В.А.Баженов, Ю.В.Ворона, А.В.Перельмутер

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА І ТЕОРІЯ СПОРУД.
НАРИСИ З ІСТОРІЇ

Київ 2016

УДК 624.04
ББК 38.112я73
Б 16

Рецензенти:

Л.М. Лобанов
д-р техн.наук, професор, академік НАН України, заступник директора
з наукової роботи Інституту електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України

Л.С. Ляхович
д-р техн.наук, професор, дійсний член Російської академії архітектури і
будівельних наук, завідувач кафедри будівельної механіки
Томського державного архітектурно-будівельного університету

Б 16 Баженов В.А. Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії /
В.А.Баженов, Ю.В.Ворона, А.В.Перельмутер. – К.: Каравела, 2016. – 428 с.

ISBN 978-966-222-968-8

Книга присвячена історії будівельної механіки і теорії споруд і за задумом представляється у вигляді нарисів розвитку окремих їх напрямів, перелік яких, природно, є відкритим до розширення. При цьому кожному із напрямів притаманна певна історія виникнення і становлення відповідних понять, принципів, ідей, задач і методів їх реалізації.

Викладення змісту за розділами супроводжується фактами з життя і діяльності видатних учених, а також пізнавальними ілюстраціями. Адже, за словами Дж. Максвелла, "наука захоплює нас лише тоді, коли зацікавившись життям великих дослідників, ми починаємо стежити за історією їх відкриттів".

Книга може бути використана як підручник для студентів вищих навчальних закладів при реалізації магістерських програм, вивченні спеціальних курсів тощо. Загалом, вона зорієнтована на студентів і читачів, які вже вивчали обов'язкові курси будівельної механіки і суміжних технічних дисциплін, а також викладачів і науково-технічних працівників.

УДК 624.04
ББК 38.112я73

ISBN 978-966-222-968-8

Передмова

Повага до минулого — ось риса, що відрізняє освіченість від дикунства.

О.С. Пушкін

Винаходити самому дуже добре, але знати і цінувати те, що зроблено іншими — хіба це менше, ніж творчість.

Йо́ганн Во́льфґанґ Ґе́те

Хотілося б прийняти участь, як мінімум — бути присутнім, але якщо не вдалося, то хоча б знати, як це було.

С.І. Зуховицький

Історія механіки як самостійної науки існує близько двох століть, і, звичайно, до неї цілком відноситься відомий афоризм Й.В. Гете: «Історія науки є тим, що це наука сама по собі».

З більш ранніх робіт можна послатися на вступні глави Ж.-Л. Лаґранжа про принципи рівноваги і динаміки в його «Аналітичній механіці» [Лагранж, 1950] і на відповідні глави в загальних працях з історії математики (Кестнера, Монтюкла та ін.) [Вакуленко, Михайлов, 2000].

У другій половині XIX ст. з відкриттям закону збереження енергії і спроби у зв'язку з цим виробити єдиний механістичний опис світу механіка привернула увагу широких кіл натуралістів. У Росії короткий історичний нарис про відкриття основних принципів і загальних законів теоретичної механіки був опублікований Д.К. Бобильовим (1892).

У 1886-1893 рр. вийшла «Історія теорії пружності та опору матеріалів від Галілея до лорда Кельвіна», підготовлена К. Пірсоном по рукопису А. Тодхантера, де на 2200 сторінках наводиться безпосередній переклад більшості робіт з обраної тематики більш ніж за два століття [Todhunter, Pearson, 1960]. Цей твір зберігає свою довідникову цінність і до наших днів.

Новий напрям в історії механіки було закладено на початку XX ст. П. Дюгемом, який відкрив для сучасної науки середньовічну механіку [Duhem, 1903, 1905]. Деякі вчені взагалі вважають дослідження Дюгема початком сучасної історії науки.

Для історії механіки в XIX ст. цікавою є «Енциклопедія математичних наук», яка була видана на початку XX століття в Німеччині і одночасно у Франції. Вона містить ґрунтовні огляди по окремих розділах механіки з обширною бібліографією, що представляють собою цінний історичний матеріал. У складанні оглядів для енциклопедії брали участь багато видатних учених - П. Аппель, Дж. Дарвін, Т. Карман, А.М. Крилов, О. Ляв, Х. Ламб, Р. Мізес та ін.

У другій половині XX століття у США вийшов в світ ряд монографій з середньовічної статики і динаміки, у Франції - дві великі роботи Р. Дюга «Історія механіки» [Dugas, 1950] і «Механіка XVII ст.» [Dugas, 1954].

У 50-і роки почав публікацію своїх історичних досліджень засновник сучасної історії механіки, видатний американський учений К. Трусделл. Йому належать, зокрема, фундаментальні роботи з історії загальних принципів і методів механіки суцільного середовища в XVIII і на початку XIX ст., що ґрунтуються на глибокому аналізі першоджерел.

Дані нариси віддають належне історії виникнення загальних принципів і ідей і стосуються галузі механіки, яку називають будівельна механіка у широкому розумінні цього слова.

Існує відносно невелика кількість книжок, які присвячені історії будівельної механіки, серед яких найбільший вплив на авторів мали роботи В.Л. Кирпичова [Кирпичев, 1903, 1933], С.П. Тимошенка [Тимошенко, 1957], С.А. Бернштейна [Бернштейн, 1957], К. Трусделла [Трусделл, 2002], [Truesdell, 1968], В.І. Феодосьєва [Феодосьев, 1975], К.Е. Кюррера [Kurrer, 2008]. Слід також відзначити змістовні історичні ремарки, викладені у класичних курсах будівельної механіки І.М. Рабіновича [Рабинович, 1950, 1954].

За виключенням книги Е.К. Кюррера усі вони написані досить давно і не завжди відображають важливі елементи історії науки другої половини XX і початку XXI століття. І справа навіть не у тих або інших конкретних результатах, більш важливим є притаманне даному часу більш глибоке осмислення багатьох раніше відомих понять. Саме це і стало однією з причин написання даних нарисів.

На думку авторів, за сучасних умов комп'ютерного проектування дуже важливим є вивчення і засвоєння принципових аспектів теорії, що дозволяє інженеру не тільки змістовно користуватись програмними засобами, а і оцінювати отримані результати, що прямо залежить від розуміння принципів, на яких побудоване програмне забезпечення. Адже, згідно з відомою тезою К.Вейерштрасса, «кінцева мета, яку завжди треба мати на увазі, полягає в тому, щоб зрозуміти основи».

Вкрай важливим є співвідношення між знанням і розумінням, яке приходить тільки тоді, коли явище розглядається не тільки з різних сторін, а і у процесі історичного становлення.

Відома книжка С.П. Тимошенка [Тимошенко, 1957], що неодноразово перевидавалась, написана на основі лекцій з історії опору матеріалів, які він читав для студентів на протязі 25 років, а його учитель В.Л. Кирпичов протягом багатьох років очолював науковий гурток, де вів бесіди про механіку, які покладені в основу книжки «Беседы о механике» [Кирпичев, 1933].

В.Л. Кирпичов і С.П. Тимошенко відіграли видатну роль в організації освіти і науки в Україні. В.Л. Кирпичов був фундатором і першим директором провідних вищих навчальних закладів в Україні: Харківського технологічного інституту і Київського політехнічного інституту. С.П. Тимошенко був одним із засновників Української Академії наук у 1918 р. Уперше у світі за його пропозицією технічним наукам було надано ранг академічних наук, і в складі академії був організований підрозділ «прикладного природознавства».

Повертаючись до фундаментального твору С.П. Тимошенка [Тимошенко, 1957], треба сказати, що коли автори задумали цю роботу, наявність такого видатного попередника відіграла важливу і неоднозначну роль. З одного боку хотілося доповнити дослідження і продовжити його у часі, але з іншого боку ми були не впевненні щодо своїх можливостей витримати заданий С.П. Тимошенком рівень. Тому автори не наважилися повторити такий же широкий підхід до проблеми і вирішили обмежитися тільки деякими нарисами.

Тематика наведених нижче нарисів, присвячених вибраним питанням будівельної механіки і теорії споруд, не претендує на всеохоплююче представлення їх історії і, безумовно, є фрагментарною. За задумом ці нариси можуть бути прочитані незалежно, але оскільки деякі їх елементи перетинаються, не завжди вдалося уникнути повторів. Що стосується тематичного відбору, то він, природно, визначався інтересами авторів, є відкритим до розширення і не претендує на ранжування за важливістю тих або інших проблем.

Читачеві, який захоче самостійно розширити тематику наших нарисів, ми можемо порекомендувати пошук в Інтернеті, де і автори розшукували ті чи інші факти з історії будівельної механіки. І якщо таке станеться, то ми будемо вважати свою роботу корисною.

Липень 2016 р. *Автори*

Література

Бернштейн С.А. Очерки по истории строительной механики. – М.: Госстройиздат, 1957. – 236 с.

Вакуленко А.А., Михайлов Г.К. Клиффорд Трусделл и современная история механики. Вопросы истории естествознания и техники, 2000. – № 3.

Кирпичев В.Л. Лишние неизвестные в строительной механике. Расчет статически неопределимых систем. – К.: Изд-во Кульженка, 1903.

Кирпичев В.Л. Беседы о механике. – Изд. 2-е. – М.: Гостехтеориздат, 1933. – 270 с.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.

Лагранж Ж. Аналитическая механика. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – .Т. 1. – 594 с., Т. 2. – 440 с.

Мах Э. Механика. – С.-Пб., 1909. – 448 с.

Мах Э. Механика. Историко-критический очерк её развития. – Ижевск: РХД, 2000. – 456 с.

Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Пер. с лат. А.Н. Крылова.– М.: Наука, 1989.

Рабинович И.М. Курс строительной механики стержневых систем. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре.Т.1. Статически определимые системы, 1950. – 387 с., Т. 2. Статически неопределимые системы, 1954. – 544 с.

Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. – М.: Гостеориздат, 1957. – 536 с.

Трусделл К. Очерки по истории механики. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 316 стр.

Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 172 с.

Dugas R. Histoire de la mécanique. Neuchâtel: Griffon, 1950.

Dugas R. La mécanique au XVII siecle. Neuchâtel: Griffon, 1954.

Duhem P. L'évolution de la mécanique, Paris, A. Hermann, 1905.

Duhem P. Les Origines de la statique, 1903.

Galileo Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. In Leida, 1638.

Kurrer K.-E. The History of the Theory of Structures. – Berlin: Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2008. – 848 p.

Todhunter I., Pearson K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to lord Kelvin. V. I: Galilei to Sain-Venant – 936 p. V. II. Saint-Venant to lord Kelvin. Part I – 762. p. Part II – 546 p. – New-York: Dover Publications. Inc. – 1960.

Truesdell C.A. Essays in the history of mechanics. – Berlin: Springer Verlag, 1968. – 384 p.

Нарис 1

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА І НЕ ТІЛЬКИ: РОЗВИТОК ВИМОГ ДО БЕЗВІДМОВНОСТІ СПОРУД

Кожна країна і кожне місто — та, власно кажучи, і кожна людина — самі вирішують, який рівень безпеки є прийнятним. А деякі проектувальники, здається, інколи забувають, що так званий коефіцієнт безпеки може захистити від невміння і чиїх завгодно помилок, але тільки не від їх власних.

Р. Бірн

Вступ

Забезпечення міцності і стійкості будівельних конструкцій є одним з найголовніших завдань будівельної механіки, причому вирішення його складається, як мінімум, з двох частин:

• аналіз роботи конструкції, визначення її реакції на зовнішні впливи, оцінка екстремальних режимів і все інше, чим займається будівельна механіка як наука і про що пишуть підручники з будівельної механіки;

• розробка і обґрунтування правил щодо недопущення руйнування конструкції і забезпечення конструктивної надійності, тобто все те, що здійснюється за допомогою правил розрахунку, представлених у будівельних нормах (у технічних регламентах).

У світі сучасного комп'ютерного проектування запас міцності є дивною річчю: навантаження і параметри міцності матеріалів задані з точністю 10-20%, зусилля обчислені з точністю 0.01%, а всередині деяких нормативних рекомендацій часом заховані запаси міцності, що досягають 50-100%. У минулому запас міцності зазвичай був простим числом, включеним в нормативний документ, але сучасні норми містять складні системи частинних коефіцієнтів надійності (запасів міцності), які не завжди дають можливість оцінити дійсний резерв безвідмовності. Скільки в цьому науки і скільки вольових рішень (щоб не сказати чорної магії)? Які значення запасів міцності використовувалися і як вони змінилися протягом часу? Нарис розглядає, як змінювалися вітчизняні та зарубіжні норми проектування, які запаси міцності вони передбачали, як відбувався обмін ідей і запозичення методик і як, нарешті, змінювалися підходи до самої мети нормування.

Сучасний інженер найчастіше вважає, що акуратне дотримання вказівок норм проектування є необхідною і достатньою умовою забезпечення безвідмовності створюваних конструкцій. Але перевірка показує, що багато старих споруд, які не відповідають вимогам сучасних норм, існують і прекрасно працюють. Отже, чи є наші вимоги абсолютно необхідними? Відповідь на це питання, мабуть, є негативною, але тоді виникає питання про те, яким же чином наші попередники домагалися виконання вимог безвідмовності. Без знання історії це питання важко зрозуміти.

Історія розвитку вітчизняних і зарубіжних норм проектування, як будь-яка історія (якщо тільки вона не представлена тенденційно) дає не тільки фактичні знання про минулий досвід, а й в деякій мірі дозволяє прогнозувати тенденції розвитку проблеми. На думку авторів, сучасні норми перебувають на порозі нового етапу. Діючі у нас і в інших країнах підходи до нормування майже не враховують той факт, що сьогоднішній проект створюється за допомогою комп'ютерного аналізу, і вже тільки це є тенденцією до вдосконалення норм.

1.1. Передісторія

Як показує багатовіковий досвід будівництва, проблема міцності і безпеки споруд існувала завжди, актуальна вона і зараз. Розвиток філософії безпеки проектованих будівель і споруд проходив окремими етапами і у своєму основному руслі завжди розвивався під гаслом все більш детального прогнозування роботи конструкцій, вивчення природи діючих на ці споруди навантажень, більш виразного опису вимог до конструктивної форми і умов виконання таких вимог.

Історія будівництва свідчить, що навіть в найбільш досконалих древніх спорудах можна знайти грубі помилки, які виявляють незнання основ опору матеріалів та теорії споруд. Забобонний страх перед непізнаваною таємницею матеріалу змушував будівельників навіть звертатися по допомогу до потойбічних сил із залученням молитов (що триває і зараз), замовлянь і навіть жертвоприношень. З давніх часів професія будівельника вважалася дуже відповідальною, і можливі будівельні помилки мали дуже серйозні наслідки для тих, хто їх припускався.

Стела Хамурапі

Норми ж по забезпеченню безпеки конструкцій були, як правило, дуже нечіткими. Зазвичай вважається, що самі ранні відомі письмові будівельні норми і правила включені в Кодекс Хаммурапі, який датується приблизно 1772 роком до н.е. Там сказано:

- Якщо будівельник будує будинок для когось, і не будує його належним чином, а будинок, який він побудував, обрушиться і вб’є його власника, тоді цей будівельник має бути страчений.
- Якщо буде вбито сина власника, то син будівельника має бути страчений.
- Якщо буде вбито раба власника, то будівельник має заплатити за раба власнику будинку.
- Якщо буде знищене майно, то будівельник має відшкодувати все, що було зіпсовано, і оскільки він не будував належним чином, і будинок, який він побудував, впав, то він повинен повторно звести будинок власним коштом.
- Якщо будівельник будує будинок для когось, навіть при тому, що він ще не закінчив будівництво, і якщо при цьому стіни виявляться зруйнованими, то будівельник повинен відбудувати стіни за свій власний рахунок.
- Якщо людина виявила недбальство при зміцненні греблі, яка знаходиться на його землі, то в якості покарання він повинен відшкодувати збитки аж до продажу його самого в рабство.

Будівельні норми і правила можна відшукати навіть в Біблії (Другозаконня, глава 22, вірш 8): «Коли збудуєш новий дім, то зробиш поруччя для даху свого, і не напровадиш крови на дім свій, коли хто-небудь упаде з нього».

Вироблені практикою регламенти для виконання тих чи інших будівельних робіт існували, наприклад, в Стародавньому Римі. Особливо це стосувалося дорожнього будівництва, принципово важливого для імперії, що простяглася на величезних просторах. Деякі побудовані тоді дороги експлуатуються до сьогоднішнього дня. Дороги Стародавнього Риму будувалося відповідно до вимог перших «технічних умов», так званих «12 таблиць», розроблених ще в 450 р. до н.е.

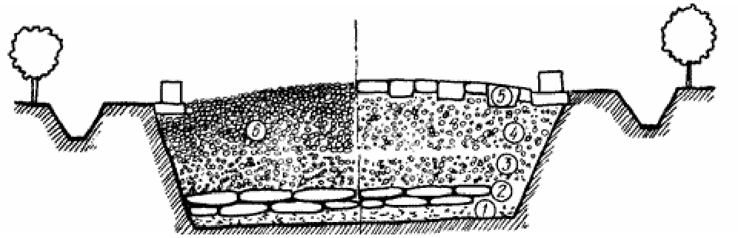


Рис. 1.1. Профіль римської дороги: 1 – підстилаючий шар, 2 – кам’яні плити, 3, 4 – бетон, 5 – – кам’яні плити, 6 – крупний гравій або щебінь

Загальна товщина римських доріг складала від 80 до 130 см, хоча окремі з них досягали 240 см. Як правило, дороги були багатошаровими, з чотирьох-п'яти шарів (рис. 1.1). Нижній шар представляв собою основу з кам'яних плит товщиною 20-30 см, які укладалися на добре ущільнене земляне полотно через розчинну стяжку, з подальшим вирівнюванням їх піском. Другий шар товщиною 23 см складався з бетону (битого каменю, покладеного в розчин). Третій шар товщиною теж 23 см був з дрібногравійного бетону. Останній, верхній шар дороги покривався великими кам'яними блоками площею 0,6-0,9 м^2 та товщиною близько 13 см.

Вдалі інженерні рішення, які пройшли перевірку практикою, повторювалися[1], їх було докладно висвітлено, наприклад, в трактаті Вітрувія «Десять книг з архітектури» (13 р. до н.е.), єдиній збереженій античній роботі з архітектури [Вітрувій, 1936]. Автор узагальнив у трактаті досвід грецького і римського будівельного мистецтва, розглянув комплекс супутніх містобудівних та інженерно-технічних питань, практичних правил будівництва і принципів художнього сприйняття. В результаті трактат став енциклопедію технічних знань свого часу.

