groups **15**, 1001–1013 (2010).
[122] Premet A. *A modular analogue of Morozov's theorem on maximal subalgebras of simple Lie algebras*, Adv. Math. **311**, 833–884 (2017).
[123] Prihoda P. *Projective modules are determined by their radical factors*, J. Pure Appl. Algebra **210**, 827–835 (2007).
[124] Prüfer H. *Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie*, Math. Ann. **94**, 198–243 (1925).
[125] Puninski G. *Projective modules over the endomorphism ring of a biuniform module*, J. Pure Appl. Algebra **188**, 227–246 (2004).
[126] Puninski G., Rothmaler Ph. *When every finitely generated flat module projective*, J. Algebra **277**, 542–558 (2004).
[127] Romdhani M. *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension* 7, Linear and Multilinear Algebra **24**, 167–189 (1989).
[128] Skryabin S.M. *An algebraic approach to the Lie algebras of Cartan type*, Comm. Algebra **21**, 1229–1336 (1993).
[129] Skryabin S.M. *Modular Lie algebras of Cartan type over algebraically non-closed fields. II*, Comm. Algebra **23**, 1403–1453 (1995).
[130] Skryabin S. *Toral rank one simple Lie algebras of low characteristics*, J. Algebra **200**, 650–700 (1998).
[131] Skryabin S. *Invariant polynomial functions on the Poisson algebra in characteristic p*, J. Algebra **256**, 146–179 (2002).
[132] Strade H. *Simple Lie Algebras over Fields of Positive Characteristic* (Walter de Gruyter, 2004–2013).
[133] Ware R. *Endomorphism rings of projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **155**, 233–256 (1971).
[134] Zassenhaus H. *The representations of Lie algebras of prime characteristic*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **2**, 1–36 (1954).
[135] Zoschinger H. *Projektive Moduln mit endlich erzeugten Radikalfaktormoduln*, Math. Ann. **255**, 199–206 (1981).
[136] Vasconcelos W.V. *On finitely generated flat modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **138**, 505–512 (1969).

ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ТРУДОВ Н.Г. ЧЕБОТАРЕВА

1. ОРИГИНАЛЬНЫЕ ЖУРНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

1922

1. Задача, обратная задаче Tschirnhausen'а. — Журн. чист. и прикл. зн. Отд. физ.-мат. и техн. наук, 1922, т. 1, вып. 2, стр. 1–8.

1923

2. Критерий вещественности корней трансцендентных уравнений. — Журн. н.-и. кафедр в Одессе, 1923, т. 1, вып. 1, стр. 15-30. То же. — Ученые записки высшей школы г. Одессы. Отд. физ.-мат. и техн. наук, 1923, стр. 15–30.

3. Доказательство теоремы Kronecker'а Weber'а относительно абелевых областей. — Математ. сб., 1923, т. 31, стр. 302-309. Резюме на нем. яз. Библиография в тексте.

4. Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок. — Изв. Рос. АН, 1923, т. 17, стр. 205–250.

5. Der Hilbertsche Satz. — Bicti ВУАН, 1923, стр. 3–7.

1924

6. О методе исключения переменных из трансцендентных уравнений. — Изв. Каз. ФМО, серия 2, 1924, т, 24, вып 1, стр. 1–6. Резюме на франц. яз. Библиография в подстр. прим. Поправка. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1926, вып. 1, стр. 146–148.

7. О поверхностях переноса. — Математ. сб., 1924, т. 31, стр. 434–445. Резюме на нем. яз. Библиография в тексте.

8. О ширине контуров и тел. — Журн. н.-и. кафедр в Одессе, 1924, т. 1, № 8–9, стр. 1–13. Резюме на нем. яз. Библиография в подстр. прим.

9. Eine Verallgemeinerung des Minkowski's chen Satzes mit Anwendung auf die Betrach-tung der Körperidealklassen. — Журн. н.-и. кафедр в Одессе, 1924, т. 1, вып. 4, стр. 1–4. Резюме на украин. яз. Библиография в тексте.

1925

10. Новое обоснование теории идеалов (по Золотареву). — Изв. Каз. ФМО, серия 2, 1925, т. 25, стр. 1–14. Резюме на франц. яз.

11. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören. — Math. Ann., 1925, Bd. 95, S. 191–228.

1926

12. К задаче нахождения алгебраических уравнений с наперед заданной группой. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1926, т. 1, стр. 26–32. Резюме на нем. яз.

13. Об одном обобщении поверхностей переноса. — Журн. н.-и. кафедр в Одессе, 1926, т. 2, № 3, стр. 1–12. Резюме на нем яз. Библиография в подстр. прим.

14. Поправка к моей статье “О методе исключения переменных из трансцендентных ур-ий”. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1926, т. 1, стр. 146–148. См. Изв. Каз. ФМО, серия 2, 1924, т. 24, вып. 1, стр. 1–6.

1927

15. Studien über Primzahlendichtigkeiten. I. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1927, т. 2, стр. 14–20. Библиография в подстр. прим.

16. Studien über Primzahlendichtigkeiten. II. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1928, т. 3, вып. 1, стр. 1–17.

17. Über Flächen, welche Imprimitivitätssysteme in Bezug auf eine gegebene kontinuierliche Transformationsgruppe enthalten. — Математ. сб., 1927, т. 34, вып. 1, стр. 149–206. Резюме на русск. яз. Библиография в подстр. прим. на иностр. яз.

1928

18. p' adischer Beweis des zweiten Hauptsatzes von Herrn Ore. — Acta litt. ac sc. Sectio sc. math., 1928, t. 4, fasc. 1–2, 8. 56-57. [Совместно с М. Бауером].