Перший кодекс вимог «Будівельний статут» на теренах Київської Русі з'явився в XI столітті за Ярослава Мудрого. Він визначав місцевість і матеріали, придатні для будівництва, висоту будівель, давав рекомендації щодо розташування приміщень в будівлях.

Ці та інші вказівки, правила, традиції тощо крім іншого мали на меті запобігти (в міру тодішнього розуміння) руйнуванню будівель або зробити їх такими, щоб неминучий знос міг бути компенсований ремонтом.

1.2. Перші дослідження

Існують два типи руйнування, при яких відновлення або реставрація рідко має сенс - руйнування від вогню під час пожежі і обвалення конструкцій. Саме тому

---

[1] Можливо, звідси йде традиція безсоромного копіювання, яка збереглася в архітектурі і засуджується в інших видах мистецтва.

обидві ці форми руйнування будівель з давніх часів були об'єктами певних запобіжних заходів. Спеціальні заходи нормативного характеру, які стосуються пожежної безпеки будівель, існували в Стародавньому Римі, а в Лондоні вони з'явилися в XVII столітті, коли після великої пожежі 1666 року Закон, складений сером Метью Хейлом (Matthew Hale), відрегулював відновлення міста.

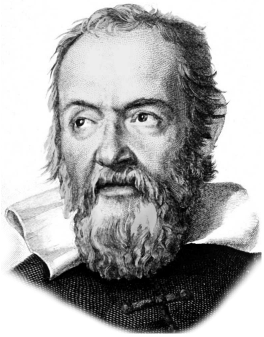
Що стосується забезпечення міцності, то тут справа йшла помітно складніше, і відповідні правила з'явилися значно пізніше. Неможливо було встановити вимоги щодо проектування тих чи інших конструкцій до тих пір, поки не були розроблені теоретичні основи їх розрахунку. А почалося це з праць Галілея, опублікованих в 1638 р., коли вийшли його знамениті «Бесіди і математичні докази, що стосуються двох нових галузей науки» [Галілей, 1964]. Однією з цих галузей було вчення про міцність.

Як пише С.О. Бернштейн [Бернштейн, 1957]:

«*Може здатися дивним, що це питання не ставилося до Галілея протягом довгих століть історії людської культури, хоча від античної давнини і середньовіччя дійшли до наших днів чудові зразки архітектури і мостобудування. І тим не менш спроби знайти догалілеївські роботи про міцність залишилися безрезультатними.*

Тільки Леонардо-да-Вінчі, цей універсальний геній, який вивчав все (і жодного дослідження не довів до кінця), займався проблемою міцності і стійкості раніше Галілея, але його праця залишилася неопублікованою і тому не вплинула на розвиток науки про міцність».

Далеко не для будь-якої науки можна прямо назвати ім'я її основоположника. У більшості випадків нова гілка науки лише поступово відходить від старого стовбура. І це не дивно: для створення нової науки потрібно побачити нові шляхи, потрібно сказати принципово нове слово, а це під силу тільки великим ученим. Галілей сказав таке нове слово: він перший в історії людства поставив питання про міцність тіл і перший спробував його вирішити.



Галіле́о Галіле́й
(1564 — 1642)
італ. Galileo di Vincenzo Bonaiuti de Galilei

Галілей розглядав міцність тіл в момент їх руйнування (кажучи сучасною мовою – в граничному стані). Його зовсім не цікавило, яким шляхом і через які етапи тіло дійшло до цього стану. Підхід Галілея був прийнятий без заперечень, і всі нечисленні в ту епоху експерименти (а тоді це був єдиний спосіб дослідження) ставилися з єдиною метою – знайти величину руйнівного вантажу і форму руйнування.

Відсутність експериментальних даних про поведінку конструкцій при високих навантаженнях змушувала вдаватися до більш-менш імовірних гіпотез про схему руйнування, вносячи цим в розрахунок елемент умовності і сваволля.

Шарль Огюсте́н де Куло́н

(1736 — 1806)

фр. Charles-Augustin de Coulomb

Особливо чітко це можна побачити в історії розрахунку арок. Типовою в цьому напрямку можна вважати роботу Кулона [Coulomb, 1773], який постулював чотири можливих схеми руйнування арки (рис. 1.2), з яких він знайшов чотири граничних значення для розпору: дві границі $H_{\text{v}}^{\max}, H_{\text{v}}^{\min}$ – за обертаннями і дві границі $H_{\text{s}}^{\max}, H_{\text{s}}^{\min}$ – за зсувами. Якщо обидві нижні границі є меншими за обидві верхні, наприклад, якщо $H_{\text{s}}^{\min} < H_{\text{v}}^{\min} < H_{\text{s}}^{\max} < H_{\text{s}}^{\max}$, то рівновага склепіння є можливою, причому дійсний розпір буде розташований між внутрішніми членами цієї низки нерівностей; якщо ж одна з нижніх границь є більшою за одну з верхніх, то рівновага неможлива.

Знання границь зміни або навіть точного значення руйнівного навантаження не давало відповіді на питання, як на практиці розпорядитися цим знанням, і практики-будівельники повинні були вирішувати цю загадку згідно своєму розумінню.

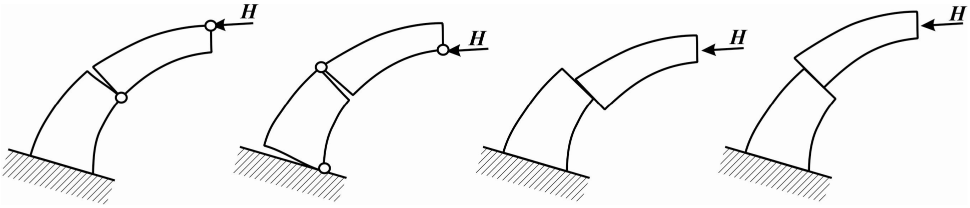


Рис. 1.2. Чотири схеми руйнування арки за Кулоном

А вони, як і їхні пращури, вирішували це питання інтуїтивно, методом численних спроб і помилок, вони вчилися на уроках аварій і обвалень конструкцій. Кожна аварія додавала будівельникам нові знання, ставила нові завдання. Коли ж знань бракувало, в інженерні розрахунки вводили (і вводять зараз) *коефіцієнт запасу*. Оскільки ніхто не знав, які непередбачувані, непізнані явища враховує цей коефіцієнт, і чи повинен він бути саме таким, а не меншим, він був, по суті, *коефіцієнтом незнання.*

1.3. Допустимі напруження

Теоретичні основи розрахунку конструкцій сформульовані в методах будівельної механіки, яка оформилася як самостійна наукова дисципліна до середини XIX століття. До цього моменту виявилося, що наука XVIII століття з її умоглядними прийомами пошуків граничного стану неспроможна вирішити найпростішу задачу – розрахувати просту балку на згин, і не здатна саме тому, що не може відповісти на питання: як же працює балка під тим навантаженням, для несення якого вона створена?

Клод-Луї Нав'є
(1785 — 1836)
фр. Claude-Louis Marie-Henri Navier

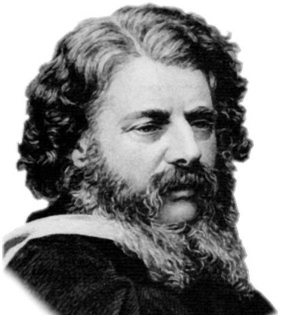
Докорінний злам застарілого підходу був здійснений роботами К.-Л. Нав'є, який рішуче встав на шлях вивчення дійсної роботи споруди під навантаженням, на шлях його розрахунку в робочому стані.

Різниця між старим (Галілей) і новим (Нав'є) підходами полягав у наступному:

- Принцип граничного або кінцевого стану виходить зі схеми ймовірного руйнування конструкції і визначає величину навантаження, при якому таке руйнування може статися. Допустиме навантаження визначається діленням руйнівного навантаження на запас міцності.
- Принцип робочого або початкового стану визначає напружений і деформований стан конструкції за робочих, дійсних навантажень, приймаючи, що граничний стан повністю подібний до робочого, так що відношення навантажень, зусиль, напружень і переміщень в обох станах є однаковим і дорівнює запасу міцності.

За такого підходу достатньо вивчити робочий стан, тобто напруження і переміщення при розрахунковому навантаженні і знайти їх відношення до руйнівних.

Оскільки при цьому гранична величина напруження для даного матеріалу, яка при діленні на запас міцності дає так зване допустиме напруження, вважається відомою з досвіду, то весь розрахунок зводиться до порівняння дійсних робочих напружень з допустимими напруженнями. З цієї причини розрахунок в робочому стані часто називають розрахунком за допустимими напруженнями.



Вільям Джон Ренкін
(1820 — 1872)
англ. William John Macquorn Rankine

Лишалося тільки вирішити одне проте принципове питання: яким же має бути допустиме напруження?

В.Дж. Ренкін, знаний шотландський інженер, фізик і механік, визначив коефіцієнт запасу як відношення границі міцності матеріалу до максимально допустимого напруження при дії дійсної або робочого навантаження на конструкцію. Ренкін також вказав на відмінність між постійно діючим навантаженням, яке може бути точно визначене, і тимчасовим навантаженням, величина якого не може бути встановлена з такою самою точністю. Він вважав прийнятним значення коефіцієнта запасу k=4,0.

До кінця XIX і на початку XX ст. це допустиме робоче напруження було включено до будівельних норм для різних матеріалів і будівельних конструкцій.

Допустимі напруження, прийняті в різних країнах, помітно відрізнялися одне від одного. Так, для конструкційної сталі в Англії допустимі зусилля були засновані на чотириразовому запасі міцності *по відношенню до середньої границі текучості*, яка дорівнювала приблизно 432-494 Н/мм². Закон 1909 року Ради Лондонського графства визначив допустиме напруження при згині, розтягу і стиску величиною 116 Н/мм². Для конструкцій зі зварювального заліза в Росії Урочним положенням [Де Рошефор, 1910] були встановлені допустимі напруження, які дорівнюють приблизно 80 Н / мм² для розтягу і 65 Н / мм² для стиску. А в Німеччині ці величини дорівнювали відповідно 115 і 95 Н / мм².

Пізніше значення допустимих напружень неодноразово переглядалися і до сорокових років двадцятого століття для сталевих конструкцій вони приблизно відповідали дворазовому коефіцієнту запасу, але вже *по відношенню до бракувального мінімуму границі текучості* $\sigma_т$, а не до його середнього значення.

У Радянському Союзі, наприклад, для сталі марки Ст3 значення $\sigma_т$ приймалося 240 Н/мм². Коефіцієнт запасу враховував багато факторів, які несприятливо впливали на роботу конструкцій і, зокрема, залежав від числа і характеру навантажень, на яке розраховувалася конструкція. До 1942 р. найбільший коефіцієнт запасу $k = 1,7$ і найменше допустиме напруження $[\sigma] = 140$ Н/мм² приймалися при розрахунках на навантаження, що діяли постійно або часто співпадали, наприклад постійні навантаження і сніг. При урахуванні більшого числа і більш випадкових навантажень (вітер ураганної інтенсивності, вплив температури) допустиме напруження приймалося $[\sigma] = 170$ Н/мм^2, а $k = 1,4$.

Планомірне зниження коефіцієнтів запасу на основі накопичуваного досвіду було скориговано умовами дефіциту матеріалів під час Другої світової війни. У Радянському Союзі в 1942 році нормами військового часу значення допустимих напружень для сталевих конструкцій були підвищені до 160 і 180 Н/мм^2, коефіцієнти запасу приймалися відповідно 1,5 і 1,33. А для залізобетонних конструкцій, що розраховуються по стадії руйнування, були прийняті змінні коефіцієнти запасу, функціонально залежні від відношення тимчасових навантажень до постійних [У 37-42].

Аналогічні зміни були проведені і в Великобританії, де до 1939 р. коефіцієнт запасу для сталевих балок і колон дорівнював 1,8, а під час Другої світової війни (1939-45) для сталевих балок він був зменшений до 1,6[2]. Після війни в 1948 році цей коефіцієнт був збільшений до 1,65-1,7. Для колон криві допустимих напружень були засновані на коефіцієнті запасу 2,0 до 1964 року, коли він був знижений до 1,7.

Слід зауважити, що в разі поздовжнього згину коефіцієнт запасу змінювався більш витонченим способом. Щоб отримати допустиме напруження для центрально стиснутого стержня до теоретичного значення критичного напруження вводиться коефіцієнт запасу, який можна представити у формі добутку звичайного коефіцієнта запасу k, що використовується при розтягу, і спеціального коефіцієнта k_1, що

---

[2] Зміну було оформлено у вигляді поправки до британського стандарту BS 449 [Revision] «*як надзвичайний захід і в очікуванні більш детального розгляду питання*». Було сказано, що «*дозвіл для збільшення напруження повинен перестати діяти по закінченні періоду 6 місяців після кінця війни, якщо до того часом поправка не буде затверджена як постійна зміна до стандарту згідно нормальної процедури*».

враховує зменшення несучої здатності за рахунок випадкових ексцентриситетів. Виявилося, що короткі стержні мають невеликі дефекти, і їх залишкові прогини малі, також невеликі залишкові прогини у дуже гнучких стрижнів які реагують на випадкові впливу пружно. Тому у вітчизняних нормах за рекомендацією Н.С. Стрілецького приймається k_1=1 для гнучкості λ=0, k_1=1,4 для гнучкості λ=90 і k_1=1,15 для гнучкості λ=200, що дає при k=1,5 коефіцієнти запасу, які дорівнюють відповідно 1,5; 2,1 і 1,725 (див. жирні точки на рис. 1.3).

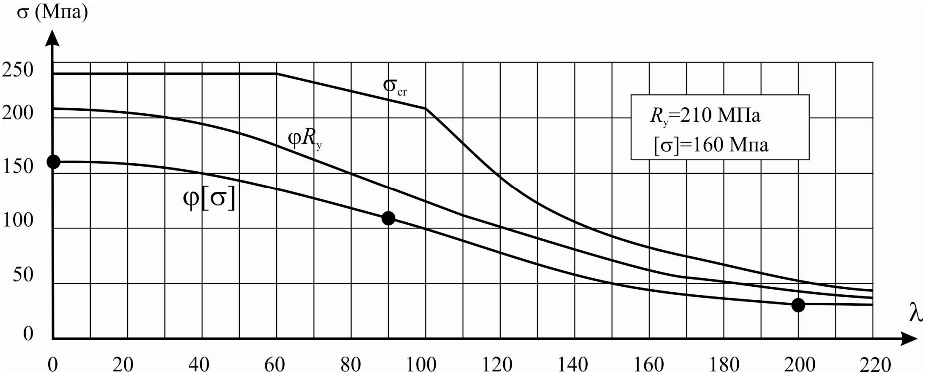


Рис 1.3. Допустимі напруження для стиснутого стержня згідно НиТУ 121-55

Аналогічні міркування були присутні при розробці норм Великобританії [Alasdair , 2011]. Криві допустимих напружень з Британських стандартів різних років, які показані на рис. 1.4, наочно демонструють непропорційні зміни у стержнів різної гнучкості.

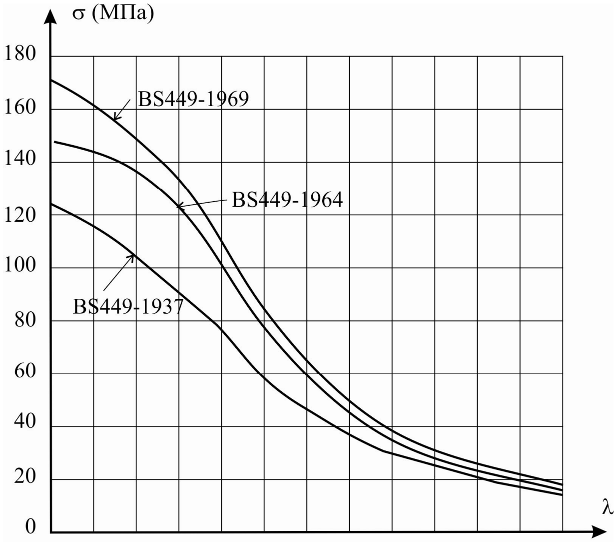


Рис. 1.4. Допустимі напруження для стиснутого стержня згідно BS449

1.4. Руйнівне навантаження

Розрахунок за робочим станом полягає в тому, що найбільші напруження, які виникають при розрахунковому навантаженні, порівнюються з допустимими напруженнями для даного матеріалу. Це формулювання вже містить два положення, які потребують уточнення, а саме: які напруження підлягають порівнянню (а), і як встановлюється величина допустимого напруження (б).

Відповідь на перше питання вимагає прийняття певного критерію міцності, і в цьому полягає перше допущення (в деяких випадках формулювання такого допущення межує із свавіллям).

Якщо позначити вирішальне напруження через $\max R$, а його допустиме значення при простому розтягу через $\left[R_p\right]$, то розрахунок за робочим станом для будь-якого критерію міцності призводить до нерівності

$$\max R \leq \left[R_p\right]$$

Якщо деякий критерій міцності обраний, і тим самим ліва частина граничної нерівності встановлена, залишається відповісти на друге питання: як же визначається допустиме напруження, тобто як відшукати праву частину цієї нерівності. Було прийнято допущення, яке висловив в явній формі Сен-Венан в 1870-х роках, про те, що можна обмежитися визначенням допустимого напруження для простого розтягу або стиску.

Є ще одне допущення, яке використовується неявно: досягнення вирішальним напруженням граничного значення хоча б в одній єдиній точці конструкції означає досягнення граничного стану для всієї конструкції. Легко зрозуміти, що ця умова виконується тільки для зовсім крихкого матеріалу, який діє за законом Гука аж до руйнування. Тому третє допущення можна назвати умовою крихкості. Саме воно виявилося найбільш уразливим.

Умова крихкості також прийшла в протиріччя з досвідом ще в кінці XIX століття. Одним з перших сигналів про його помилковість був результат спроби уточнити розрахунок ферм шляхом урахування жорсткості вузлів. Виявилося, що вплив жорсткості вузлів призводить до значного підвищення напружень в стержнях ферми внаслідок їх згину в порівнянні з розрахунковими величинами, які отримують звичайним шляхом, використовуючи гіпотезу шарнірних вузлів, хоча, як випливало з досвіду, результати «шарнірного розрахунку» ведуть до цілком надійних конструкцій. Наступна серія ударів була нанесена в результаті дослідного вивчення поведінки конструкцій із пластичних матеріалів при навантаженнях, близьких до граничних. У численних експериментах чітко виявилося, що в роботі статично невизначуваних конструкцій відбувається якісна зміна після виходу з чисто пружної області.

Зміст всіх цих явищ, цілком ясно усвідомлених вже на початку XX століття, зводився до наступного: з рівності найбільших напружень не випливає рівність запасів міцності або, інакше, подібність між робочим і граничним станом можлива лише для ідеально пружного цілком крихкого матеріалу. Дуже гостро постало питання про аналіз граничного стану конструкції, її поведінки в момент руйнування. Зокрема, це стосувалося дослідження пластичних деформацій і аналізу ефектів геометричної нелінійності.

Так для геометрично нелінійної пружної конструкції, наприклад, гнучкої пластини суднової обшивки, суть проблеми ще в 1908 році чітко виклав І.Г. Бубнов, який показав, що, вводячи коефіцієнт запасу до значення навантаження або до значення напруження, ми отримуємо різні результати, і переконливо обґрунтував необхідність першого підходу [Бубнов, 1908].

Що стосується фізичної нелінійності, то питання про застосування теорії пластичності до поведінки затиснених балок після стадії пружної деформації було вперше піднято Габором Казінчі [Kazinczy, 1928], який показав, що для балки із затисненими кінцями теорія пластичності дає можливість досягти приблизно 25-и відсоткової економії матеріалу. Уже цього було достатньо для того, щоб привернути увагу до проблеми.

Але найбільше занепокоєння викликали залізобетонні конструкції, які стали масовими в першій чверті XX століття. На перших порах, тобто в кінці XIX століття, залізобетонні конструкції розраховувалися за допустимими напруженнями, з використанням законів поведінки пружних матеріалів. Але вже в 1904 році А.Ф. Лолейт доповів роботу «О коэффициенте прочности железобетонных сооружений» [Лолейт, 1904] в якій показав, що розрахунок залізобетонних елементів при згині у пружній стадії їх роботи абсолютно неприпустимий. Він писав: «критичне навантаження, яке відповідає миттєвій рівновазі, що безпосередньо передує руйнуванню ... дає можливість визначити запас міцності з точністю, що задовольняє найсуворішим вимогам практики».

***Артур Фердінандович Лолейт** (1868-1933)*
рос. Артур Фердинандович Лолейт

Артур Фердінандович Лолейт став ініціатором включення методу руйнівних навантажень в норми проектування залізобетонних конструкцій. У 1928 році Комісія з будівництва при Раді Праці та Оборони доручила А.Ф. Лолейту скласти проект нових технічних умов та норм на основі відгуків різних відомств і установ, отриманих в різний час на початковий проект, складений Бюро нормування Держплану СРСР в 1926 р.

Проект був виданий в 1929 р. під назвою «Технічні умови і норми проектування і зведення бетонних і залізобетонних споруд», був розісланий фахівцям і організаціям на рецензування, а в квітні 1930 р. був винесений на обговорення першої Всесоюзної конференції по бетону і залізобетону в Москві. З доповіддю «Новий проект норм» виступив А.Ф. Лолейт [Лолейт, 1930]. Оскільки існували і конкуруючі пропозиції, що стосувалися, правда, багатьох деталей, але не головної думки про використання руйнуючих навантажень, було вирішено виконати перевірочні експерименти [Лолейт, 1933]. Результати експериментів дали можливість включити підхід А.Ф. Лолейта в норми, що і було зроблено ще через кілька років (ОСТ 90003-38).

Ухвалення методу розрахунку за руйнівними зусиллями як закону означало не тільки надання переваги одного методу в порівнянні з іншим. Це не просто вибір способу розрахунку, що дає найбільш точні результати. Це означало надання переваги науковому експерименту, як основі побудови теорії, що мало далеко ідучі наслідки.

Ідеї, аналогічні тим, що були сформульовані А.Ф. Лолейтом, відстоював і американський інженер Чарльз С. Вітні. Він їх висловлював, починаючи з 1926 року [Whitney, 1929], а в 1937 р. Вітні опублікував детально представлений проект норм, заснований на методі розрахунку за руйнівними навантаженнями, який з деякими модифікаціями в 1956 р. було введено в Будівельні норми Американського інституту бетону в якості оптимального методу проектування. Мабуть цьому сприяло і те, що з 1955 року Вітні був обраний президентом зазначеного інституту.

Чарльз С. Вітні
(1892 – 1959)
англ. Charles S. Whitney

Слідом за залізобетонними конструкціями почали переглядати і загальні підходи до методу руйнівних навантажень.

У будівельній механіці нерозрізна балка є своєрідним пробним каменем для будь-якого нового методу розрахунку статично невизначуваних систем. Тому саме до неї в першу чергу були застосовані нові ідеї розрахунку, які виникли з розгляду пластичних деформацій матеріалу. З теоретичного аналізу випливає, що дійсний запас міцності в нерозрізній балці значно вище, ніж випливає зі звичайного «пружного» розрахунку. Експериментальна перевірка, показала, що дійсна поведінку нерозрізний балки дещо відрізняється від цієї теоретичної схеми, оскільки вирівнювання моментів в найбільш напружених перетинах не відбувається внаслідок зміцнення матеріалу, що пройшов площадку текучості. Завдяки цьому дійсний запас міцності ще трохи вище, ніж той, який випливає з теоретичного розрахунку.

Однак перехід від граничного напруження до руйнівного зусилля не змінив основної парадигми розрахунку за допустимими напруженнями. Просто замість граничного напруження матеріалу на коефіцієнт запасу ділилося руйнівне навантаження залізобетонного елемента.

Слід зазначити, що в практиці проектування використовуються і інші визначення коефіцієнта запасу. Наприклад, в механіці ґрунтів широкого поширення набула теорія міцності Мора-Кулона, відповідно до якої руйнування на деякій площадці не відбувається, якщо виконується нерівність

$$\tau \le \sigma \cdot \mathrm{tg}\varphi + c$$

де τ - дотичне, σ - нормальне напруження, що діє на розглядуваній площадці; φ - кут внутрішнього тертя; c - питоме зчеплення. Коефіцієнт запасу іноді визначається як величина, на яку слід розділити параметри опору ґрунту $\mathrm{tg}\varphi$ і c, щоб умова міцності

Мора-Кулона перетворилася на рівність. Такий підхід обґрунтовується тим, що на відміну від більшості конструкцій, де мінливість навантаження є набагато вищою за мінливість опору, у ґрунтових основ найбільш мінливими чинниками є розрахункові характеристики ґрунту. Тому при оцінці коефіцієнта запасу логічніше варіювати не навантаження, а опір.

Іншою розрахунковою проблемою при розрахунках з використанням загального коефіцієнта запасу було визначення проектних навантажень. Постійне навантаження могло бути розраховане за розмірами конструкцій і відомою масою матеріалів. Тимчасове навантаження спочатку оцінювалося дуже приблизно. Можна було визначити навантаження від щільної юрби людей, яке, як вважали в Англії, де відповідні вимірювання були виконані вперше [Adams, 1894], становить 150 фунтів на кв. фут (~700 кг / м^2). Таке навантаження, однак, можливе тільки в умовах паніки, і коефіцієнт запасу повинен частково це враховувати. Тому тимчасова навантаження від 40 до 80 фунтів на кв. фут (від 200 до 400 кг / м^2) розглядалося як прийнятне для будівель, за винятком складів, в яких навантаження може бути вище.

Мітчелл, дослідження якого виконувалися 20 років по тому, був уже в змозі досягти більш точного урахування ефекту максимального скупчення людей, проводячи спостереження за числом людей в обідню пору, в вільні дні тижня, під час розпродажу або безпосередньо перед святом в залежності від призначення магазину і його розміщення. Це дало дослідникові величину навантаження в 50 фунтів на кв. фут від натовпу на верхній частині сходів і біля виходів з магазинів. Таким чином, більш точні дослідження показали тенденцію до зниження первинних величин максимальних навантажень.

Протягом XIX століття колони незмінно розраховувалися на повне тимчасове навантаження від всіх підтримуваних ними поверхів. Після 1900 р. місцеві будівельні норми Чикаго допускали зниження тимчасового навантаження, оскільки вважалося малоймовірним, щоб одночасно на всіх поверхах тимчасове навантаження було максимальним. Норми передбачали розрахунок на максимальне тимчасове навантаження тільки конструкцій верхнього поверху, на 95% навантаження - передостаннього поверху, на 90% - ще поверхом нижче і так далі, поки тимчасова навантаження не знизиться до 50%, які приймалися в розрахунок для всіх нижніх поверхів. Аналогічні рекомендації були прийняті в Лондонських будівельних правилах в 1909 р. і до сих пір використовуються в багатьох будівельних нормах.

Проблема сполучення навантажень важлива також в зв'язку з урахуванням вітрового навантаження. Перші приклади урахування вітрового навантаження були засновані на аналогії з правилами проектування залізничних мостів, які були прийняті після відомого обвалення мосту через гирло річки Тей в Шотландії, що сталося в 1879 році при ураганному вітрі [Перельмутер, 2011]. Вважалося, що навряд чи міст буде нести максимальне вертикальне тимчасове навантаження, коли при штормовому вітрі виникнуть великі горизонтальні навантаження. Таким чином, було прийняте правило допускати в разі поєднання вертикальних навантажень і вітрового навантаження підвищення нормальних напружень на 20%. Це правило було перенесено в практику проектування багатоповерхових будівель і включено спочатку в американські, а потім в англійські будівельні норми, хоча його обґрунтованість залишалася під питанням.

У 20-х роках XX століття нова галузь промисловості - літакобудування стимулювала пошуки більш точних основ визначення коефіцієнта запасу. Розумне його зменшення, яке не викликає небезпеки для надійності споруди, природно, дає економію матеріалів і грошових коштів. Це важливо в будівництві, але особливо в літакобудуванні, адже занадто важкий літак взагалі не зможе злетіти. Тому коефіцієнт запасу в конструкціях літаків значно менше, ніж в будинках, однак цей нижчий запас міцності поєднується з ретельним контролем якості матеріалів, частою перевіркою технічного стану конструкцій, заміною пошкоджених частин, точністю методів проектування конструкцій, заснованих на математичних розрахунках. Методи проектування, розроблені для літакобудування, певною мірою вплинули на проектування будівель.

Слід зазначити, що в аерокосмічній галузі дещо модифікований метод допустимих напружень зберігся до сьогоднішнього часу. Наприклад, в США [Muller & Schmid] до початку 1920-х років коефіцієнт запасу k = 2,0 застосовувався по відношенню до максимального ймовірного навантаження на літак збройних сил. У березні 1934 р. переглянуте Керівництво з проектування літаків (HIAD) встановило значення коефіцієнта запасу k = 1.5 в якості вимоги для проектування фюзеляжу і крил.

Було визнано, що під час польоту можуть виникнути навантаження, що перевищують граничні. Тоді було потрібно провести обов'язковий огляд і при необхідності відновлення, перш ніж отримати дозвіл на відновлення польотів.

При цьому для визначення напружень у посудинах тиску і при визначенні критичних напружень повинна була використовуватися мінімально можлива по допускам товщина деталей, або поділена на 1,1 номінальна товщина.

Що стосується механічних характеристик матеріалів, то передбачається, що постачальники визначили їх уже з використанням деяких статистичних критеріїв. Таким чином, механічні властивості стають повністю відокремленими від визначення коефіцієнта запасу.

Для проектування космічних об'єктів документ NASA-STD-5001B, "Конструктивні коефіцієнти безпеки для проектування і випробувань апаратних засобів космічного польоту" встановив значення k = 1,4. Але цей коефіцієнт стосується лише перевірених при випробуваннях елементів конструкції. Для неперевірених частин конструкції встановлювався коефіцієнт запасу k = 2,0, що повинно було протистояти недостатньо точному розрахунку або неефективному контролю якості.

1.5. Нові ідеї

Таким чином, починаючи з XIX століття, підхід на основі коефіцієнта запасу, який встановлювався на основі інженерної інтуїції, досвіду проектування і експлуатації конструкцій, використовувався в будівельних розрахунках до 50-х років XX століття.

Тим часом в ряді робіт були обґрунтовані пропозиції щодо розвитку методів розрахунку конструкцій. У 1926 році М. Майер запропонував замість розрахунку за допустимими напруженнями використовувати імовірнісні методи для вибору значень параметрів, що вводяться в розрахунок [Maier, 1926]. Слід зауважити, що хоча Макс Майер був першим, хто видав книгу з імовірнісного методу в 1929 році, але піонером тут був, очевидно, Gábor Kazincky, який захищав використання методів ймовірності ще в 1913 році, хоча його робота була опублікована лише в 1929 році.

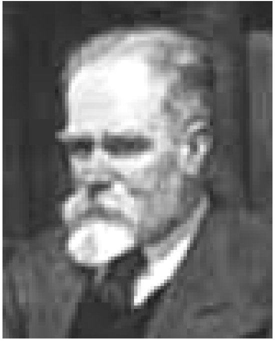
Die
Sicherheit der Bauwerke
und ihre Berechnung nach Grenzkräften
anstatt nach zulässigen
Spannungen
Von
Dr.-Ing. Max Mayer

Berlin
Verlag von Julius Springer
1926

Рис. 1.5. Обкладинка книги М.Майера

У 1929 році М.Ф. Хоціалов, беручи до уваги мінливість основних параметрів, запропонував проектувати конструкції, виходячи з деякої регламентованої імовірності їх аварійної відмови [Хоциалов, 1929].

Однак, формулювання М.Ф. Хоціалова «Проектувати з урахуванням можливості аварії» зустріло сильний опір традиційно налаштованої інженерної громадськості, представники якої були твердо впевнені в абсолютній надійності конструкцій, запроектованих з хорошим коефіцієнтом запасу. Ідеї Хоціалова були надовго відкинуті. При цьому той факт, що пропонується саме підхід до визначення «хорошого коефіцієнта запасу» просто не зрозуміли.



Микола Станіславович Стрілецький *(1885 - 1967)*
рос. Николай Станиславович Стрелецкий

Істотний розвиток ідеї М. Майера і М.Ф. Хоціалова отримали в роботах М.С. Стрілецького. Справедливо вважаючи, що виключно важливою є проблема коефіцієнта запасу, М.С. Стрілецький присвятив їй понад 15 робіт (див., наприклад [Стрелецкий, 1935, 1936-1, 1936-2, 1947]).

До появи розрахунків на основі імовірнісного підходу в інженерній практиці зазвичай вважалося, що коефіцієнт запасу є особливим числом, наділеним природою якимись винятковими властивостями. Передбачалося, що точне його дотримання, забезпечує надійність конструкцій, в той час як навіть незначне його применшення тягне за собою небезпеку для споруди.

Однак для укладача норм розрахунку коефіцієнт запасу завжди залишався узагальненим відображенням запобіжних заходів, що забезпечують в цілому задовільний рівень безпеки.

З часом вибір значення коефіцієнта запасу для споруд різного типу ставав все більш диференційованим. Так, наприклад, в автодорожньому мосту розподіл навантаження залежить від розташування автомобілів в різних точках по ширині дорожнього полотна, а в залізничному мосту навантаження розподіляються тільки в місцях де прокладені рейки. Передбачуване навантаження на залізничний міст близьке до дійсного, оскільки потяг завжди рухається вздовж розрахункової лінії, чого не відбувається при русі по автодорожньому мосту. Тому в розрахунках конструкції автодорожнього моста закладається коефіцієнт запасу міцності, помітно більший, ніж у залізничного.

При цьому розрахунок конструкцій за допустимими напруженнями або за граничним навантаженням має справу з єдиним коефіцієнтом запасу незалежно від умов роботи елементів конструкцій і майже незалежно від видів навантажень. Аналізуючи це питання, М.С. Стрілецький в 40-ті роки чітко сформулював ідею (яка, взагалі кажучи, неявно використовувалася і в роботах інших авторів) про роздільний аналіз мінливості навантажень та міцності матеріалів і про роздільне їх урахування в нормах - ідею, що була покладена в основу методу розрахунку за граничними станами.

Авіаційні інженери, мабуть, першими усвідомили зміну філософії аналізу міцності, коли розглядаються випадкові величини і слід враховувати імовірність відмови. Старе визначення запасу міцності втрачає своє просте значення - ймовірність відмови тепер буде залежати від форм розподілів ймовірностей навантаження $P_Q(s)$ і міцності $P_R(s)$. В 1942 році А. Пагслі [Pugsley, 1942] продемонстрував, як подвійний інтеграл по розподілам навантаження і міцності може передбачити ймовірність відмови і привів формулу для ймовірності відмови P_f

$$P_f = \int_0^\infty P_Q(s) \int_0^\infty P_R(s) \cdot ds \cdot ds \ .$$

Пагслі використовував гіпотетичні розподіли, оскільки доступні реальні дані не були досить точними особливо в області граничних значень, але він зумів продемонструвати чутливість ймовірності відмови до змін в прийнятих розподілах.

А в галузі будівельних конструкцій імовірнісна природа проблеми забезпечення міцності конструкцій інтенсивно досліджувалася в піонерних роботах самого М.С. Стрілецького [Стрелецкий, 1935, 1936-1, 1936-2, 1947], А.М. Фрейденталя [Freudenthal, 1938, 1947], М. Плота [Plot, 1936], і В. Вержбицького [Wierzbicki, 1936], де в якості випадкових величин використовувалися не тільки параметри міцності матеріалу, але і параметри навантажень. При цьому мова йшла про відмову, вже як про випадкову подію, ймовірність якої потрібно якимось чином обмежити. Навіть в найпростішому варіанті, який використовувався в згаданих роботах, імовірнісний метод розрахунку був недоступний для прямого використання. І мова йде не тільки про відсутність необхідної статистичної інформації, а й про повний розрив з попереднім досвідом. Тому істотним етапом у розвитку

Альфред Мартін Фрейденталь
(1906-1977)
нім. Alfred Martin Freudenthal

розрахунку конструкцій з'явився напівімовірнісний метод розрахункових граничних станів, по ідеї позбавлений зазначених недоліків, а по суті такий, що реалізує практичний варіант використання деяких положень імовірнісного підходу. Будучи за формою детермінованим, він ідейно заснований на використанні методів статистичного аналізу при знаходженні коефіцієнтів надійності, характерних для цього методу. Умовна система згаданих коефіцієнтів надійності була запропонована в 1945 році І.І. Гольденблатом, М.Г. Костюковським та О.М. Поповим і покладена в основу схеми розрахунку для розробки будівельних норм і правил [Балдин и др., 1951]. Ця робота була виконана комісією в складі В.О. Балдіна, О.О. Гвоздьова І.І. Гольденблата, Ю.М. Іванова, В.М. Келдиша, Л.І. Оніщика, М.С. Стрілецького і К.Е. Таля.