19. Über eine allgemeine Methode zur Bilduing von Differentialausdrücken, die in Bezug auf eine kontinuier-liche Transformationsgruppe invariant bleiben. — Зап. ф.-м. від. ВУАН, 1928, т. 3, вып. 1, стр. 53–59. [Совместно с Д. А. Граве].

20. Über Drehungen von mehrdimensionalen Gittern. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1928, т. 3, вып. 2, стр. 70–76.

21. Über die Realität von Nullstellen ganzer transzendenter Funktionen. — Math. Ann., 1928, Bd. 99, s. 660–686. Библиография в подстр. прим.

1929

22. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля. — Вестн. студ. ф.-м. кружка КГУ, 1929, № 3, стр. 16–25. Библиография в подстр. прим. на иностр. яз.

23. Bemerkung über analytische Iterationen. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1929-30, т. 4, вып. 1, стр. 49–50.

24. Bemerkung zur Theorie der schlichten Funktionen. — Jahresber. D. M. V. 1929, Bd. 38, S. 244–247.

25. Beweis der Existenz einer Basis bei Abelschen Gruppen von endlicher Ordnung. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1929-30, т. 4, вып. 1, стр. 47–48.

26. Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers. — J. reine angew. Math. 1929, Bd. 161, s. 179–193. Библиография в подстр. прим.

1931

27. К теории узлов. — Ученые записки КГУ, 1931, т. 91, кн. 4. Математика, вып. 1, стр. 9-23.

28. Über ein algebraisches Problem von Herrn Hilbert. Erste Abhandlung. — Math. Ann., 1931, Bd. 104, s. 459–471. Библиография в подстр. прим.

29. Über ein algebraisches Problem von Herrn Hilbert. Zweite Abhandlung. — Math. Ann., 1931, Bd. 105, s. 240–255. Библиография в подстр. прим.

30. Über eine Verallgemeinerung eines Clifford'schen Satzes. — Rendic. Circ. Mat. Palermo, 1931, t 55, p. 1–11.

31. Untersuchungen über relative Abelsche Zahlkörper. J. Reine angew. Math., 1931, Bd. 167, S. 98–121.

1932

32. Die Probleme der modernen Galoisschen Theorie. — Verh. intern. Math. Kongr., 1932, Bd. 1, S.123–137. Библиография в подстр. прим.: 20 назв. на иностр. яз.

33. Über das Klein-Hilbertsche Resolventenproblem. Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1932-1933, т. 6, стр. 5–22. Резюме на русск. яз. Библиография в подстр. прим.

1934

34. Заметки по алгебре и теории чисел. — Ученые записки КГУ, 1934, т. 94, кн. 7. Математика, вып. 2, стр. 3–16. Резюме на нем. яз. Библиография в подстр. прим.

35. Die Probleme der modernen Galoisschen Theorie. — Comm. Math. Helv, 1934, vol. 6, S. 235–283. Библиография: 92 назв. на иностр. яз.

36. Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. I. — Math. Zeitschrift, 1934, Bd. 39, S. 161–175. Библиография в подстр. прим.

1935

37. Проблемы современной теории Галуа. — В кн.: Труды второго Всесоюзного математического съезда, т. 1. Пленарные заседания и обзорные доклады. Л.–М. Академия наук СССР. 1935, стр. 164–205. Библиография: 92 назв. на русск. и иностр. яз.

38. Kurzer Beweis des Diskriminantensatzes. — Acta Arithm, 1935, Bd. 1, S. 78–82. Библиография в подстр. прим.

1936

39. О квадрируемых луночках. — В кн.: Труды второго Всесоюзного математического съезда, т. 2. Секционные доклады. Л.–М. Академия наук СССР, 1936, стр. 3.

40. О R-продолжаемых полиномах. — В кн.: Труды второго Всесоюзного математического съезда, т. 2. Секционные доклады. Л.–М. Академия наук СССР. 1936, стр. 6–9. [Совместно с Н. Н. Мейманом.]

41. Об интегрируемых R-полиномах. — В кн.: Труды второго Всесоюзного математического съезда, т. 2. Секционные доклады. Л.–М. Академия наук СССР, 1936, стр. 4–5.

42. Современное состояние теории алгебраических, чисел. — В кн.: Труды первого Всесоюзного съезда математиков. (Харьков, 1930 г.), М.–Л. ОНТИ, 1936, стр. 224–230. Библиография в тексте.

43. Über F-Polynome. I. Allgemeines. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1936–1937, т. 8, стр. 109-123. Резюме на русск. яз.

44. Über F-Polynome. III. Über M-integrierbare Polynome. — Изв. Каз. ФМО, серия 3, 1936–1937, т. 8, стр. 103–108. Резюме на русск. яз.

1937

45. Про визначення объему в групах Lie. — Зап. н.-д. ін-ту мат. й мех., серия 4, 1937, т. 14, стр. 3–11. То же на нем. яз., стр. 11–20. Библиография в подстр. прим, на иностр. яз.

46. Про визначення міри груп Lie. Зап. н.-д. ін-ту мат. й мех., серия 4, 1937, т. 14, стр. 21–33. Библиография в подстр. прим.

47. Über die Massbestimmung von Lieschen Gruppen. — Зап. н.-д. ін-ту мат. й мех., серия 4, 1937, т. 14, стр. 33-45.

48. Über verallgemeinerte Sciebflächen. — В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. 1937, вып. 4, стр. 348–350. Библиография в подстр. прим. То же на русск. яз., стр. 351–353.

49. Eine Aufgabe aus der algebraischen Zahlentheorie. — Acta Arithm. 1937, Bd.2, S. 221–229. Библиография в подстр. прим.

1938

50. Über irreguläre Darstellungen von halbeinfachen Lieschen Gruppen. — Comp. Math., 1938, vol. 6, S. 103–117.