Метод розрахункових граничних станів був введений в СРСР в якості керівного принципу розрахунків будівельних конструкцій з 1 січня 1955 року разом із затвердженням першого видання Державних будівельних норм і правил. Надалі розрахунок за граничними станами завоював широке визнання в усьому світі, і в даний час він покладений в основу більшості міжнародних і національних стандартів з проектування, зокрема в системі Єврокодів, де він отримав назву «метод частинних коефіцієнтів надійності» [EN 1990].

Відомо, що за кордоном впровадження методу розрахункових граничних станів розтягнулося на десятки років. Мабуть піонером тут можна було б назвати Брінча Хансена [Hansen, 1956], за пропозицією якого цей метод з 1956 року використовується стосовно задач геотехнічного будівництва в Данії. Цей приклад був підхоплений і в США, наприклад, під назвою LRFD (Load and Resistance Factor Design – Проектування з коефіцієнтами навантаження і опору) метод розрахункових граничних станів шукав навпомацки свій шлях дуже неспішно.

Найперше використання деяких ідей LRFD можна тут відзначити в Американському Інституті Бетону (ACI), коли в 1956 році Комітетом ACI 318 були прийняті "Вимоги будівельних норм і правил для залізобетону" (ACI 1956). Документ був лаконічним, і метод проектування назвали "Проектом граничного зусилля". У цих нормах не було введено поняття коефіцієнта опору, таким чином всі запаси міцності були вкладені в коефіцієнти навантажень. Однак ці коефіцієнти були різні для різних типів навантаження і також для різних комбінацій навантажень. У наступній версії (ACI 1963) вже використовувався повний формат LRFD, включаючи коефіцієнти опору. Метод перевірки був все ще відомий як «Проектування за граничними зусиллями», але був уже ідентичним до положень LRFD. Однак і навантаження і коефіцієнти опору в нормах ACI не були засновані на раціональному аналізі, а визначалися інтуїцією і думкою учасників комітету з нормування.

У 1969 році в журналі Американського інституту бетону Корнелл опублікував статтю [Cornell, 1969], де пропонував концепцію норм, які базувалися на ймовірнісній основі. А Еллінгвуд із співавторами [Ellingwood et al., 1980] лише в 1980 році представили в Національному Бюро Стандартів США повідомлення про коефіцієнти надійності за навантаженням для будівель, засновані на імовірнісному аналізі.

Брюс Еллінгвуд
англ. Bruce Ellingwood

Пояснюється ця затримка простим незнанням робіт радянських вчених, або тут мали місце інші міркування? Мабуть, основну роль тут зіграла відсутність у середині 50-х років необхідного статистичного матеріалу для обґрунтування значень частинних коефіцієнтів надійності.

Про це чесно говорили автори методу, які при цьому покладалися на майбутні дослідження, а на перших порах підганяли результати під розв'язки, перевірені попереднім досвідом.

У західних країнах, де не прийнята командна система впровадження нововведень, це не давало можливостей переконати інженерну громадськість в терміновій необхідності зміни підходу до проектування, тим більше, що підгонка під попередній досвід не давала помітного економічного ефекту. Зокрема, деяка економія була досягнута для конструкцій, на які діють переважно постійні навантаження з мінімальними коефіцієнтами перевантаження, а саме економія 3...10% для стропильних і підстропильних ферм, в той час як підкранові балки залишилися практично незмінними, а колони виробничих будівель або залишилися без змін, або навіть стали трохи важче.

Слід зазначити, що ідея спадкоємності сильно проявилася також і в західних нормах. Так в передмові до британського стандарту [CP110] стверджується, що «... *відповідні статистичні дані недостатні, щоб дозволити методу частинних коефіцієнтів надійності бути розвиненим в повній згоді з теорією ймовірності, і використовувані значення коефіцієнтів були засновані на поточній практиці*». Однак було сказано, що у методу частинних коефіцієнтів надійності є перевага, яка полягає в тому, що «*Згодом це спростить включення поправок до Кодексу, в міру того як нове знання стає доступним щодо мінливості в навантаженнях і опорах*».

Той факт, що більш детальний аналіз, властивий методу частинних коефіцієнтів запасу, може увійти в непримиренну суперечність з методом розрахунку за допустимими напруженнями, також створював певні складності. Так при формуванні Єврокодів Європейська комісія по нормуванню (CEN) зіткнулася з тим, що частина країн, в яких використовувався метод розрахункових допустимих напружень, побоювалася, що деякі розрахунки, засновані на методі розрахунку за граничними станами, вкажуть на формальне порушення вимог останнього. Інші країни вказували, що вже побудовані споруди виявляються менш економічними при перерахунку за граничними станами. Ці протиріччя згладжувались деякими відхиленнями від статистично обґрунтованих значень коефіцієнтів надійності. Таким чином, сучасні Єврокоди є результатом компромісу, і тільки в наступних редакціях Єврокодів можна очікувати повної імовірнісної обґрунтованості всіх нормативних вимог.

Над цією проблемою інтенсивно працює Об'єднаний комітет по надійності конструкцій (Joint Committee on Structural Safety, JCSS), створений з ініціативи шести міжнародних асоціацій у сфері цивільного будівництва, серед яких Міжнародний комітет по залізобетону (CEB), Міжнародна рада з досліджень та інновацій в будівництві (CIB), Міжнародна асоціація по залізобетону (FIB), Міжнародна асоціація з проектування мостів, будівель і споруд (IABSE) і Міжнародний союз лабораторій і фахівців в області будівельних матеріалів, систем і конструкцій (RILEM).

У Єврокодах, як і в інших зарубіжних публікаціях, метод розрахункових граничних станів фігурує під назвою «метод частинних коефіцієнтів надійності». Дві назви відображають найбільш істотні сторони методу, при цьому кожна з цих сторін має певну незалежність.

Якщо розглядати цей метод з точки зору використання граничних станів, то потрібно пам'ятати, що в основі методу лежить ідея відмови від детального аналізу всіх станів конструкції, крім граничних, по відношенню до яких і формулюються розрахункові вимоги до об'єкта (тут бачимо повну спадкоємність по відношенню до методу руйнівних навантажень). Такий підхід, крім відомих переваг, має і серйозний недолік, оскільки прийнявши, наприклад, в якості одного з граничних станів умову міцності і запроектувавши конструкцію так, щоб з певним ступенем упевненості можна було говорити, що протягом всього терміну служби ця умова не буде порушена, ми майже нічого не можемо сказати про те, який рівень фактичних напружень відповідатиме нормальному (неграничному) стану при умовах, які найчастіше реалізуються в процесі експлуатації.

Стани конструкції, які більш часто реалізуються в умовах експлуатації, найчастіше визначають і її довговічність. Але з точки зору граничного аналізу майже рівноправними можуть виявитися як конструкція греблі, звичайний рівень навантаження якої не дуже далекий від гранично допустимого (наприклад, він становить 80% розрахункового), так і конструкція димаря, в якій поява розрахункового навантаження є досить рідкісною подією, а звичайне навантаження становить, наприклад, 15% від розрахункового.

Якщо ж фіксувати увагу на системі частинних коефіцієнтів надійності, то побачимо, що відбулася заміна одного загального коефіцієнта запасу добутком декількох (частинних) коефіцієнтів, кожен з яких пов'язаний з певною стороною проблеми. Основними з них стали коефіцієнт надійності за матеріалом γ_m і коефіцієнт надійності за навантаженням γ_f.

Ця риса методу граничних станів мала позитивним наслідком значну активізацію дослідження зазначених коефіцієнтів і розвиток норм проектування. Саме деталізація в застосуванні комбінації частинних коефіцієнтів надійності забезпечує (точніше, повинна забезпечувати) ситуацію рівної ймовірності реалізації граничного стану розглянутих вище двох об'єктів, звичайний стан яких різко відрізняється ступенем близькості до граничного.

Але і тут є певна проблема, оскільки ми можемо покладатися на рівнонадійність тільки по відношенню до тих факторів (наприклад, зовнішніх впливів), які були взяті до уваги при проектуванні і статистичні характеристики яких використані при призначенні розрахункових коефіцієнтів методу. І в разі

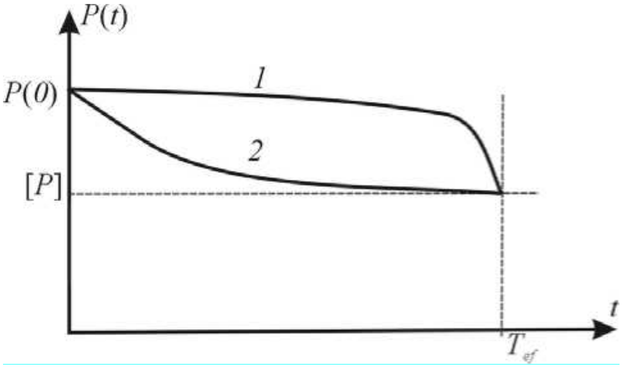


Рис. 1.6. Зміна коефіцієнта запасу із часом

деякого не передбаченого проектом (і нормами) випадкового збурення ймовірність вичерпання 20% запасу в першому випадку є набагато вищою, ніж вичерпання 85% запасу в другому випадку [Перельмутер, 2015].

Крім того, слід мати на увазі, що коефіцієнт запасу може змінюватися із часом (наприклад, за рахунок зносу конструкції), і сьогодні зазвичай ставиться завдання про забезпечення деякого заданого значення коефіцієнта запасу протягом планованого терміну експлуатації без будь-якого зв'язку з картиною зміни коефіцієнта запасу в часі (рис. 1.6).

При цьому по, суті, рівноправними будуть конструкції, у яких фактичне значення коефіцієнта запасу $k(t) = P(t) / [P]$ визначене графіком 1 або графіком 2 (рис. 1.6), з яких обидва реалізують потрібне значення $k(t) > [k]$ на всьому часовому інтервалі, хоча у випадку 1 конструкція «взагалі» є більш надійною. У сучасних нормах цей факт поки ніяк не враховується.

Зафіксовані в нормативних документах значення частинних коефіцієнтів надійності, яким би способом вони не встановлювалися, орієнтовані на певний «усереднений об'єкт» проектування. Однак наслідки відмови однієї і тієї ж конструкції, використаної на об'єктах різного призначення, можуть сильно відрізнятися, що має бути враховано при проектуванні.

Диференціація рівня надійності за ознакою відповідальності споруди, реалізується через відносно недавно введений новий коефіцієнт методу розрахункових граничних станів – коефіцієнт відповідальності γ_n (коефіцієнт надійності за призначенням, коефіцієнт значущості).

У вітчизняній нормативній базі використовується класифікація об'єктів будівництва за рівнем відповідальності (ДБН В.1.2-14-2009) і застосовується коефіцієнт γ_n, введений в систему розрахункових коефіцієнтів методу розрахункових граничних станів ще радянськими будівельними нормами в 1981 році. Він є важливим елементом проектного управління надійністю і диференціювання рівня надійності стосовно оцінки значущості об'єкта проектування. У Росії він закріплений в Законі «Технический регламент о безопасности зданий і сооружений», де міститься вимога:

«*Розрахунки, які обґрунтовують безпеку прийнятих конструктивних рішень будівлі або споруди, повинні бути проведені з урахуванням рівня відповідальності проектованої будівлі або споруди. З цією метою розрахункові значення зусиль в* *елементах будівельних конструкцій і основі будівлі або споруди повинні бути визначені з урахуванням коефіцієнта надійності за відповідальністю ...* ».

Пізніше аналогічні способи диференціювання надійності з'явилися і в інших зарубіжних нормах. В системі Єврокодів використовується коефіцієнт K_{FI}, який за змістом повністю збігається з вітчизняним γ_n. Американські норми ASCE-7 використовують систему коефіцієнтів важливості (Importance Factor).

1.6. Застосування теорії надійності

Перші роботи із застосування статистичних методів у будівельній механіці були спрямовані на обгрунтування значень коефіцієнта запасу – єдиного, як в методі напружень, або диференційованого, як в методі розрахункових граничних станів – але вони не стосувалися самого підходу до забезпечення працездатності конструкції.

Наприклад, М.Ф. Хоціалов, який працював на будівництві СвірьГЕС, звернув увагу на розкид кубикової міцності бетону, що укладається в греблю, і вважаючи навантаження детермінованим, визначив необхідний запас міцності, який гарантував з деякою заданнной ймовірністю незруйновність споруди [Хоциалов, 1929]. У роботах М.С. Стрілецького (див., наприклад, [Стрелецкий, 1947]) в якості випадкових величин вже використовувалися не тільки параметри міцності, але і навантаження. Подальше грунтувалось на зіставленні максимально можливої реакції системи з її мінімально можливою несучою здатністю, а як критерій порівняння використовувалася не надто чітко визначена величина, так звана «гарантія незруйновності». Такий же підхід був застосований при розробці нормативних документів для методу розрахункових граничних станів. Загальним недоліком було тут те, що коефіцієнти при значенні навантажувального фактора (перевантаження) і при значенні опорів (однорідності) визначалися для кожного розрахункового фактора незалежно від мінливості інших факторів.

Від цього положення відмовилися, була висловлена ідея імовірнісного аналізу граничного стану. При становленні та розвитку цього підходу обговорювалися дві його компоненти:

- вибір моделі граничного стану;
- правомірність використання імовірнісного аналізу.

Що стосується моделі, то, орієнтуючись в першу чергу на умову забезпечення міцності, практично одночасно в 1947 році О.Р. Ржаніцин [Ржаницын, 1947] і А.М. Фрейденталь [Freudenthal, 1947] ввели в розгляд функцію незруйновності у вигляді резерву несучої здатності

$$\tilde{S} = \tilde{R} - \tilde{Q}\,,$$

яка в силу випадкового характеру параметра навантаження $\tilde{Q}$ і параметра опору $\tilde{R}$ також є випадковою величиною. Вважаючи, що $\tilde{Q}$ і $\tilde{R}$ мають нормальний гассовський розподіл із середніми значеннями $\bar{Q}, \bar{R}$ і дисперсіями $\hat{Q}, \hat{R}$, вони отримали вираз для ймовірності виконання нерівності незруйновності

$$prob\left(\tilde{R} \geq \tilde{Q}\right) = prob\left(\tilde{S} \geq 0\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1-k}{\sqrt{\nu_R^2 + k^2\nu_Q^2}}\right),$$

де $\nu_R^2 = \hat{R}/\bar{R}^2$, $\nu_Q^2 = \hat{Q}/\bar{Q}^2$ – квадрати коефіцієнтів змінюваності, $k = \bar{R}/\bar{Q}$ – імовірнісний коефіцієнт запасу, $\Phi(\cdot)$ – функція Лапласа.

Якщо задатися певним значенням імовірності руйнування

$$V = prob\left(\tilde{R} \leq \tilde{Q}\right),$$

то можна отримати всі необхідні коефіцієнти методу розрахункових граничних станів. Зокрема, використовуючи введену О.Р. Ржаніциним величину гарантії незруйновності γ, яка дорівнює зворотній величині резерву міцності

$$\gamma = \frac{\bar{R} - \bar{Q}}{\sqrt{\hat{R} + \hat{Q}}} = \frac{k-1}{\sqrt{v_Q^2 + k^2 v_R^2}},$$

можна через неї виразити коефіцієнт запасу

$$k = \frac{1 + \sqrt{\gamma^2 v_Q^2 + \gamma^2 v_R^2 - \gamma^4 v_Q^2 v_R^2}}{1 - \gamma^2 v_R^2}.$$

Коефіцієнт надійності за матеріалом і коефіцієнт надійності за навантаженням тоді дорівнюватимуть

$$\gamma_r = 1 - \gamma v_R, \gamma_q = 1 + \gamma v_Q.$$

Слід зазначити, що використання моделі відмови, пов'язаної з використанням функції незруйновності $\tilde{S}$, не є абсолютно необхідним. Багато дослідників розглядали інші моделі. Так, наприклад, вимогу до коефіцієнта запасу в прямій формі $\tilde{k} = \tilde{R}/\tilde{Q} \geq 1$ використовував Р. Леві [Levi, 1949], в інверсній формі $\tilde{k}^{-1} = \tilde{Q}/\tilde{R} \leq 1$ Б.І. Снарскіс [Снарскис, 1962, 1963] і в логарифмічній формі $\ln(\tilde{k}) = \ln\left(\tilde{R}/\tilde{Q}\right) \geq 0$ К.А. Корнелл [Cornell, 1969], А.Я. Дрівінг [Дривинг, 1973].

Згодом в західній літературі цей підхід О.Р. Ржаніцина і А. Фрейденталя отримав назву «метод двох моментів» (second-moment method) і став основою проектування конструкцій заданої надійності. Помітну роль тут зіграла робота К.А. Корнелла [Cornell, 1969], в якій цей метод був представлений в загальній формі, де проста модель надійності з двома випадковими величинами $\tilde{Q}$ і $\tilde{R}$ узагальнюється на випадок n величин.

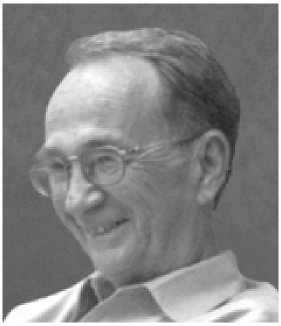
Олексій Руфович Ржаніцин
(1911 - 1987)
рос. Алексей Руфович Ржаницын

Корнелл ввів лінійну функцію граничного стану від n незалежних випадкових змінних (геометричних, топологічних і механічних параметрів елемента і параметрів навантаження)

$$S\left(\tilde{X}\right) = a_0 + a_1\tilde{x}_1 + a_2\tilde{x}_2 + \ldots + +a_n\tilde{x}_n ,$$

(аналог резерву несучої здатності в термінології О.Р. Ржаніцина). Вона розділяє простір параметрів на дві зони – безпечну, де $S\left(\tilde{X}\right) \geq 0$, і зону відмови, в якій $S\left(\tilde{X}\right) < 0$. В координатах $\tilde{X}$ гарантія незруйновності, названа Корнеллом характеристикою безпеки β, являє собою найкоротшу відстань від початку координат до площини $S\left(\tilde{X}\right) = 0$.