1940

51. Задача из теории алгебраических чисел. — В кн.: Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. М.–Л. Гостехтеоретиздат, 1940, стр. 283–290. Библиография в подстр. прим.

52. О продолжаемых полиномах. I. Общая постановка проблемы. — В кн.: Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. М.–Л. Гостехтеоретиздат, 1940, стр. 268–282.

53. О продолжаемых полиномах. VI. — Изд. Каз. ФМО, серия 3, 1940, т. 12, стр. 183–195.

54. Beweis des Minkowskischen Satzes über lineare inhomogene Formen. — Vierteljahrsschr. Nat. Ges. Zürich, 1940, Bd. 85, Beiblatt 32, Festschrift Rudolf Fueter, S. 27–30. Библиография в подстр. прим.

1941

55. К проблеме Гурвица для целых трансцендентных функций. — Докл. АН СССР, новая серия, 1941, т. 33, № 9, стр. 483–486. Библиография: 5 назв. на русск. и иностр. яз.

56. О продолжаемости полиномов на замкнутые кривые. — Докл. АН СССР, новая серия, 1941, т. 32, № 1, стр. 3–6. Библиография: 5 назв. на русск. и иностр. яз.

1942

57. Об одном видоизменении способов Штурма и Фурье. — Докл. АН СССР, новая серия, 1942, т. 34, № 1, стр. 3–6. Библиография: 4 назв.

58. Об одном частном виде трансцендентных уравнений. — Докл. АН СССР, новая серия, 1942, т. 34, № 2, стр. 42–45. Библиография: 4 назв.

59. О целых функциях с вещественными перемежающимися корнями. — Докл. АН СССР, новая серия, 1942, т. 35, № 7, стр. 219–222. Библиография: 4 назв. на русск. и иностр. яз.

60. Об одном видоизменении постановки задачи Гурвица. — Докл. АН СССР, новая серия, 1942, т. 35, № 8, стр. 251–254. Библиография: 6 назв. на русск. и иностр. яз.

61. Об R-интегрируемых полиномах. — Докл. АН СССР, новая серия, 1942, т. 35, № 3, стр. 67–69. Библиография: 6 назв. на русск. и иностр. яз.

62. A theorem of the Theory of semi-simple Lie groups. [Теорема из теории полупростых групп Ли]. — Математ. сб., новая серия 1942, т. 11, вып. 3, стр. 239–244. Резюме на русск. яз. Библиография в подстр. прим.

63. Notice on the theory of Algebras. — Сообщения Академии наук Грузинской ССР, 1942, т. 3, № 5, стр. 405–412. Резюме на груз. яз. Библиография: 3 назв. на иностр. яз.

1943

64. Об одном общем критерии минимакса. — Докл. АН СССР, новая серия, 1943, т. 39, № 9, стр. 373–376.

65. О представления групп Lie, не имеющих меры. — Докл. АН СССР, новая серия, 1943, т. 40, № 1, стр. 11–14. Библиография: 5 назв. на русск. и иностр. яз.

66. Проблема резольвент и критические многообразия. — Изв. АН СССР, серия математическая, 1943, т. 7, № 3, стр. 123–146. Резюме на англ. яз. Библиография: 7 назв. на иностр. яз.

1944

67. Доказательство π-теоремы. Собр. соч., т. II, стр. 414—416. Из прошлого казанской математической школы (доклад).

1945

68. К проблеме H-продолжаемых полиномов. Изв. Каз. ФМО, **13**, 133—151, 1945; Собр. соч., т. II, стр. 128—149.

69. О корнях конечных тригонометрических сумм. Изв. Каз. ФМО, **13**, 153—172, 1945; Собр. соч. т. II, стр. 150—170.

1946

70. Новая разработка десятичной классификации библиотечных книг по разделу “Математика” (совм. с Е.С. Шестаковой). Уч. зап. КГУ 106, кн. 2, в. 4, стр. 149—160, 1946.

1947

71. О выражении абелевых интегралов через элементарные функции. Усп. мат. наук 2, в. 2, стр. 3—20, 1947; Собр. соч., т, I, стр. 235—254.

72. Об обосновании теории идеалов по Золотареву. Усп. мат. наук 2, в. 6, стр. 52—67, 1947; Собр. соч., т. I, стр. 71—86.

73. Проблема резольвент. Юб. сб. АН СССР, 1947, стр. 80—95; Собр. соч., т. I, стр. 327—340.

74. Алгебра полиномов и полей. Математика в СССР за 30 лет, ОГИЗ, 1948, стр. 85—105.

75. Математическая автобиография. Усп. мат. наук 3, в. 4, стр. 3—66, 1948; Собр. соч. т. III, стр. 92—163.

Рукописи, подготовленные к печати

Задача Гурвица для трансцендентных функций 2 печат. л.

О корнях конечных тригонометрических сумм. Около $1\frac{1}{2}$ печат. л.

О проблеме H-продолжаемых полиномов. $1\ \frac{1}{4}$ печат. лист.

Новая разработка десятичной классификации библиотечных книг по разделу “Математика”. [Совместно с Е. С. Шестаковой]. 1 печат. л.

2. УЧЕБНИКИ И МОНОГРАФИИ

76. Курс вариационного исчисления, читанный в Казанском гос. ун-те в 1928–29 гг. с приложением статьи Л.А. Люстерника “Прямые методы в вариационном исчислении”. Казань, студенч. физ.-мат. кружок при КГУ, 1929, 124 стр. Библиография по главам на русск. и иностр. яз.

77. Дополнительные главы по алгебре. Казань, 1929. [Стеклограф].

78. Курс топологии. /Казань/, 1932, 123, (8) стр. [Стеклограф]. Библиография по главам.