Згодом А.М. Хасофер і Н.К. Лінд [Hasofer & Lind, 1974] ввели безрозмірну функцію граничного стану і, використовуючи рівняння П. Тофт-Крістенсена і М.І. Бейкера [Thoft-Christensen & Baker, 1982] для визначення відстані до граничної криволінійної функції, запропонували спосіб лінеаризації проблеми.



Карл Аллін Корнелл
(1938 - 2007)
англ. Carl Allin Cornell

Всі зазначені вище моделі пов'язані з уявленням про граничний стан, як про вихід на границю міцності, і хоча перелік ситуацій, пов'язаних із граничними станами, є набагато ширшим, в якості першого наближення для обгрунтуванння нормативних вимог з таким підходом погодилися. Серйозні дискусії викликав сам імовірнісний підхід. Якщо виходити з частотної моделі ймовірності, то виникають сумніви щодо застосовності цього поняття до подій індивідуального порядку, оскільки майже кожна серйозна споруда є унікальною.

Це питання дискутувалося навіть в кінці 80-х років XX ст. Зокрема, деякі фахівці, висловлюючи певний скепсис, говорили «... *замовник може не зрозуміти інформацію про те, що поломка станеться для 10% валів із загальної кількості і вимагатиме запасний вал саме для свого примірника машини*» [Стрельников, 2000].

Сумніви такого порядку були зняті при байесовому трактуванні ймовірності як деякої об'єктивної міри впевненості в істинності судження, яка зберігає свій сенс незалежно від того, чи є аналізована ситуація масовою чи ні.

В якості іншої проблеми виступало питання про недостатню обґрунтованість використовуваних статистичних даних, особливо в тих випадках, коли мова йшла про так звані хвости розподілів. У зв'язку з цим значна увага була приділена неймовірнісним способам оцінки невизначеностей, найбільш значні роботи в цьому напрямку належать І. Бен-Хаїму і І. Елішакову [Ben-Haim & Elishakoff, 1990], [Ben-Haim, 1994]. Ці оцінки, що мають, як правило, діапазонну природу, не заперечують і не применшують імовірнісне визначення надійності, але виходять з того, що ймовірність не єдина відправна точка в оцінці надійності. З цього приводу в [Ben-Haim, 1994] сказано:

"*Імовірнісна система є надійною, якщо ймовірність неприпустимої поведінки досить низька. В неімовірнісному формулюванні система надійна, якщо діапазон коливань її поведінки є прийнятним*".

Новий етап в застосуванні теорії надійності знаменували роботи В.В. Болотіна [Болотин, 1965, 1971], де в проблему було включено час. Розглядаючи параметри, що визначають і зовнішні впливи і опір конструкції, як випадкові процеси і оперуючи нерівністю

$$\tilde{Q}(t) \le \tilde{R}(t), 0 \le t \le T ,$$

В.В. Болотін вважає, що відмова – це перетин процесом $\tilde{Q}(t)$ рівня $\tilde{R}(t)$. Він формулює задачу надійності як оцінку ймовірності відмови на заданому відрізку часу [0…*T*], для чого оцінює очікуване число таких перетинів в одиницю часу. Пізніше в більш розгорнутій формі теорію В.В. Болотіна представив М. Шінозука [Shinozuka, 1964].

Масанобу Шинозука
англ. Masanobu Shinozuka

В роботі [Болотин, 1977] отримане значення коефіцієнта запасу $k = \bar{R} / \bar{Q}$ для конструкції, міцність якої є випадковою величиною $\tilde{R}$, а діюче на неї навантаження $\tilde{Q}(t)$ є нормальним стаціонарним випадковим процесом з математичним сподіванням $\bar{Q}$, дисперсією $\hat{Q}$ і ефективною частотою ω_Q:

$$k = 1 + v_Q \sqrt{2\left(1 + \hat{R}/\hat{Q}\right) \ln\left(\frac{\omega T}{2\pi V} \cdot \frac{1}{\left(1 + \hat{R}/\hat{Q}\right)^{1/2}} \right)} .$$

Володимир Васильович Болотін *(1926-2008)*
рос. Владимир Васильевич Болотин

Тут *T* – встановлений термін експлуатації, для якого має бути забезпечена надійність з ймовірністю неруйнування *V*.

Слід зауважити, що майже всі згадані вище підходи, в яких використовується поняття запасу несучої здатності, практично розглядають безвідмовність деякого «перерізу», для якого визначено параметр навантаження $\tilde{Q}(t)$ і параметр опору $\tilde{R}(t)$. При цьому найчастіше залишаються поза розглядом деякі загальносистемні варіанти відмови, наприклад, типу втрати загальної стійкості.

Використання методів теорії надійності в розрахунку споруд [Болотин, 1971] призвело до постановки нових задач, пов'язаних з аналізом впливу надійності елементів системи на її загальну надійність.

Вперше ця задача була поставлена в 1943-1944 роках при аналізі німцями відмов ракет «Фау», на ті часи – однієї з найскладніших систем, які тільки існували в світі.

Зазначалося, що хоча окремі блоки ракети досить надійні лише чверть пусків ракет «Фау» була вдалою. У лабораторії Вернера фон Брауна працював німецький математик Ерік Пьеружка (Eric Pieruschka), який довів, що надійність ракети дорівнює добутку надійностей всіх її компонент, а не надійності найненадійнішого елемента, як вважав Браун. Саме з тих пір з'явилося поняття паралельного з'єднання і резервування елементів.

У класичній теорії розглядаються варіанти послідовного і паралельного з'єднань елементів системи. Однак для складних будівельних конструкцій з'єднання їх елементів тільки в рідкісних випадках можуть класифікуватися як паралельні або послідовні. Найчастіше відмова одного або навіть декількох елементів призводить до зміни розрахункової схеми, але вона при цьому продовжує працювати. Аналіз відповідної задачі надійності є істотно складнішим, ніж для систем, які розглядає класична теорія надійності, тому в розрахунковій практиці продовжує використовуватися поелементний контроль надійності, тобто концепція «слабкої ланки», відмова якої вважається вирішальною. Такий підхід зафіксований у всіх нормах проектування.

Разом з тим, при розгляді деяких екстремальних (запроектних) режимів існування відповідальних споруд останнім часом виконується аналіз їх живучості [Перельмутер, 2007], що стало навіть нормативною вимогою в останнє десятиліття. Цей аналіз виконується з урахуванням позамежних станів окремих елементів і має на меті запобігання так званого «непропорційного руйнування», коли локальна відмова може привести до глобального руйнування.

Зауважимо також, що сучасні методики ймовірнісної оцінки надійності практично ігнорують таке джерело відмов як людські помилки. Народна мудрість говорить, що "помилки властиві людській натурі", проте, наслідки помилок можуть мати різний характер, а відображена в літературі інформація щодо відсотку відмов і збоїв, які виникають внаслідок людських помилок, є досить суперечливою. Стюарт [Stuart, 1990] згадує, що статистичні огляди конструктивних відмов показують, що до 90% з них відбуваються через людську помилку. Крім того, було висловлене припущення, що майже половини всіх структурних відмов, можливо, вдалося б запобігти, якщо кожен проект пройшов перевірку або мав адекватний контроль [Matsousek, Schneider, 1976].

Можливі помилки, пов'язані з нестачею адекватних даних в обчисленнях надійності, були обговорені в роботах [Ben-Haim, Elishakoff, 1990], [Elishakoff, Hasofer, 1996]. І все ж ця важлива тема не стала предметом пильної уваги з боку фахівців у галузі стохастичної механіки.

1.7. Моделі навантажень

Впродовж досить тривалого часу ймовірнісні дослідження надійності оперували випадковими величинами навантажень і опорів, при цьому практично розглядалася дія одного навантаження. Його значення в різні моменти часу вважалися окремими реалізаціями випадкової величини, сукупність яких давала значення таких статистичних параметрів, як середнє значення, середньоквадратичне відхилення тощо. Виходячи з цих характеристик, були отримані розрахункові значення навантаження, які забезпечували деяку заздалегідь задану ймовірність їх появи. Якщо ж враховувалася не одне таке навантаження, то фактично приймалася гіпотеза про одночасне для різних навантажень досягнення максимуму (розрахункового значення).

Більш реалістичним є розгляд навантажень у вигляді випадкових функцій часу (випадкових процесів).

Перші дослідження, в яких навантаження були представлені у вигляді деякої випадкової функції часу, природним чином відносилися до впливів, які швидко змінюються в часі, таких як сейсмічне навантаження і вплив морського хвилювання. В роботі Дж. Хоузнера [Housner, 1947] прискорення ґрунту під час землетрусу було описано як послідовність некорельованих імпульсів. Подання навантаження і напружень в конструкції у вигляді безперервних випадкових процесів було використано, мабуть, вперше в суднобудуванні [Екимов, 1957] ..

Досить перспективним виявилося подання навантажень у вигляді випадкових послідовностей різного виду. Одним з перших таких подань, мабуть, була намічена в 1947 р. [Стрелецкий, 1947] і детально сформульована в 1966 р. імовірнісна модель М.С. Стрілецького у вигляді тимчасового ряду змінюваності навантажень [Стрелецкий, 1966]. Такий ряд може бути натуральним, відповідним фактичній послідовності навантажень, або відсортованим, в якому силові дії відкладаються в зростаючому порядку.

У запропонованій ще в 1968 році моделі Феррі Борджеса-Кастанети [Ferry Borges, Castanheta, 1968] історія зміни навантаження $Q(t)$ представлена послідовністю прямокутних імпульсів з постійною тривалістю τ і випадковими величинами ординат $\tilde{Q}$. Ці ординати вибираються так, щоб охоплювати фактичний хід процесу навантаження (рис. 1.7, *а*). Якщо інтервал часу τ обраний таким, що на його протязі кореляційна функція згасає, то можна вважати послідовність випадкових величин статистично незалежною.

Деякою мірою більш загальну трипараметричну модель, названу дискретним поданням навантажень, детально дослідив О.Р. Ржаніцин, не визначаючи, проте, спосіб призначення величин $\tilde{Q}$, які були названі їм перевантаженнями [Ржаницын, 1978].

Можна не розглядати зміну навантажень в часі і вважати значення розрахункових навантажень випадковими величинами. Одними з перших досліджень, присвячених сполученням представлених таким чином випадкових навантажень, була серія робіт О.Р. Ржаніцина, опублікованих у 1949 році.

У них, по суті, була вирішена задача про сумарну дію декількох незалежних навантажень, кожне з яких було випадковою величиною з гауссовим розподілом. В результаті для коефіцієнта сполучень було отримано такий вираз:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{1+\gamma_i V_i} + \gamma_n \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{C_i V_i}{1+\gamma_i V_i} \right)^2 + 2\sum_{i \neq j} \frac{C_i C_j V_i V_j r_{ij}}{(1+\gamma_i V_i)(1+\gamma_j V_j)}},$$

де V_i – коефіцієнт варіації i-го навантаження; γ_i і γ_n – нормовані відхилення i-го і сумарного розрахункових навантажень; C_i – число впливу (частка) i-го навантаження; r_{ij} – коефіцієнт кореляції i-го і j-го навантажень.

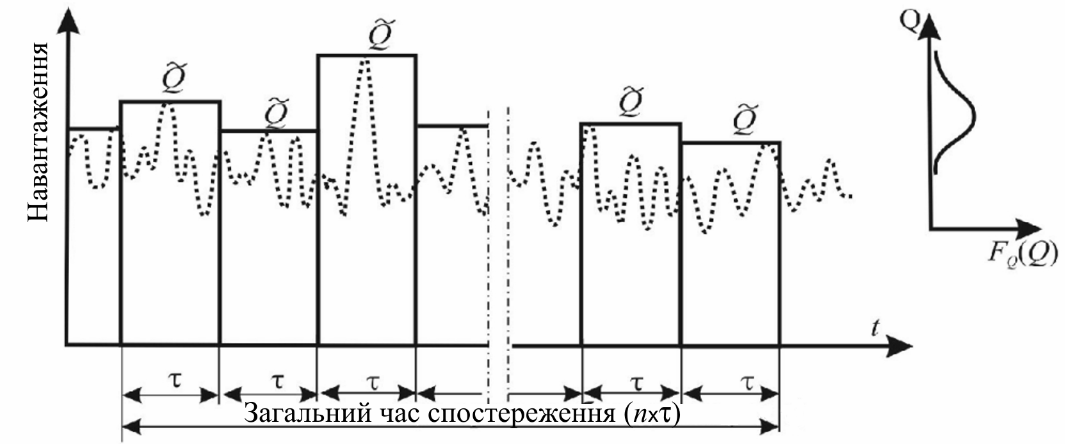


Рис. 1.7. Подання навантаження послідовністю величин

У випадку незалежності поєднуваних навантажень другий доданок під знаком радикалу зникає.

Представлені в будівельних нормах значення цього коефіцієнта з урахуванням пропозицій О.Р. Ржаніцина визначалися наступним чином:

$$\psi = \left[\sum_{i=1}^{n} q_i^n + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(q_i^n\right)^2 \left(\gamma_{fi} - 1\right)^2} \right] \bigg/ \sum_{i=1}^{n} q_i^n \gamma_{fi},$$

де q_i^n, γ_{fi} – нормативне значення і коефіцієнт надійності (перевантаження) i-го навантаження.

Випадок урахування змінюваності навантажень в часі строго і очевидно вперше досліджував В.В. Болотін, який в 1962 році розглянув задачу про підсумовування ефектів дії декількох, взагалі кажучи, корельованих, випадкових гауссових процесів [Болотин, 1962]. В основу міркувань був покладений аналіз імовірності викиду сумарного випадкового процесу за певний рівень, який повинен бути незалежним від числа врахованих складових сумарного процесу. Так само, як і для окремих навантажень, частотний склад випадкового впливу, викликаного дією сполучення навантажень, представлених у формі стаціонарних випадкових процесів, визначається ефективною частотою.

Ларрабі і Корнелл [Larrabee, Cornell, 1981], а також [Madsen, 1979] розвивали метод перетинів випадковим процесом заданого рівня, застосовуючи модель лінійної комбінації стаціонарних і незалежних пуассонівських процесів навантаження.

Строгий підхід до розв'язання задачі про ймовірність збігу різних навантажень і про статистичні властивості ефекту їх сумарного дії вимагає досить тонкого і детального аналізу властивостей тих випадкових процесів, якими описується поведінка кожного з навантажень. І, мабуть, мали рацію автори [Гнеденко и др., 1969], коли стверджували, що «... *головним в цій проблемі є пошук порівняно простих розв'язків для прийнятих моделей у вигляді випадкових процесів і подання цих розв'язків по можливості у вигляді операцій над випадковими величинами*».

Саме такою була мотивація роботи Туркстри [Turkstra, 1970], де була зроблена спроба обґрунтувати відповідні правила комбінування випадкових навантажень, що змінюються із часом. В основу міркувань була покладена модель Феррі Борджеса-Кастанети, в якій історія зміни навантаження $Q(t)$ подана послідовністю прямокутних імпульсів.

Правило Туркстри підтверджується досвідом і спостереженням, оскільки випадки відмови здебільшого виникають в тих випадках, коли одне з навантажень досягає екстремального значення, і дуже рідко, коли діє комбінація екстремумів декількох різних навантажень, що змінюються в часі.

Велика кількість робіт була присвячена дослідженню можливих сполучень для навантажень певного виду. Серед них можна виділити деякі великі класи навантажень, наприклад, такі, як кліматичні впливи на будівлі і споруди, або навантаження від мостових кранів у виробничих будівлях. Зазвичай дослідження такого роду виконувалися з метою знаходження певних коефіцієнтів сполучення, які слід було включити в норми проектування.

1.8. Оптимальний рівень надійності

Використання імовірнісних методів в якій би то не було формі вимагає чіткого уявлення про допустимий рівень ризику. Прийняття рішення щодо цього рівня виступає в якості однієї з основних проблем. Еволюційний шлях, пов'язаний з методологією «спроб і помилок» і з аналізом накопиченого досвіду, поки що є найдієвішим.

Тут доречно навести висловлювання відомих фахівців з теорії надійності Б.В. Гнеденко, Б.А. Козлова і І.А. Ушакова, які відзначають: «... *при визначенні розрахункових параметрів несучих конструкцій поряд із застосуванням методів теорії надійності ... рішення приймається на підставі інтуїції фахівців, підкріпленої аналізом існуючого рівня якісних характеристик виробу. Звичайно, тут мають місце постійні помилки, проте в загальному процесі розвитку техніки відбувається такий «природний відбір», в результаті якого занадто неправильно запроектовані вироби «вимирають». Таким чином здійснюється формулювання доцільних норм багатьох характеристик, в тому числі і характеристик надійності*» [Гнеденко и др., 1969].

Однак все частіше лунають голоси на користь оптимізаційного вирішення зазначеної проблеми.

Вперше про це написав Карл Форселл ще в 1924 році [Forssell, 1924]. Він з певною пересторогою, але абсолютно недвозначно, сформулював поняття економічного визначення рівнів безпеки і вибору певного розумного ризику в будівництві. Але існуюча тоді методика розв’язання оптимізаційних задач не дозволила не тільки отримати розв’язок, але навіть акуратно сформулювати задачу.

Коли мова йде про економічні втрати, які можуть бути наслідком відмови (так звані системи з чисто економічною відповідальністю), то все врешті-решт може бути вирішено шляхом зіставлення витрат на забезпечення необхідного рівня надійності та можливої шкоди від можливої ненадійності об'єкта. Пропозиції такого роду висловлювалися багатьма авторами (див., наприклад [Ржаницын, 1973] [Hilton & Figen, 1960], [Moses & Kinser, 1967], [Switzky, 1964]), при цьому використовувалися різні припущення про функціональну залежності можливого збитку від значення коефіцієнта запасу. Найчастіше використовувався критерій мінімуму витрат на початкове зведення конструкції плюс математичне сподівання збитку від можливих пошкоджень і руйнувань протягом терміну служби споруди.

Важливою особливістю цієї цільової функції є те, що при збільшенні ймовірності відмови в порівнянні з оптимальним значенням повні очікувані витрати зростають набагато швидше, ніж при зменшенні цієї ймовірності, тобто надлишок надійності дешевше нестачі надійності. Мабуть, цими особливостями задачі, які сприймалися, можливо, на напівінтуїтивному рівні, керуються інженери, приймаючи в сумнівних випадках рішення «в запас надійності».

Типовою роботою цього напряму, доведеною (на відміну від багатьох інших) до остаточного результату і введеного в деякі нормативні документи, було дослідження А.Я. Дрівінга [Дрівінг, 1973], в якому отримано оптимальне значення коефіцієнта запасу $k=\overline{R}/\overline{Q}$ за умови, що загальний збиток від відмови виражається формулою

$$U=C_0 k^{1-\theta}+u \ .$$

Тут C_0 – вартість конструкції при k=1, $0\le\theta<1$ – коефіцієнт, який залежить від виду напруженого стану ($\theta=1/3$ при згині), u – «Сторонній збиток», викликаний відмовою конструкції і практично незалежний від k. За припущення про логарифмічно нормальний розподіл $\tilde{Q}$ і $\tilde{R}$ і про те, що математичне сподівання функції незруйновності $\tilde{S}=\tilde{R}-\tilde{Q}$ близьке до одиниці (тоді $v_S\approx\widehat{R}+\widehat{Q}$), для великих значень коефіцієнта економічної відповідальності $\xi=u/C_0$ оптимальне значення k визначається формулою:

$$\ln\left(k_{opt}\right)=\sigma\sqrt{\sigma^2(1-\theta)(2-\theta)+2\ln\frac{\xi T}{(1-\theta)\sqrt{2\pi}}}-\frac{\sigma^2(3-2\theta)}{2},$$

де T – термін експлуатації, а параметр σ підпорядкований співвідношенню $\sigma^2=\ln\left(1+v_S\right)$.

Якщо можливі руйнування або пошкодження споруд в цілому і його елементів можуть бути причиною людських жертв або травм, а також неоцінених втрат художніх, історичних і інших цінностей, то необхідно також зважати на психологічні наслідки можливих аварій. Тут виникає проблема визначення «ціни життя».

Одним з перших ще в 1962 році до цієї проблеми звернувся Бруно Снарскіс [Снарскис, 1962], який розглянув деякий гіпотетичний спосіб розв'язання такої задачі. Він виходив з ідеї, що будь-яке суспільство (в минулому, теперішньому і майбутньому) не володіє безмежними ресурсами і може дозволити витрачати на цілі підтримки здоров'я і життя своїх членів лише цілком певну суму, яку можна оцінити, аналізуючи бюджет країни Таким чином, може бути визначена «ціна життя».

Але часто висловлювалися заперечення з приводу самої можливості оптимізаційної постановки задачі стосовно споруд з неекономічною відповідальністю.

Бруно Снарскис
лит. *Bruno Snarskis*

Ось як викладається суть проблеми у відомій монографії Г. Аугусти, А. Баратти і Ф. Кашіаті - «... *не всі види збитків можуть бути оцінені в грошовому вираженні. І тим не менше, багато дослідників намагаються і в цьому випадку розв'язувати задачу за допомогою цільової функції, отримуючи абсурдні результати. До цього ж приводять і спроби включити ціну людського життя в цільову функцію як доповнення до загальних втрат*»[Аугусти и др., 1988, с. 309]. Далі автори книги звертають увагу на те, що оптимізація за критерієм мінімізації сумарних витрат H_{tot}, в які включена вартість життя, призводить до умови $\Delta H_{tot} / \Delta v = 0$, де Δv - кількість врятованих життів при збільшенні витрат на ΔH_{tot}. Стверджується, що «*цю умову можна тлумачити таким чином: спільноті невигідно платити жодного долара за додатково врятоване життя*» і робиться висновок, що оптимізаційне рішення практично неприйнятне.

Однак наведену вище умову можна висловити і іншими формулюваннями, що звучать зовсім не цинічно. Наприклад, таким: «*спільноті невигідно платити жодного долара за додатково врятоване розглядуваним способом життя, оскільки при інших способах використання обмежених коштів (наприклад, за рахунок організації ранньої діагностики раку) можна врятувати більше життів*».

Таке формулювання, мабуть, знімає ідеологічну компоненту дискусії, але все одно не вирішує проблему «ціни життя», чисельне значення якої часто приймається довільно і практично ніяк не аргументується.

Здається, що одним із вдалих є підхід до розв'язання задачі про зіставленні економічних і соціальних втрат, заснований на наступних міркуваннях, ідея яких була запропонована в роботі [Блэк і Нихаус, 1980]. Автори звернули увагу на те, що витрати на забезпечення безпеки пов'язані з певними діями (будівельними роботами, установкою захисного обладнання тощо), при реалізації яких також можливі втрати здоров'я і життя людей, про що свідчить статистика нещасних випадків у народному господарстві. Так, на підставі аналізу даних по Німеччині

С.К. Блек і Ф. Ніхаус прийшли до висновку про те, що на кожен 1 млн. доларів, що витрачаються на виробництво обладнання та виконання робіт з підвищення безпеки, припадає $12{,}28\times10^{-3}$ смертей, в результаті:

аварій на виробництві – $7{,}86\times10^{-3}$;

автомобільних аварій – $4{,}12\times10^{-3}$;

професійних захворювань – $0{,}306\times10^{-3}$.

Таким способом задача приведена до єдиного виміру за схемою «життя за життя». При цьому з'ясувалося, що витрати понад 33 млн. доларів за одне врятоване життя в дійсності призводять до зростання ризику. Це виявляється «занадто безпечним» рішенням.

Альтернативний підхід був запропонований О.Р. Ржаніциним [Ржаницын, 1973] і розвинений в роботах В.Д. Райзера [Райзер, 2008]. Він заснований на тому, що якщо виконана оптимізація надійності споруди при неекономічному збитку, то для споруди з такою надійністю можна підрахувати «кількість врятованих життів» і отримати таким чином економічний еквівалент неекономічних втрат, відповідний отриманій величині надійності. Зворотному підрахунку можна піддати і існуючі споруди, тоді можна визначити умовний економічний еквівалент, який (можливо, що несвідомо і інтуїтивно) вводився будівельниками в різні часи для споруд різної відповідальності.

1.9. Критерії відмов

Відповідно до ідеології розрахунку конструкцій за методом граничних станів передбачається, що експлуатація будівлі або споруди припиниться раніше, ніж буде вичерпана її фактична несуча здатність, і цей факт оголошений одним з постулатів методу розрахунку за граничними станами. А самі критерії, які визначають граничний стан, формулювалися різним способом в різні роки.

Так, наприклад, в піонерній роботі [Балдин и др., 1951] передбачалося, що граничним «*...є стан конструкції при якому її подальша нормальна експлуатація є неможливою*». Це визначення відносилося до всіх граничних станів, але перший граничний стан пов'язувався з несучою здатністю (міцність і стійкість конструкції, втома матеріалу).

Пізніше, наприклад, в діючому багато років ГОСТ 27751-88 до граничних станів 1-ї групи віднесені «... граничні стани, які ведуть до повної непридатності експлуатації конструкцій, основ (будівель або споруд в цілому) або до повної (часткової) втрати несучої здатності будівель і споруд в цілому». Це формулювання передбачає, що крім втрати несучої здатності в якості критерію граничного стану 1-ї групи можуть мати місце і такі події, як припинення експлуатації в зв'язку з економічною недоцільністю подальшого утримання. Таким чином, наприклад, завершила своє існування вежа Київського телецентру, побудована на вул. Хрещатик на початку 50-х років, для якої перехід до нових типів антен виявився пов'язаним із занадто дорогою модернізацією. Іншими словами, формулювання ГОСТ 27751-88 передбачає в числі причин переходу в граничний стан 1-ї групи не тільки фізичний, а й моральний знос.

Зауважимо, що термін «повна непридатність об'єкта до експлуатації» в кожному окремому випадку вимагає визначення. Якщо в старій будівлі виходить з ладу водопостачання, можна вирішувати, чи варто встановлювати нові труби або знести будівлю. Якщо будівля являє історичний інтерес, можна перетворити його в нежитлове музейне приміщення, і в цьому випадку встановлюється непридатність будівлі в якості житлового будинку.

Багато відомих старих будівель і пам'ятників в цьому сенсі фактично давно вийшли з ладу. Наприклад, піраміди в Гізі часто наводяться як приклад довговічності, але вони більше не служать і не можуть служити тій меті, для якої були призначені, поверхня їх граней сильно зруйнована (рис. 1.8).

Формально виходить, що аварійні обвалення є в певному сенсі позанормативними подіями, і статистика аварій не може бути використана для оцінки фактичного рівня надійності, оскільки в неї не включені багато випадків безаварійного зняття конструкцій з експлуатації. У певному сенсі послідовніше вдіяли укладачі міжнародного стандарту [ISO ST 2394], які визначили, що «*3.1.1. ... граничні стани 1-ї групи, які відповідають максимальній несучій здатності (пов'язані з безпекою)*», або єврокодів [EN 1990: 2001], де вказано, що «*3.2. (1) Абсолютні граничні стани (ultimate limit state) - це такі граничні стани, які асоціюються з руйнуванням або з іншим подібним видом відмови. (2) Стани, що безпосередньо передують руйнуванню, які для простоти розглядаються замість руйнування як такого, відносяться також до абсолютних граничних станах. (3) Абсолютні граничні стани мають відношення до: безпеки конструкції і її оточення; безпеки людей*».

Рис. 1.8. Піраміда Хефрена в Гізі (XXVII століття до н.е.) - сучасний вигляд

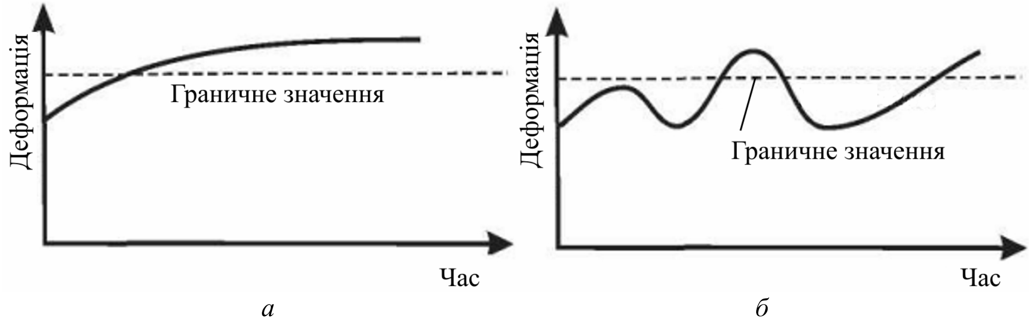
Аналогічну позицію зайняв і новий російський стандарт [ГОСТ Р 54257], в якому вводяться такі граничні стани:

- перша група граничних станів - стани будівельних об'єктів, перевищення яких веде до втрати несучої здатності будівельних конструкцій;
- друга група граничних станів - стани, при перевищенні яких порушується нормальна експлуатація будівельних конструкцій, вичерпується ресурс їх довговічності або порушуються умови комфортності;
- особливі граничні стани - стани, що виникають при особливих впливах і ситуаціях і перевищення яких призводить до руйнування будівель і споруд з катастрофічними наслідками.

Якщо перший граничний стан зазвичай пов'язується з досягненням якимось параметром конструкції критичного значення (досягнення межі міцності, втрата стійкості рівноваги тощо), то з приводу другого граничного стану є помітна невизначеність, і призначення якихось границь багато в чому є умовним. Але останнім часом (див., наприклад, [EN 1990: 2001]) намагаються розрізняти оборотні і необоротні варіанти другого граничного стану.

Необоротні граничні стани (рис. 1.9, *а*) - це такі стани, які не зникають і після того, як ті впливи, які їх викликали, припинилися (наприклад, локальне пошкодження або деформації від повзучості бетону). А оборотні граничні стани (рис. 1.9, *б*) не розвиваються, а іноді зникають після того, як ті впливи, які їх викликали, припинилися (наприклад, переміщення під дією вітрового навантаження або надмірна вібрація).

Для оборотних граничних станів часто встановлюється частка часу, протягом якої такий стан може бути порушено. Наприклад, для гостроспрямованого радіозв'язку, коли помітні кути повороту антенних пристроїв знижують якість прийому, може бути умовно прийнято, що таке погіршення якості зв'язку допустимо протягом 5% часу. Такий підхід, вочевидь, вперше був запропонований в роботі [Савицкий и др., 1968] і регламентований українськими нормами [ДБН В.1.2-14].



а *б*

Рис. 1.9. Варіанти другого граничного стану

Для необоротних граничних станів другої групи граничні значення встановлюються з міркувань експлуатаційної придатності, які в деяких випадках можна визначити в достатній мірі об'єктивно, але найчастіше такі границі є в певному сенсі умовними. Наприклад, важко довести, що прогин в 1/250 прольоту ще є допустимим, а вже при значенні 1/245 неприпустимим.

Ускладнення нормальної експлуатації (саме так характеризуються граничні стани 2-ї групи) дуже рідко настає відразу ж після подолання встановленої межі. Найчастіше границя, яка визначає перехід до такого стану, розмита і відповідні відмови є нечіткими.

Мілан Холіцьки
чеськ. Milan Holicky

Але найчастіше ймовірне ускладнення пов'язано з «глибиною» проникнення в позамежну область, оскільки в ситуаціях з нечіткою відмовою контрольовані границі є умовними і є монотонна залежність збитку від ступеня порушення заборони.

Для розгляду цієї властивості в роботі [Holicky & Ostlund, 1996] була запропонована модель нечіткої відмови, відповідно до якої ступінь задоволення вимоги експлуатаційної якості V_s лінійно зменшується при переході через порогове значення r_1.

Вважається, що фактична величина кількісного показника «ускладнення нормальної експлуатації» є випадковою величиною з середнім $(1 - V_x)$, що схематично показано на рис. 1.10, *б*.

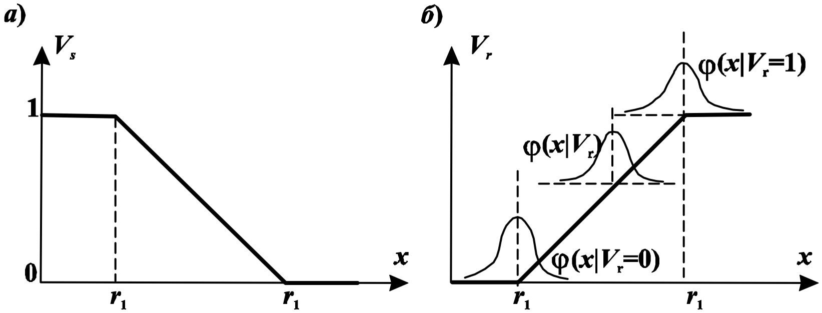


Рис. 1.10. До оцінки збитку нечіткої відмови

Вводиться показник втрати якості

$$D_r(x) = \frac{1}{N} V_r \left(\int_0^x \varphi\left(z \middle| V_r\right) dz \right) dV ,$$

де N – нормуючий множник, за допомогою якого функціонал D_r відображується на інтервал $\langle 0,1 \rangle$. Досить представницькі зіставлення обчислених значень D_r з рядом відомих рішень будівель і споруд, які, на думку фахівців, є комфортабельними і зручними, дозволило б вирівняти нині використовувану шкалу (наприклад, для допустимих прогинів) зі шкалою значень функції D_r. Таке зіставлення було зроблено в згаданій вище роботі М. Холіцкого і Л. Остлунда, де в якості прикладу розглядалися прогини міжповерхових перекриттів.

1.10. Умовний і реальний коефіцієнт запасу

Раніше вже зазначалося, що в основі методу граничних станів лежить ідея відмови від детального аналізу всіх звичайних (нормальних, експлуатаційних) станів конструкції. Зосередження уваги лише на відмовних станах з практичним упором на перший граничний стан, як такий, що визначає конструктивну форму, є не тільки перевагою даного методу.

Оскільки основний час життя конструкції відповідає станам нормальної експлуатації, і саме для таких станів відбуваються деструктивні зміни в матеріалі конструкції (наприклад, корозійні процеси або накопичення втомних пошкоджень), то з позицій забезпечення експлуатаційної надійності і довговічності визначальним стає аналіз конструкції, яка нормально працює і є далекою від вичерпання міцності і стійкості. Для багатьох параметрів споруди визначальну роль можуть грати розрахунки в експлуатаційній стадії. З цього приводу в роботі [Иосилевский, 1999] сказано: «*Інакше, як провалом в методології розрахункового прогнозу поведінки несучої конструкції під навантаженнями, не можна назвати втрату інженером розрахункового контролю за спорудою в період переходу його від "здорового" (нормального, експлуатаційного) до граничного стану... Логічний вакуум, що утворився між експлуатаційним і граничним (аварійним) станом, є неприпустимим*».

Можна припустити, що наявність перевірок по другому граничному стану ліквідує цей методологічний провал, але справа в тому, що і ця група станів також є граничною, тобто відповідає досить рідкісним крайнім станам параметрів споруди і навколишнього середовища. Наприклад, для конструкцій, що працюють під впливом снігового або вітрового навантаження, їх нормативні значення реалізуються один раз за п'ять-сім років і відстоять від нормального експлуатаційного стану досить далеко.

У більшості випадків основна нерівність методу розрахункових граничних станів подається в формі

$$\psi\gamma_n\gamma_f F_n \le \gamma_c R_n / \gamma_m$$

де $\psi, \gamma_c, \gamma_f, \gamma_m, \gamma_n$ - відповідно коефіцієнт сполучень навантажень, коефіцієнт умов роботи і коефіцієнти надійності за навантаженням, за матеріалом і за відповідальністю споруди; F_n і R_n – нормативні значення узагальненого впливу і узагальненого опору, за якими оцінюються граничні стани.

Деякі дослідники (див., наприклад, [Балдин и др., 1951] , [Гвоздев, 1964]) величину

$$K = \psi\gamma_n\gamma_f\gamma_m / \gamma_c$$

ототожнюють з нормованими коефіцієнтами запасу системи.