79. Курс топологи. Харків — Киів, 1934.

80. Основы теории Галуа. Ч. 1. Л.–М. Гостехтеоретиздат, 1934. 221 стр. Библиография: стр. 213–216 на русск. и иностр. яз. по главам.

81. Основы теории Галуа. Ч. 2. Л.–М. Гостехтеоретиздат, 1937. 158 стр. (Математика в монографиях. Под ред. акад. С.Н. Бернштейна, И.М. Виноградова, Н.Т. Чеботарева и др. Основная серия, кн. 5). Библиография: стр. 154–156 на русск. и иностр. яз.

82. Теория Галуа. М.–Л. ОНТИ. Гл. ред. общетехнич. лит-ры и номографии, 1936. 154 стр. (Математика в монографиях. Под ред. акад. И.М. Виноградова, проф. А.Н. Колмогорова и др. Серия обзоров, кн. 1). Библиография: 33 назв. на иностр. и русск. яз.

83. Теория групп Ли. М.–Л. Гостехтеоретиздат, 1940, 396. стр. Библиография: стр. 385–392. Библиографич. обзор учебников и монографий, алфавитный указатель лит-ры.

3. КОМПИЛЯТИВНЫЕ СТАТЬИ
(Обзоры, некрологи и т. п.)

84. Формула геометрии Лобачевского. — Вестн. студ. ф.-м. кружка КГУ, 1929, № 1, стр. 3–4.

85. Н.Н. Парфентьев как деятель науки. — “Красная Татария”, 15 февр. 1930 г.

86. Дроби. — В кн.: Большая советская энциклопедия, т. 23. Доде-Евразия. М. “Советская энциклопедия”, 1931, стр. 475–477. Библиография в конце текста.

87. Алгебра. — В кн.: Наука в СССР за пятнадцать лет (1917–1932). Математика. М.–Л. Гостехиздат, 1932, стр. 5–36. Библиография: Работы, написанные советскими математиками за отчетный период.

88. Нам нужен центр научной математической мысли. — “Красная Татария”, 15 окт. 1932 г. [Совместно с Н.Н. Парфентьевым].

89. О значении работ Лагранжа по теории чисел и алгебре. — В кн.: Успехи математ. наук, вып. 2. М.–Л. ОНТИ, 1936, стр. 17–31. Библиография на русск. и иностр. яз. в подстр. прим.

90. Академик Дмитрий Александрович Граве. (К 50-летию его научно-педагогической деятельности.) — В кн.: Успехи математ. наук, вып. 3. М.–Л., ОНТИ, 1937, стр. 222–233.

91. Математическая олимпиада. — “Красная Татария”, 6 мая 1937 г.

92. О значении работ Лагранжа по теории чисел и алгебре. — В кн.: Жозеф Луи Лагранж. 1736-1936. Сборник статей к 200-летию со дня рождения. М.–Л. Академия наук СССР. 1937, стр. 85–103. Библиография в подстр. прим. на иностр. и русск. яз.

93. Об обобщенных поверхностях переноса. — В кн.: Труды по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. Под. ред. проф. В.Ф. Кагана, вып. 4. М.–Л., Гостехтеоретиздат, 1937, стр. 351–353.

94. Основные направления в работе Института математики и механики Харьковского государственного университета. — В кн.: Успехи математ. наук, вып. 3. М.–Л., ОНТИ, 1937, стр. 252–253.

95. Алгебра. — В кн.: Математика и естествознание в СССР. Очерки развития математических и естественных наук за 20 лет. М.–Л., Академия наук СССР, 1938, стр. 3–10.

96. Математическая жизнь в Казани. — В кн.: Успехи математ. наук, вып. 4. М.–Л., ОНТИ, 1938, стр. 297–299.

97. Несколько задач из различных отделов алгебры и теории чисел. — В кн.: Успехи математ. наук, вып. 4. М.–Л., ОНТИ, 1938, стр. 284–286. Библиография на русск. и иностр. яз. по главам. То же — ученые записки КГУ, 1938, кн. 7. Сборник студенческих работ; вып. 1, стр. 71-74. Библиография На русск. и иностр. яз.

98. Академик Дмитрий Александрович Граве (1863–1939). — В кн.: Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. М.–Л. Гостехтеоретиздат, 1940, стр. 3–14.

99. Дискретные бесконечные группы и их место в общей теории групп. — В кн.: Успехи математ. наук, вып. 8. М.–Л. Гостехтеоретиздат, 1940, стр. 336-364. Библиография: 42 назв. на русск. и иностр. яз. в подстр. прим.

100. Математики. (Над чем работают наши ученые). — “Красная Татария”, 13 сент. 1940 г.

101. Математическая олимпиада. — “Красная Татария”, 11 апреля 1940 г.

102. Самуил Осипович Шатуновский. (К 10-летию со дня смерти.) — В. кн.: Успехи математ. наук, вып. 7. М.–Л., Гостехтеоретиздат, 1940, стр. 316–321.

103. Работы казанских математиков в послереволюционный период (1917–1939). — Ученые записки КГУ, 1941, т. 101, кн. 1, стр. 57–78. Библиография: Список работ сотрудников кафедр математики и механики КГУ, стр. 63–78.

104. Геометрия Лобачевского и ее значение в современной науке. — В кн.: Николай Иванович Лобачевский (1793–1856). Сборник статей. М.–Л. Академия наук СССР, 1943, стр. 56–82. Библиография: стр. 81–82.

105. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики. — В кн.: Исаак Ньютон. 1643–1727. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. Под ред. акад. С.И. Вавилова. М.–Л. Академия наук СССР, 1943, стр. 99–126. Библиография: 61 назв. на русск. и иностр. яз.