Неважко помітити, що коефіцієнт *K* не дуже сильно відрізняється від одиниці (найчастіше він коливається в інтервалі 1,15-1,25, хоча для деяких видів навантаження і матеріалу конструкції верхня границя цього інтервалу може бути і більшою), що передбачає збіг розрахункового граничного стану з істинною границею працездатності конструкції, хоча в дійсності це далеко не так. Справжні коефіцієнти запасу перевищують одиницю помітно більше, оскільки фактична границя працездатності відрізняється від тієї умовності, яка виступає в ролі розрахункового граничного стану. Величина *K* не відповідає істинному запасу несучої здатності системи головним чином тому, що реальне вичерпання несучої здатності зазвичай пов'язане з низкою нелінійних ефектів, які помітно перерозподіляють зусилля в системі при наближенні до її руйнування. Внаслідок такого перерозподілу оцінка, отримана з використанням *K* і розрахована з використанням зовсім іншої розрахункової моделі (як правило, лінійної), може виявитися як завищеною, так і заниженою.

Таким чином, ми бачимо, що використання методу розрахункових граничних станів не тільки не визначає поведінку системи в експлуатаційній стадії, про що йшлося вище, але і досить наближено оцінює той запас, який відокремлює перехід від розрахункового (найчастіше умовного) граничного стану до істинної границі несучої здатності системи.

Для більш впевнених висновків слід проводити експерименти і / або спеціальні розрахунки, які виконуються методами, відмінними від наведених у нормативних документах. Таким чином, слід констатувати, що і від дійсного стану руйнування розрахунковий граничний стан відокремлений деяким бар'єром, величина якого найчастіше невідома.

1.11. Не все враховується проектними розрахунками

Відомі численні випадки значного перевищення розрахункового значення деякого навантаження, які, однак, не приводили до аварійного руйнування. Виникає природне запитання про причини цього явища.

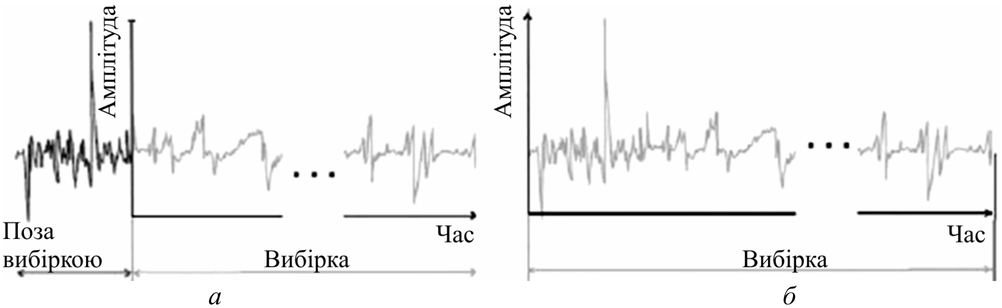
Найчастіше це пов'язано з тим, що рідкісна конструкція розраховується на дію тільки одного навантаження. При цьому коефіцієнт надійності за навантаженням γ_f враховує далеко не всі чинники, що визначають реальну картину зміни навантажень в часі. Так, для кранового навантаження будівельні норми і правила дають значення $\gamma_f = 1.2$, що дуже далеко від реальності. Нормовані величини γ_f визначені для «навантаження взагалі» і не враховують цілого ряду додаткових випадкових параметрів, що з'являються при аналізі способу реалізації такого навантаження в певній конструкції.

Для кранового навантаження, наприклад, важливим може бути такий чинник, як ймовірність цілком конкретного положення на лінії впливу, коли може реалізуватися розрахункове зусилля в конструкції. Якщо ж враховувати сумісну дію декількох кранів, то виявляється, що ймовірність співпадіння їх розрахункових позицій в рази менше, що різко знижує середній рівень зусилля в конструкції.

Згадані особливості реального навантаження конструкцій в дуже малому ступені враховуються і значеннями коефіцієнтів сполучень навантажень, які також підраховані для «навантажень взагалі». При цьому найчастіше створюються додаткові резерви несучої здатності.

Можна припустити, що такі додаткові резерви дають нам можливість ігнорувати деякі нормативні обмеження. Але факт порушення граничної нерівності говорить про те, що конструкція стала працювати в умовах, які не передбачалися проектувальником і, отже, він їх не обраховував і не аналізував. У цих умовах відсутні гарантії безпечної експлуатації. Це небажано, навіть якщо аварія і не відбулася, особливо якщо врахувати, що величина зазначених вище запасів є оціночним, а аж ніяк не гарантованим фактом. Такими запасами багато конструкцій можуть і не володіти, особливо в наш час при загальному зниженні якості виготовлення, монтажу та ретельності контролю властивостей матеріалів.

Слід також мати на увазі, що крім чітко передбачуваних навантажень і впливів завжди існує можливість реалізації деякого непередбачуваного ні нормативними документами, ні прогнозом проектувальника випадкового впливу на об'єкт проектування. Причому в цьому контексті поняття «вплив» розуміється дуже широко і включає в себе такі, наприклад, події, як грубий брак, помилка персоналу, незвичайне для даної місцевості природне явище тощо, одним словом, всілякі «сюрпризи», які ведуть до суттєвих наслідків. Ці дії, безумовно, не є масовими, і тому їх статистичний аналіз, а також урахування їх впливу в імовірнісному аналізі надійності є утрудненим. Можлива правдоподібна гіпотеза імовірнісного типу полягає в тому, що їх реалізація є рівноймовірною протягом часу і що вони є досить рідкісними явищами. Вони настільки рідкісні, що зазвичай не потрапляють в ту вибірку, на основі якої визначаються статистичні параметри (рис. 1.11, *а*), або ж взагалі не мають імовірнісної природи. Американський економіст Nicolas Nassim Taleb назвав подібні події «чорними лебедями»[3]. А з точки зору цих «сюрпризних» подій важливою характеристикою об'єкта проектування є його вразливість.



а *б*

Рис. 1.11. До імовірнісної оцінки дуже рідкісних подій

---

[3] Ювенал казав: «*rara avis in terris nigroque simillima cygno*» (лат.) - «*хороша людина так само рідкісна, як чорний лебідь*», оскільки існувала гіпотеза про те, що всі лебеді білі. Це вважалося вірним, поки в 1700 р. не виявили чорного австралійського лебедя...

Уразливість – це параметр, що характеризує можливість нанесення даній системі ушкоджень будь-якої природи тими чи іншими зовнішніми засобами або факторами. Уразливість нерозривно пов'язана з відомою характеристикою «живучість» і з додатково запропонованою в роботі [Перельмутер, Пічугін, 2014] характеристикою «змобілізованість».

Стосовно будівельних об'єктів поняття живучості почало розвиватися значно пізніше, ніж в інших областях техніки. Пов'язано це з усвідомленням того факту, що завжди існує можливість появи деяких неврахованих аварійних впливів, які можуть створити локальні руйнування. В першу чергу ця парадигма реалізувалася стосовно сейсмостійкого будівництва (хоча сам термін «живучість» міг і не застосовуватись), і, зокрема, тут з'явилася ідея виділення так званих головних несучих конструкцій, безвідмовність яких забезпечує будівлю або споруду від повного руйнування при аварійних впливах, навіть якщо його подальше використання за призначенням виявиться при цьому неможливим без капітального ремонту.

Можна вважати, що живучість конструкції забезпечена, якщо первинна локальна відмова призводить до руйнування лише на обмеженій області, допустимий розмір якої регламентований нормами або заздалегідь узгоджений із замовником.

Явну вимогу забезпечення живучості вперше було запропоновано ввести при розробці проекту норм України [ДБН В.1.2-14] ще в 1998 р., але зробити це вдалося після тривалих дискусій і бюрократичної тяганини лише в 2009 р.

Якщо, як зазвичай вважається, живучість є в деякому сенсі просторовою характеристикою, яка б показала, як локальне збурення поширюється у просторі системи, і чи може це локальне руйнування отримати непропорційно великий розвиток «вшир», то в якості змобілізованості розглядається часова характеристика, яка показує, наскільки система за час експлуатації готова і здатна зреагувати на локальне в часі (імпульсне) несподіване збурення.

Помітна відсутність змобілізованості конструкції, як і недостатня живучість, повинні служити приводом для підвищеної уваги і для використання певних захисних заходів.

Література

Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф. Вероятностные методы в строительном проектировании/ Пер. с англ. Ю.Д.Сухова. — М.: Стройиздат, 1988. — 584 с.

Балдин В.А., Гольденблат И.И., Коченов В.И., Пильдиш М.Я., Таль Э. Расчет строительных конструкций по предельным состояниям. — М.: Стройиздат. 1951. — 272 с.

Беляев Б.И. О выборе формулы для общего коэффициента надежности при вероятностном методе расчета // Строительная механика и расчет сооружений, 1986. — С. 10-13.

Бернштейн С.А. Очерки по истории строительной механики — М.: Госстройиздат, 1957 — 236 с.

Блэк С.К., Нихаус Ф. Насколько безопасно «слишком» безопасное? // Бюллетень МАГАТЭ, 1980, Книга 22. №1.— С. 47-58.

Болотин В.В. О сочетании случайных нагрузок, действующих на сооружение // Строительная механика и расчет сооружений. 1962. №2. С. —1-5.

Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. — М.: Стройиздат, 1965— 279 с

Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. — М.: Стройиздат, 1971. — 256 с.

Болотин В.В. К статистической интерпретации норм расчета строительных конструкций // Строительная механика и расчёт сооружений, 1977, № 1. — С. 8—11.

Бубнов И.Г. О нормах допускаемых напряжений в судостроении. Журнал Морского технического комитета — СПб.: Отдельный оттиск от 4. XI.1908

Витрувий Марк Поллион. Десять книг об архитектуре / Пер. Ф. А. Петровского. Т. 1. — М.: Изд-во Всесоюзной Академии архитектуры, 1936 — 331 с.

Галилей Г. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки // Избранные труды в двух томах. Том 2. — М.: Наука, 1964 — С. 109-404.

Гвоздев А.А. К вопросу о статистическом методе расчета элементов конструкций. // Строительная механика и расчет сооружений, 1964, №6. — С. 20-21

Гнеденко Б.В., Козлов Б.А., Ушаков И.А. О роли и месте теории надежности в создании сложных систем // Теория надежности и массовое обслуживание — М.: Наука, 1969— С. 14-32.

ГОСТ Р 54257-2010. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения и требования. — М.: Стандартинформ, 2011.— 18 с.

ДБН В.1.2-14-2009. Общие принципы обеспечения надежности и конструктивной безопасности зданий, сооружений, строительных конструкций и оснований. — Киев: Укрархбудинфоорм, 2009. — 37 с.

Де Рошефор Н.И. Урочное положение. Пособие при составлении и проверке смет, проектировании и исполнении работы. — СПб: Типография Училища глухонемых, 1910 — 694 с.

Дривинг А.Я. К определению характеристик надежности конструкций для сооружений с чисто экономической ответственностью // Проблемы надежности в строительной механике — Вильнюс: 1968. — С. 43-49.

Дривинг А. Я. Экономический подход к определению оптимальных запасов конструкций // Строительная механика и расчет сооружений, 1973, № 5.

Екимов В.В. Приложение методов теории вероятностей к проблеме общей прочности корабля // Труды НТО Судпрома, 1957, Том VII, №11.

Иосилевский Л.И. Практические методы управления надежностью железобетонных мостов М.: НИЦ «Инженер», 1999.— 295 с.

Лолейт А.Ф. О коэффициенте прочности железобетонных сооружений // Записки Московского архитектурного общества, Вып. 1, 1904. — С. 1-16.

Лолейт А.Ф. Новый проект норм // I Всесоюзная конференция по бетону и железобетону. 20-25 апреля в Москве. Труды конференции — М.: 1930.

Лолейт А.Ф. Результаты опытной проверки основных положений расчета изгибаемых железобетонных элементов по принципу критических усилий. Май, 1933, Литография, 38 с.

Перельмутер А.В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций. — М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2007.— 256 с.

Перельмутер А.В. Очерки по истории металлических конструкций.— М. . Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2011.— 184 с.

Перельмутер А.В. Развитие требований к безотказности сооружений // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2015, № 1 — С. 81-101.

Перельмутер А.В., Пичугин С.Ф. Об оценке уязвимости строительных конструкций // Инженерно-строительный журнал, 2014, №5. — С. 5-14.

Райзер В.Д. Вероятностная оптимизация уровня надежности сооружений // Строительная механика и расчет сооружений, 2008, №3. — С. 39-42.

Ржаницын А. Р. Определение коэффициента запаса прочности сооружений // Строительная промышленность, 1947, №8

Ржаницын А. Р. Применение статистических методов в расчетах сооружений на прочность и безопасность // Строительная промышленность. 1952, № 6.

Ржаницын А.Р. Экономический принцип расчета на безопасность // Строительная механика и расчет сооружений, 1973, №3. — С. 3-5.

Ржаницын А.Р. Перегрузки и их сочетания // Строительная механика и расчет сооружений, 1977, № 4. — Стр. 11-15.

Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. — М.: Стройиздат, 1978. — 239 с.

Савицкий Ю.А., Зусманов Е.А., Ройштейн М.М. К вопросу о деформативности опор радиорелейных линий // Информационные материалы ГСПИ Минсвязи СССР, 1968, вып. 1 — С. 39-46.

Снарскис Б.И. К статистико-экономическому обоснованию запасов несущей способности конструкций // Труды АН Литовской ССР, Серия Б, 1962, №2(29), С .229-241; 1963, №1(32), С. 157-203.

Стрелецкий Н.С. К анализу общего коэффициента безопасности. Класификация напряжений // Проект и стандарт, 1935, №10

Стрелецкий Н.С. Еще к вопросу анализа коэффициента безопасности сооружений // Проект и стандарт, 1936, №3

Стрелецкий Н.С. Новая методика расчета конструкций. — М.: Издание Московского инженерно-строительного института, 1936

Стрелецкий Н.С. Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений. — М.: Стройиздат. 1947.— 92 с.

Стрелецкий Н.С. К вопросу развития методики расчета по предельным состояниям. – М.: МИСИ, 1966. – 30 с.

Стрельников В.П. О современном состоянии технологии исследования надёжности // Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций: Труды конференции – К.: Логос, 2000. – С. 533-543.

У 28-42/Наркомстрой. Указания по проектированию и применению стальных конструкций в условиях военного времени — М.: Стройиздат, 1942.

У 37-42/Наркомстрой. Указания по проектированию и применению бетонных и железобетонных конструкций в условиях военного времени — М.: Стройиздат, 1943.

Хоциалов Н.Ф. Запасы прочности // Строительная промышленность. 1929, № 10. — С. 840-844.

Adams H. The Practical Designing of Structural Ironwork. — London: E. & F.N. Spon, 1894.

Alasdair N. Beal. A history of the safety factors // The Structural Engineer, 2011, Vol. 89(20)

Augusti G., Baratta A., Casciati F. Probabilistic methods in structural engineering. – London: Chapman & Hall, 1984. – 570 p.

Ben-Haim Y. A Non-Probabilistic Concept of Uncertainty // Structural Safety, 1994, Vol. 14 — P. 227-245.

Ben-Haim Y., Elishakoff I. Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics, — Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990 — P. 1-43.

Cornell C.A. A Probability-Based Structural Code // Journal of American Concrete Institute, 1969, Vol. 66, pp. 974-988.

Coulomb C.A. Application des regies de maximis et minimis a quelques problemes de statique, relatifs a Trrchitectue // Memoire des savants etrangers de l'Acad. des Sciences de Paris, 1773.

CP110 Part 1:1972 The Structural Use of Concrete: Part 1 Design, Materials & Workmanship. — London: British Standards Institution, 1972.

Elishakoff I., Hasofer M.A. Detrimental or serendipitous effect of human error on reliability of structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, Vol. 129, Issues 1–2, — P. 1-7

Elishakoff I. Safety Factors and Reliability: Friends or Foes?— Berlin: Springer Science & Business Media, 2012 . – 296 p.

Ellingwood B, Galambos T.V., MacGregor J.G., Cornell C.A. Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58. Building Code Requirements for Minimum Design Loads in Buildings and Other Structures. NBS special publication 577 — Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1980.

EN 1990:2001. Eurocode. Basis of structural design. Brussels: CEN. 2002. — 89 p.

Ferry Borges J., Castanheta M. Structural safety ─ Lisbon: Laboratorio National de Engenharia Civil, 1968 ─ 150 p.

Forssell C. Ekonomi och Byggnadsvasen // Sunt Fornoft, 1924 — P. 74-77

Freudenthal A.M. Allowable Stresses and Safety of Strutures // Journal of Association of engineers in Paletine, 1938.— P. 149-153. (на иврите).

Freudenthal A.M. The safety of Structures // Proceeding ASCE, 1947, Vol.112, №1. — P. 125-180.

Hanses B.J. Limit design and safety factors in soil mechanics // The Danish Geotechnical Institute. Bulletin No 1 — Copenhagen, 1956 — 4 p.

Hasofer A.M., Lind N.C. An Exact and Invariant First Order Reliability Format // Proceeding. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, 1974 — P. 111-121.

Hilton H.H., Figen M. Minimum weight analysis based on structural reliability // J. Sci., 1960, Vol. 27, No 9 — P.641-652.

Holicky M., Ostlund L. Vagueness of Serviceability Requirements, Proceeding the International Conference «Design and Assessment of Building Structures», Vol. 2. — Prague: 1996.—P. 81-89.

Hook G.A., Whitney C.S. Concrete Designers Manual — McGraw-Hill Book Company Inc., 1926 — 323 p

Housner G.W. Characteristic of strong-motion earthquakes // Bulletin of Seismic Society of America, 1947, Vol. 43, №2. – P. 19 – 31.

ISO ST 2394. General Principles on Reliability for Structures, 1994 — 50 p.

Jonson A.I. Strength safety and economic dimensions of structures // Bull. No 12. Royal Institute of Technology. — Stockholm: 1953.

Kanzinczy G. Beitrag zum Vortrag Gehlers Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau, Schlussbericht — Wien: 1928.

Larrabee R.D., Cornell C.A. Combination of various load processes, // Jourlal of Structural Division, ASCE, 1981, Vol. 107. — P. 223–239.

Levi R.. Calculus Probabilistes de la Securite des Constructions // Annales des ponts et chaussées, 1949, Vol. 119, No.4 P. — 493-539.

Madsen H.O. Load Models and Load Combinations // Report No. R 113, Structures Research Laboratory — Lingby: Technical University of Denmark.1979.

Maier M. Die Sicherkeit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkräften anstatt nach zulässigen Spannungen. — Berlin: Springer Verlag, 1926. — 73 s.

Matsousek M., Schneider J. Undersuchungen zur Struktur des Sicherheitsproblem bei Bauwerken // Bericht No. 59 Institut fur Baustatik und Konstruktion. ETH — Zurich: Birkhauser, 1976.