4. РЕЦЕНЗИИ

106. Современный учебник высшей алгебры. [О книге: Окунев, Л.Я. Высшая алгебра. М.–Л. ОНТИ, Гостехтеоретиздат. 1937, 314 стр.] — Техническая книга, 1938, № 1, стр. 48–49.

107. Введение в теорию групп. [О книге: Бауэр, Э. Введение в теорию групп и ее приложения к квантовой физике. Перев. с франц. под ред. проф. Ю.Б. Румера. М.–Л. Гостехтеоретиздат. 1937, 153 стр.] — Техническая книга, 1938, №4, стр. 19-20.

108. Теория характеров и представлений групп. [О книге: Фробениус, Ф. Г. Теория характеров и представлений групп. Перев. с нем. Харьков, ГНТИ Украины, 1937, 214 стр.] — Техническая книга, 1938, № 5, стр. 32.

109. Ван-дер-Варден, Б. Л. Современная алгебра, ч. 2. Перев. с нем. Л.Я. Окунева. М.–Л. Гостехтеоретаздат. 1937, 210 стр. — Успехи математ. наук, вып. 6. М.–Л. ОНТИ, 1939, стр. 297–298.

5. РЕФЕРАТЫ

110. Леднев, Н.А. О единицах относительно циклических алгебраических числовых полей. (Математ. сб., т. 6 (48), № 2, 1939, стр. 227–261). — Физико-математ. рефер. журнал, 1940, т. 3, вып. 5, стр. 419.

111. Дрінфельд, Г.І. Про оператори, які переставляють інтегральні інваріанти неперервноі групи перетворень. I. (Об операторах, перемещающих интегральные инварианты непрерывной группы преобразований. I.) (Збірник праць Ін-ту мат. АН УССР,

1940, № 4, стр. 157–163). — Физико-математ. реферат, журнал, 1940, т. 4, вып. 6, стр. 556.

112. Четаев, Н.Г. Характеристики Кронекера, (Ученые записки КГУ, 1938, т. 98, кн. 9. Математика, вып. 3, стр. 3–41). — Физико-математ. реферат, журнал, 1940, т. 4, вып. 5, стр. 451.

113. Яковкин, М.В. Об одном критерии неприводимости многочленов. (Доклады АН СССР, 1940, т. 28. № 9, стр. 771–773). — Физико-математ. реферат, журнал, 1941, т. 5, вып. 4, стр. 345.

114. Делоне, Б.Н., Фаддеев, Д.К. Теория иррациональностей третьей степени. (Труды математ. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1940, т. XI, стр. 340). — Физико-математ. реферат, журнал, 1941, т. 6, вып. 1–2, стр. 1–2.

Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete

1933

115. Bohlin, K. Sur la solution de l'équation générale du cinquième degré reduite à la forme libre. — Bd. 7, S. 290.

116. Carlitz, Leonard. On a theorem of higher reciprocity. — Bd. 6, S. 292.

117. Sz. Nagy, Julius, v. Über einen Satz von Laguerre. — Bd. 6, S, 289.

118. Pascal, Ernesto. Una breve osservazione sul metodo per la ricerca del limite superior delle radici reali di un'equazions. — Bd. 6, S. 289.

119. Tôya, Tikara. Some remarks on Montel's paper concerning upper limit of absolute values of roots of algebraic equations. — Bd. 7, S. 289.

120. Turkin, W.K. Auflösbarkeit der Gruppen der ungeraden Ordnung $p_q^a r$. — Bd. 7, S. 291.

121. Žolotareff, J. I. Gesammelte Werke. Redig. von Stekloffs Phys. — Math. Inst. Bd. 1. u. 2. — Bd. 6, S. 153.

1934

122. Anghelutza, Th. Una estenzione di un teorema di Hurwitz. — Bd. 8, S. 101.

123. Chaundy, T.W. On the number of real roots of a quantic equation. — Bd. 8, S. 387.

124. Grave, D. Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Axel Thue. — Bd. 8, S. 242.

125. Grün, Otto. Zur fermatschen Vermutung. — Bd. 8, S. 242.
126. Krein, M. Zus Theorie der symmetrischen Polynome. — Bd. 8, S. 1.
127. Sz. Nagy, Julius v. Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen. — Bd. 8, S. 100.
128. Sz. Nagy, Julius v. Über die nichtreellen Nullstellen von reellen ganzen Funktionen. — Bd. 8, S. 100.
129. Orloff, Constantin. Application du calcul spectres aux problèmes sur les polynomes. — Bd. 9, S. 7.
130. Orloff, Constantin. Évalution des spectres mathématiques à l'aide des relation de recurrence. — Bd. 9, S. 7.
131. Schumjagski, B. Schoiroschrechnung. — Bd. 8, S. 99.
132. Waerden, B.L. van der. Noch eine Bemerkung zu der Arbeit "Zur Arithmetik der Polynome" von U. Wegner in Math. Ann. 105, 628–631. — Bd. 9, S. 4.
133. Waerden, B.L. van der. Die Seltenheit der Gleichungen mit Affekt. — Bd. 7, S. 391.

1934–1935

134. Berg, Erik. Über die Existenz eines Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern. — Bd. 12, S. 102.
135. Bohlin, K. Zusätze und Erläuterungen zur Lösung der algebraischen Gleichung fünften Grades auf Grundlage des Racinals. — Bd. 11, S. 337.
136. Brauer, Alfred und Brauer Richard. Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Polya. — Bd. 11, S. 387.
137. Brauer Richard. Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen. — Bd. 10, S. 245.
138. Chaundy, T.W. On the number of real roots of a quintic equation: Addendum. — Bd. 9, S. 389.
139. Chaundy, T.W. The generation function of symmetrical functions. — Bd. 11, S. 49.
140. Cherubino, Salvatore. Sulla teoria delle equazioni algebriche. — Bd. 12, S. 49.
141. Church, Randolph. Tables of irreducible polynomials for the first four prime moduli. — Bd. 11, S. 5.
142. Colucci, Antonio. Sopra I polinomi definiti. — Bd. 10, S. 193.

143. Faddejeff, D.K. Über die Gleichung $x^3 + y^3 = Az^3$. — Bd. 9, S. 196.
144. Faddejeff, D.K. Über die Gleichung $x^4 - Ay^4 = +1$. — Bd. 9, S. 196.
145. Grant, Harold Sinclair. Concerning powers of certain classes of ideals in a cyclotomic realm which give the principal class. — Bd. 9, S. 195.
146. Grave, D.O. Arithmetische Theorie der algebraischen Grössen. Begriff vom Ideal. — Bd. 12, S. 102.
147. Grün, Otto. Über Substitutionsgruppen im Galoisfeld. — Bd. 9, S. 194.
148. Krein, M. und Neimark, M. Über eine Transformation der Bezoutiante, die zum Sturmschen Satze führt. — Bd. 11, S. 50.
149. Krein, M. Über die Knoten der harmonischen Schwingungen einiger spezieller mechanischer Systeme. — Bd. 10, S. 148.
150. Hull, Ralph. A determination of all cyclotomic quintic fields. — Bd. 11, S. 388.
151. MacLane, Saunders. Abstract absolute values which give new irreducibility criteria. — Bd. 12, S. 99.
152. Marden, Morris. The location of the zeroes of the derivative of a polynomial. — Bd. 11, S. 387.
153. Misra, D.P. The extension of algebraic numbers. — Bd. 11, S. 5.
154. Moriya, Mikao. Über die Konstruktion algebraischer Zahlkörper unendlichen Grades. — Bd. 10, S. 194.
155. Mordoukhay-Boltovskoy, D. Sur les nombres transcendants dont les approximations successives sont définies par des équations algébriques. — Bd. 10, S. 153.
156. Sz. Nagy, Julius v. Zur Theorie der algebraischen und gewisser transzendenten Gleichungen. — Bd. 9, S. 390.
157. Ore, O. Les corps algébriques et la théorie des idéaux. — Bd. 9, S. 148.
158. Ore, O. Einige Bemerkungen über Irreduzibilität. — Bd. 9, S. 390.
159. Papkow, P.S. Der euklidische Algorithmus im quadratischen Zahlkörper mit beliebiger Klassenzahl. — Bd. 9, S. 151.

160. Papkow, P.S. Über eine Anwendung des euklidischen Algorithmus im quadratischen Zahlkörper mit beliebiger Klassenzahl. — Bd. 9, S. 151.
161. Petterson, Erik L. Irreduzibilitätskriterien als Folgerung einiger Beziehungen zwischen den Faktorzerlegungen eines algebraischen Polynoms und seines konstanten Gliedes. — Bd. 11, S. 237.
162. Petterson, Erik L. Eine Bedingung für die irreduziblen Faktoren von gewissen Polynomen modulo eines Primzahlproduktes. — Bd. 12, S. 99.
163. Rademacher, Hans. Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Winkelräumen. — Bd. 11, S. 150.
164. Remak, Robert. Über den Euklidischen Algorithmus inreell-quadratischen Zahlkörpern. — Bd. 10, S. 247.
165. Vandiver, H.S. A note on units in super-cyclic fields. — Bd. 1, S. 291.
166. Weisner, Louis. Criteria for the irreducibility of polynomials. — Bd. 10, S. 290.
167. Weisner, Louis. Irreducibility of polynomials of degree n which assume the same value n times. — Bd. 11, S. 243.
168. Wegner, Udo. Über das Verhalten der Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung hinsichtlich ihrer Gruppe. — Bd. 12, S. 100.

1936

169. Agro, Francesca. Sopra una classe di polinomi definiti. — Bd. 13, S. 386.
170. Amato, Vincenzo. Equazioni a gruppo di Galois intransitivo ed equazioni a gruppo G_3. — Bd. 13, S. 387.
171. Bauer, Michael. Bemerkungen zum Hensel-Oreschen Hauptsatze. — Bd. 14, S. 147.
172. Bauer, Michael. Über den Führer eines Ringes in algebraischen Zahlkörpern. — Bd. 15, S. 58.
173. Benjaminowitsch, S. Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einer Halbebene und auf ihrem Rande. — Bd. 13, S. 145.
174. Bullig, Günter. Die Berechnung der Grundeinheit in den kubischen Körpern mit negativer Diskriminante. — Bd. 13, S. 295.
175. Bungers, Rolf. Über Zahlkörper mit gemeinsamen ausserwesentlichen Diskriminantenteilern. — Bd. 14, S. 341.

176. Darbi, Giulio. Riducibilità e gruppi delle equazioni algebraiche. — Bd. 13, S. 388.
177. Deuring, Max. Über den Hauptsatz der Algebrentheorie. — Bd. 13, S. 388.
178. Grave, D. Algorithme du calcul des racines des équations algébriques. — Bd. 14, S. 337.
179. Hall, P. The Eulerian functions of a group. — Bd. 14, S. 10.
180. Hasse, Helmut. Über die Diskriminante auflösbarer Körper vom Primzahlgrad. — Bd. 15, S. 50.
181. Hofreiter, Nicolaus. Quadratische Körper mit und ohne euklidischen Algorithmus. — Bd. 13, S. 149.
182. Krein, M. et Neimark, M. Sur les applications de la bézoutiante aux questions de séparation des racines des équations algébriques. — Bd. 14, S. 337.
183. Leroy, Florentin. Cours d'algèbre et d'analyse a l'usage des élèves de mathématiques speciales des élèves ingénieurs et des étudiants des facultés des sciences. Essai d'enseignement concret et intuitif. Tome 1. Algèbre. — Bd. 13, S. 145.
184. Lubelski, S. Über Klassenzahlrelationen quadratischer Formen in quadratischen Körpern. — Bd. 13, S. 149.
185. Lubelski, S. Zur Reduzibilität von Polynomen in der Kongruenztheorie. — Bd. 12, S. 393.
186. Marden, Morris. On the zeroes of the derivative of a rational function. — Bd. 14, S. 337.
187. MacLane, Saunders. The ideal decomposition of rational primes in terms of absolute values. — Bd. 13, S. 103.
188. MacLane, Saunders. A consrtruction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. — Bd. 15, S. 58.
189. Molsen, Karl. Über spezielle Klassen irreduzibler Polynome. — Bd. 13, S. 101.
190. Motzkin, Th. Sur les transformations qui n'augmentent pas le nombre des variations du signe. — Bd. 13, S. 290.
191. Sz. Nagy, Julius v. Über die Nullstellen gewisser rationale Funktionen. — Bd. 13, S. 388.
192. Neuhaus F.W. Seltenheit der Gleichungen mit Affekt. — Bd. 15, S. 1.
193. Neuhaus F.W. Seltenheit der reduziblen Polynome. — Bd. 15, S. 1.

194. Petterson, Erik L. Die Begrenzung der Anzahl reduzibler Polynome bel gewissen unendlichen Variationen der Koeffizienten. — Bd. 14, S. 289.

195. Petterson, Erik L. Erweiterungen einiger Irreduzibilitätskriterien. — Bd. 13, S. 386.

196. Petterson, Erik L. Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome nach einem Primzahlmodul. — Bd. 14, S. 289.

197. Petterson, Erik L. Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome. — Bd. 14, S. 196.

198. Pisot, Charles. Sur certaines propriétés caractéristiques des nombres algébriques. — Bd. 14, S. 345.

199. Pisot, Charles. Sur une propriété caractéristiqu de certains entiers algébriques. — Bd. 13, S. 295.

200. Porton. Sur l'irréducibilité des polynomes à plusieurs variables. — Bd. 13, S. 291.

201. Rademacher, Hans. On prime numbers of real quadratic fields in rectangles. — Bd. 14, S. 342.

202. Tietze, Heinrich. Über eine der Fourierschen Regel verwandte Zeichenregel für die Anzahl der Nullstellen in einem offenen Intervall. — Bd. 13, S. 244.

203. Tietze, Heinrich. Über die Vorzeichenregeln von Descartes und Fourier-Budan. — Bd. 13, S. 385.

204. Waerden, B. L. van der. Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und der Gleichungen mit Affekt. — Bd. 13, S. 387.

205. Wegner, Udo. Über die Permutationen der Galoisschen Gruppe einer Gleichung. — Bd. 13, S. 387.

206. Wegner, Udo. Bestimmung eines auflösbaren Körpers von Primzahlgrad aus der Form seiner Diskriminante. — Bd. 15, S. 358.

207. Weisner, Louis. Abstract theory of inversion of finite series. — Bd. 12, S. 393.

208. Weisner, Louis. Some properties of prime-power groups. — Bd. 12, S. 394.

209. Wilson, N.R. On separating the roots of polynomial equations. — Bd. 13, S. 100.

1937

210. Barba, C. Polinomi definiti I. Problemi fondamentali. — Bd. 16, S. 49.

211. Barba, C. Polinomi definiti II. Classi di polinomi definiti ottenuti da alcuni prefissati. — Bd. 16, S. 147.
212. Barba, C. Polinomi definiti III. Interpretazioni, proprietá e complementi. — Bd. 17, S. 97.
213. Cammarata, Angelo. Sui divisor dei polinomi $P(xy)$ funzioni del prodotto xy, in un dato corpo. — Bd. 15, S. 150.
214. Colucci, A. Sulla derivate ennesima di un Wronskiano. — Bd. 15, S. 291.
215. Hadamard, Jacques. Observations sur la note précedente. — Bd. 16, S. 99.
216. Krasner, Marc et Britt Ranulac. Sur une propriété des polynomes de la division du cercle. — Bd. 15, S. 386.
217. MacLane, Saunders. Note on some equations without affect. — Bd. 15, S. 150.
218. MacLane, Saunders. A construction for absolute values in polynomial rings. — Bd. 15, S. 292.
219. Mignosi, G. Estrazione di radice dei polinomi. — Bd. 15, S. 148.
220. Molsen, Karl. Dumasscher Satz über die Zerlegung von Polynomen. — Bd. 16, S. 147.
221. Mahler, Kurt. Über die Annäherung algebraischer Zahlen durch periodische Algorithmen. — Bd. 17, S. 57.
222. Petterson, Erik L. Einige aus Grössenbeziehungen der Wurzeln algeleitete Irreduzibilitätskriterien. — Bd. 16, S. 3.
223. Petterson, Erik L. Einige Irreduzibilitätsbedingungen gewisser Polynome. — Bd. 16, S. 49.
224. Petterson, Erik L. Über Reduzibilitätseigenschaften gewisser Polynome, die einen Parameter enthalten. — Bd. 16, S. 3.
225. Petterson, Erik L. Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome. — Bd. 15, S. 341.
226. Petterson, Erik L. Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome. — Bd. 16, S. 147.
227. Petr, Karel. Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten nach einem Primzahlmodul. — Bd. 16, S. 49.
228. Pisot, Charles. Sur la répartition modulo 1 des puissances successives d'un même nombre. — Bd. 16, S. 53.
229. Rohrbach, Hans. Ein Identitätssatz für Polynome. — Bd. 16, S. 99.

230. Schur, I. Über einige Ungleichungen im Matrizenkalkül. — Bd. 15, S. 291.

231. Schulz, Werner. Reduzibilität, Irreduzibilität und Affektfreiheit bei gewissen Klassen von Polynomen. — Bd. 15, S. 386.

232. Schulz, Werner. Über die Galoissche Gruppe der Hermiteschen Polynome. — Bd. 17, S. 52.

233. Schulz, Werner. Über Teilbarkeit bei hypergeometrischen Polynomen. — Bd. 16, S. 147.

1938

234. Chang, T.H. Verallgemeinerung des Satzea von Kakeya. — Bd. 17, S. 193.

235. Raikov, D. Sur une propriété des polynomes de la division du cercle. — Bd. 17, S. 146.

236. Reichardt, Hans und Wegner, Udo. Arithmetische Clarakterisierung algebraisch auflösbarer Körper und Gleichungen von Primzahlglad. — Bd. 17, S. 245.

6. РЕДАКТИРОВАНИЕ

237. Известия физико-математического общества при Казанском университете. Серия 3, т. 3–12. М. 1928–1940.

238. Математический сборник, издаваемый при участии Московского, Ленинградского и Казанского математ. общества, т. 39–42. М.–Л. 1932–1935.

239. Золотарев, Е. И. Полное собрание сочинений. Вып. 1 и 2. Л. АН СССР. 1931–1932.

240. Acta Arithmetica, т. 1–3, 1935–1939.

241. Записки науково-дослідного інституту математики, й механіки при Харківському державному університеті та Харківського математичного товариства, серия 4, 1936, т. 13.

242. Математика в монографиях. Под ред. С.Н. Бернштейна, И.М. Виноградова, А.Н. Колмогорова, Л.А. Люстерника, А.И. Плеснера, В.А. Тартаковского, Н.Г. Чеботарева. Основная серия, кн. 5. Л.–М. ОНТИ, 1937, 158 стр.

243. Сборник, посвященный памяти акад. Дмитрия Александровича Граве. М.–Л. Гостехтеоретиздат, 1940, 326 стр. (Фотоснимок: Д. А. Граве со своими учениками: М.Г. Крейном, Н.И. Ахиезером и Н.Г. Чеботаревым).

244. Лобачевский, Н.И. Полное собрание сочинений. Под общей ред. В.Ф. Кагана, А.П. Котельникова, В.В. Степанова, Н.Г. Чеботарева, П.А. Широкова. Главный редактор В.Ф. Каган. Т. 1. Геометрические исследования по теории параллельных линий. (В печати).

Л.А. Фамина

ОСНОВНЫЕ ДАТЫ ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Н.Г. ЧЕБОТАРЕВА

15 июня 1894 г.	дата рождения (Каменец-Подольский).
1912 г.	окончание Каменец-Подольской гимназии и поступление на физико-математический факультет Киевского университета св. Владимира.
1916 г.	окончание Киевского университета и поступление в аспирантуру к Д.А. Граве.
1918 г.	доцент Киевского университета.
1921 г.	переезд в Одессу, секретарь научно-исследовательской кафедры при Институте народного образования.
1921 г.	найдено новое доказательство теоремы Кронекера-Вебера.
1922 г.	кончина Григория Николаевича (от холеры) — отца Н.Г. Чеботарева.
1922 г.	завершение работы по плотностям множеств простых чисел.
1924 г.	женитьба на Марии Александровне.
1924 г. (январь-сентябрь)	профессор математики в Московском институте гражданских инженеров.
1925 г.	поездка в Германию.
1926 г.	рождение сына Гриши.
1927 г. (26 февраля)	защита докторской диссертации.
1927 г.	переезд в Казань и избрание профессором Казанского государственного университета.
1929 г.	избрание в члены-корреспонденты АН СССР.
1934 г.	выход книги «Основы теории Галуа, ч. 1» в издании ОНТИ., гос. изд-ве техническо-теоретической лит-ры.
1935 г.	выход книги «Теория Галуа» в серии «Математика в монографиях».
1935 г.	назначение директором Института математики и механики при КГУ.

1936 г.	Выход второй части «Основы теории Галуа» в серии «Математика в монографиях».
1939 г.	кончина Веры Николаевны — матери Н.Г. Чеботарева.
1940 г.	присвоение звания «Заслуженный деятель науки РСФСР».
1940 г.	выход книги «Теория групп Ли» в гос. изд-ве техническо-теоретической лит-ры.
1944 г.	награждение орденом Трудового Красного Знамени, присвоение звания «Заслуженный деятель науки ТАССР», награждение орденом Ленина (в связи 220-летним юбилеем АН СССР).
1945 г.	награждение орденом Трудового Красного Знамени (вторым).
1945-1946 гг.	руководитель Физико-технического института при Казанском филиале АН СССР.
2 июля 1947 г.	дата смерти.
1948 г.	выход книги «Теория алгебраических функций» в гос. изд-ве техническо-теоретической лит-ры.
1949 г.	выход книги «Введение в теорию алгебр» по запискам НГ в гос. изд-ве техническо-теоретической лит-ры.
1949 г.	выход книги «Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций» (совместно с Н.Н. Мейманом) в трудах математического ин-та АН СССР (т. 26, с. 1-332).
1949 г.	выход I и II томов собраний сочинений.
1950 г.	выход последнего III тома собраний сочинений Н.Г. Чеботарева в изд-ве АН СССР.

Научное издание

НИКОЛАЙ ГРИГОРЬЕВИЧ ЧЕБОТАРЕВ

(1894–1947)

Подписано в печать 11.06.2019.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 19,53.
Тираж 300 экз. Заказ 115/6

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28

ISBN 978-5-00130-169-1