Moses F., Kinser D.E. Optimum structural design with failure probability constraints // AIAA Journal, 1967, Vol. 5, No 6, — P. 1152-1158.

Muller G.E., Schmid C.J. Factors of Safety - Historical Development, State of the Art and Future Outlook — Ohio: Air Force Flight Dynamics Laboratory, AGARD Report #661

Mungan I. Structural engineering and structures from antiquity to the present // Proceeding of IASS Symposium 2001, Nagoya, Japan. — P. 1-3.

Plot M. Nor sur la nation de coefficient de securite // Annals des points et chausses. — Paris: 1936. Vol. II. Fase 7.

Pugsley, A. G. A philosophy of aeroplane strength factors. Reports and Memoranda № 1906, Aeronautical Research Council, London, 1942.

Randel F.A. Historical note on structural safety // Proceeding of American Concrete Institute, 1977, Vol 70 — P. 669–679.

Revision to BS 449-1937 — London: British Standards Institution, 1939.

Shanley F.R. Historical Note on the 1.5 Factor of Safety for Aircraft Structures // Journal of Aerospace Sciences, 1962, Vol. 29 — P. 243-244.

Shinozuka M. Probability of structural failure under random loading // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1964, Vol. 90, — P. 147-70.

Stuart M.G. Safe load tables and the human dimension // Steel Construct, 1990, Vol. 24, No 1 — P. 2-12.

Switzky H. Minimum weight design with structural reliability // Proceeding of AIAA 5th Annual Structures and Materials Conference — New York: American Institute of Aeronautics' and Astrospace, 1964. — P. 216-322.

Thoft-Christensen P., Baker M.J. Structural Reliability Theory and Its Applications. — Berlin: Springer Verlag, 1982.

Turkstra C.I. Probabilistic design formats. // Theory of Structual Design Decisions. Solid Mechanics Division. Studies Series No. 2. ─ Waterloo: University of Waterloo, 1970.

Whitney Charles S. Bridges; a study in their art, science and evolution. — New York: W.E. Rudge, 1929. — 400 p.

Wierzbicki W. Safety of Structures as a Probability Problem. // Przeglad Techniezny, 1936. — P. 690-696.

Williams J.K. Safety Factors // Journal of the Royal Aeronautical Society, 1956, Vol. 60 — P. 311.

Нарис 2

ІСТОРІЯ СТАНОВЛЕННЯ ПОНЯТТЯ НАПРУЖЕННЯ

… рідина по природі своїй така, що при рівномірному і безперервному розташуванні її частинок менш стиснута частинка виштовхується більш стиснутою, і що окремі частинки цієї рідини відчувають тиск розташованої над ними рідини, оскільки ця рідина не замкнута в чому-небудь або не відчуває тиску з боку будь-якого іншого предмета.

Архімед

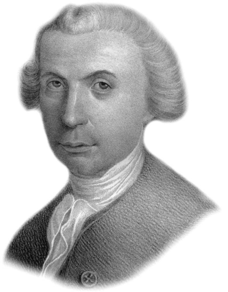
Ідея Коші геніально проста. Її глибока оригінальність повністю окреслюється лише на фоні сторічних зусиль його попередників — блискучих геометрів, які досліджували частинні випадки деформівних тіл складним, а іноді і нетривіальним шляхом, навіть не охоплюючи цю основну ідею, яка відразу стала і залишилась основою механіки розподіленої матерії. Нема нічого важчого, ніж подолати вантаж правильного, але дуже частинного знання; переглянути традиції своїх попередників — це найбільша оригінальність, яку може досягти людина.

К. Трусделл

Вступ

Після виходу в світ в 1638 р. знаменитої книги Г. Галілея (Galileo Galilei, Discorsi e Dimonstrazioni matematiche, Leiden, 1638) і аж до 1820 року в галузі механіки проводились дослідження різних частинних проблем. Але була одна істотна обставина, яке повинна була привести до широких узагальнень. Ця обставина полягала в розвитку фізичних теорій про будову речовини. У XVIII ст. уявлення Декарта про всезаповнюючу тонку матерію (plenum) з пронизуючими її "вихорами" поступилося місцем ньютонівській концепції матеріальних тіл, що складаються з найдрібніших частинок, взаємодія яких здійснюється за допомогою центральних сил. Ньютон вважав свої "молекули" частинками скінченних розмірів і певної форми [Newton, 1717], але у його послідовників вони звелися поступово до матеріальних точок.

Рене Декарт
(1596 -1650)
фр. René Descartes



***Руджер Йосип Бошкович** (1711-1787)*
хорв. Ruđer Josip Bošković

Найбільш чітко виражена теорія цього типу належить Бошковичу [Boscovich, 1763], для якого матеріальні точки були тільки постійними центрами сил. До цього ряду ідей відноситься теорія капілярності Лапласа [Laplace, 1806] і перше дослідження Пуассона про рівновагу "пружної поверхні" [Poisson, 1814]; однак, довгий час не було зроблено, мабуть, ніяких спроб отримати загальні рівняння рівноваги і руху пружного твердого тіла.

До кінця 1820 р. ньютонівська концепція про будову речовини і закон Гука надали засоби для узагальнення принципу можливих робіт в Mecanique Analytique, чим відкрили широку дорогу для нових досліджень як в механіці, так і в усіх інших галузях математичної фізики. Як зазначає А.Ляв [Ляв, 1935], фізична наука вийшла з початкового періоду свого розвитку з визначеною методикою побудови гіпотез і індукції, а також спостережень і дедукції, з ясною метою дослідження законів, які пов'язують різні явища між собою, і з накопиченим фондом аналітичних методів дослідження. Настав час створення загальних теорій.

Одна з можливостей введення поняття про напруження в загальну схему абстрактних понять теоретичної механіки (Rational Mechanics) полягає в прийнятті його, як основного поняття, взятого з досвіду. Тут мається на увазі просто поняття про взаємодію між двома дотичними тілами або двома частинами одного тіла, розділеними уявної поверхнею. Фізична реальність подібної дії згідно з цією точкою зору приймається як основа для включення цього поняття в загальну схему. Може бути в цьому сенсі слід розуміти слова Кельвіна і Тейта [Thomson & Tait, 1867, vol.1, p. 220] про те, що сила «*є предмет безпосереднього сприйняття*» (*force is a direct object of sense*). Ця ідея лежить в основі методу, яким користувався Ейлер, формулюючи принципи гідростатики і гідродинаміки, і яку застосовував Коші [Cauchy, 1827a] в своїх перших роботах по теорії пружності. Якщо наслідувати ці ідеї, то треба робити відмінності між двома типами сил, саме: масовими силами (body forces) і поверхневими напруженнями (surface tractions); перші належать до числа сил, що діють на відстані (дальнодія), другі діють при зіткненні тіл.

Натуралісти (natural philosophers), як правило, не схильні приймати і дальнодію і дію при зіткненні як рівноправні основні поняття. Вважалося, що більш глибокий аналіз відкриє можливість встановити тотожність обох видів дії. Інколи намагалися пояснити дальнодію за допомогою напружень в середовищі, також намагалися, навпаки, напруження, які взагалі вважалися результатом близькодії, пояснити шляхом уявлення про центральні сили, що діють безпосередньо на відстані. Коливання у поглядах на це питання, які мали місце в науці, відображені в роботі Максвелла [Maxwell, 1890]. Прикладом прагнень першого роду може служити введення системи максвеллівських напружень, які еквівалентні електростатичному тяжінню і відштовхуванню [Maxwell, 1881]. Метод центральних сил застосовувався в багатьох дослідженнях з теорії пружності. Коші використав цей метод для визначення співвідношень між компонентами напруження і деформації в кристалічному тілі [Cauchy, 1828b]. Будь-яке подібного роду зведення близькодії до дальнодії стирає різницю між поверхневим напруженням і масовими силами; зазвичай намагалися підтримати цю відмінність шляхом гіпотези про молекулярному будову тіл. У теорії Коші, наприклад, несправжня блізькодія приводиться до дальнодії між молекулами, причому приймається, що ця дія не розповсюджується за межі так званої "області молекулярного дії". Масові сили, навпаки, розглядаються, як діючі на значній відстані. Таким чином, другий спосіб введення поняття напруження заснований на гіпотезі молекулярних сил.

Нарешті, третій спосіб пов'язаний із застосуванням поняття енергії. Приймається, що існує пружний потенціал, і з використанням варіаційних підходів виводиться рівняння рівноваги або коливань пружного тіла. Нехай енергія частини тіла, обмеженої якою-небудь поверхнею S, збільшується при збільшенні зміщення. Це збільшення енергії виразиться за допомогою інтеграла по поверхні такого вигляду:

$$\iint \left\{ \left[\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \cos(y, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xz}} \cos(z, \nu) \right] \delta u + \cdots + \cdots \right\} dS \, .$$

При енергетичному підході сила визначається як коефіцієнт при збільшеннях зміщення у виразі збільшення енергії. Вищенаведений вираз для енергії вказує безпосередньо на існування сил, які діють на поверхню, що обмежує будь-яку частину тіла. При такому розумінні поняття напруження стає вторинним або вивідним поняттям, а в якості основних понять приймаються енергія, відмінність її видів і локалізація її в середовищі. Цей метод обмежується випадками, коли існує пружний потенціал.

Перший і третій з цих підходів більш, ніж другий, підходять до такого роду теорій, які називають іноді макроскопічними, як і теорія пружності в більшій своїй частині. У другому методі, навпаки, виходять з молекулярної, атомістичної або субатомістичної структури тіла. Щоб відповідати цілям теорії пружності, структурна теорія повинна приводити до поняття напруження, а також повинна приводити до закону Гука і існування пружного потенціалу. Крім того, вона повинна містити в собі можливість того, що співвідношення між пружними постійними, які ми називали співвідношеннями Коші, можуть і не зберігатися. Ось чотири вимоги, які пред'являються до теорії.

Більшість структурних теорій, що застосовуються в механіці твердого тіла, представляють молекули, атоми чи пружні елементарні частинки, з яких складається тіло, як прості центри сил, наділені властивістю маси. Ці елементи тіла діють з деякими силами один на одного, причому сили, що діють між двома елементами P і P', спрямовані по лінії, яка їх з'єднує, і протилежні одна одній. Зазвичай передбачається, що сили, що діють між структурними елементами тіла, зникають, коли відстань між ними перевищує деяку величину, звану радіусом сфери молекулярної дії. Але це не обов'язково. Досить було б прийняти, що ці сили зменшуються настільки швидко при зростанні відстані, що ними можна знехтувати вже при відстанях, малих в порівнянні з найменшими відстанями, які можна заміряти звичайними приладами.

Першим дослідником, що зайнявся побудовою загальних рівнянь рівноваги і коливань пружних тіл, був Нав’є [Navier, 1827][1]. Він виходив з концепції Ньютона про будову речовини і вважав, що пружні реакції виникають внаслідок тих змін інтрамолекулярних сил, які є результатом змін у взаємному розташуванні молекул. Він розглядав молекули як матеріальні точки і припускав, що сила взаємодії двох молекул, відстань, між якими дещо збільшилася, пропорційна добутку збільшення відстані на деяку функцію початкової відстані. Його метод полягає в утворенні виразів для проекції на довільний напрямок всіх сил, що діють на зміщену молекулу, і у виведенні звідси рівнянь руху молекули. Рівняння, отримані таким чином, виявляються вираженими в зсувах молекули.

Матеріал передбачається ізотропним, і рівняння рівноваги і коливального руху містять одну постійну тієї ж природи, що і модуль Юнга. Нав'є утворює потім вираз для суми робіт всіх сил, що діють на молекулу при малому зміщенні; він називає її сумою моментів (в сенсі Mecanique Analytique) усіх сил, прикладених до даної молекули і спричинених усіма іншими молекулами. Користуючись варіаційним численням, він виводить звідси не тільки отримані раніше диференціальні рівняння, але також і граничні умови, які повинні задовольнятися на поверхні тіла. Цей мемуар дуже важливий, як перше загальне дослідження з даного питання; проте

---

[1] Ще до опублікування мемуар був прочитаний у травні 1821 р.

застосовуваний в ньому хід міркувань не зустрів загального визнання. Були висунуті заперечення проти прийнятого Нав'є виразу для сили взаємодії двох молекул і проти його методу спрощення виразів для сил, що діють на окрему молекулу. Ці вирази призводять до трикратного підсумовування, яке Нав'є замінює інтегруванням; законність цього прийому піддавалась сумніву[2].

Клод-Луї Марі-Анрі Нав'є
(1785–1836)
фр. Claude-Louis Marie-Henri Navier

Огюсте́н Жан Френе́ль
(1788 – 1827)
фр. Augustin-Jean Fresnel

У тому ж 1821 році, коли Нав'є доповів свій мемуар академії, ще одна галузь стала несподіваним джерелом нового потужного імпульсу для розвитку теорії пружності. Френель (Fresnel) оголосив, що, на його думку, відомі із спостережень факти, які стосуються інтерференції поляризованого світла, можуть бути пояснені тільки за допомогою гіпотези поперечних коливань[3]. Він показав, як повинні відбуватися такі коливання і поширення хвиль відповідних типів в середовищі, що складається з "молекул", пов'язаних дією центральних сил.

Всі ті приклади поперечних хвиль, які були відомі раніше часів Юнга і Френеля, наприклад, хвилі на воді, поперечні коливання струн, стержнів, мембран і пластинок, не являли собою хвилі, що поширюються всередині середовища. І ні захисники, ні противники хвильової теорії світла не уявляли собі, мабуть, світлові хвилі інакше, ніж як "поздовжні" хвилі згущення і розрідження, подібні до тих, які були добре знайомі з теорії поширення звуку. Теорія пружності і зокрема проблема поширення хвиль в пружному середовищі залучили тепер увагу двох видатних математиків: Коші[4], що був прихильником ідей Френеля, і Пуассона - противника, налаштованого скептично по відношенню до них. Розвиток теорії пружності в подальшому виявився тісно пов'язаним з проблемою поширення світла; цей розвиток у багатьох відношеннях почався з робіт цих двох учених.

---

[2] Критику мемуара Нав'є і виклад суперечки, причиною якого він послужив, див. у [Todhunter & Pearson, 1886, pp. 139, 221, 177]. Див. також звіт [Burkhardt, 1903]. Не зайве зауважити, що уявлення про молекули як матеріальні точки, що знаходяться в спокої в стані стійкої рівноваги під дією сил взаємного тяжіння і відштовхування і дещо зміщуються зовнішніми силами, значно відрізняється від тієї концепції молекул, до якої привчила нас сучасна термодинаміка. "Молекулярні" теорії Нав'є, Пуассона і Коші, по суті, мають мало спільного із сучасними уявленнями про молекули.

[3] Див. [Verdet, 1866], стор. LXXXVI, а також стор. 629 и наст. Верде вказує, що Френель прийшов до своєї гіпотези поперечних коливань вже в 1816 р. (цит. тв. стор. XV, 385,394). Томас Юнг у статті [Young, 1817]) стверджує, що світлові коливання мають лише слабкі поперечні складові.

[4] Поштовхом до занять Коші теорією пружності стала його участь у комісії, призначеній для розгляду мемуара Нав'є про пружні пластинки, який був представлений Паризькій академії в серпні 1820 р.

2.1. Узагальнений принцип напруження О.Коші

30 вересня 1822 р. Огюстен Луї Коші оголосив про існування принципу напружень[5], який з тих пір став підґрунтям раціональної механіки суцільних середовищ.

Цей принцип О. Коші виклав у мемуарі, представленому в Паризьку академію наук в 1822 р., короткий зміст якого у вигляді статті [Cauchy, 1823] був опублікований в 1823 р., а також в ряді наступних статей. Сучасне визначення поняття напруження було дано А.Б. Сен-Венаном в 1844 р. [Saint-Venant, 1844].

Принцип Коші містить у собі чотири незалежні ствердження:

- фізична розмірність – «сила»/«площа»;
- напруження визначається на уявній границі, яка розділяє тіло на дві частини;
- напруження являє собою вектор або векторне поле, еквівалентне за дією однієї частини тіла на іншу;
- напрямок вектору напружень нічим не обмежений.

Ці чотири тези виникли окремо одна від одної і розвивались незалежно.

Робота О. Коші була підготовлена дослідженнями Л. Нав'є, який в мемуарі, представленому в Паризьку академію наук в 1821 р. і опублікованому в 1827 р. [Navier, 1827] (у скороченому вигляді в 1823 р. [Navier, 1823]), розвинув молекулярну теорію пружного твердого тіл і вивів рівняння його рівноваги і руху в переміщеннях. Ймовірно, ця робота і спонукала О. Коші написати вищезгаданий мемуар, тому що він був призначений Паризькою академією наук членом комісії з розгляду мемуара Л. Нав'є. Уявлення про те, що властивість пружності може бути пояснена силами тяжіння і відштовхування, що діють між найдрібнішими частинками тіл, існувало ще з часів І. Ньютона, і було предметом дослідження Р. Бошковича, розглянутим в його книзі [Boscovich, 1763], опублікованій в 1763 р.

Принцип стверджує, що на будь-якій гладкій замкнутій зорієнтованій поверхні ∂V, чи є вона уявною поверхнею всередині тіла або обмежуючою поверхнею самого тіла, існує інтегроване поле векторів напружень $\mathbf{t}_{\partial V}$, рівносильне дії з боку матеріалу, зовнішнього до ∂V та суміжного з нею на цій внутрішній стороні до ∂V (рис. 2.1). Таким чином, рівнодіюча сила $F(V)$ і рівнодіючий обертовий момент $L_{x_0}(V)$, що діють на матеріал в області V, прилеглій до ∂V, визначаються рівняннями:

$$F(V)=\int_{\partial V}\mathbf{t}_{\partial V}ds+\int_{V}\mathbf{b}dm, \qquad (2.1)$$

$$L_{x_0}(V)=\int_{\partial V}(x-x_0)\wedge\mathbf{t}_{\partial V}ds+\int_{V}(x-x_0)\wedge\mathbf{b}dm, \qquad (2.2)$$

---

[5] Мемуар Коші був представлений Паризькій академії у вересні 1822 р, але не був опублікований. Резюме поміщено в Bulletin des Sciences & la Societe philomatique, 1823; зміст мемуара було опубліковано в статтях [Cauchy, 1827a], [Cauchy, 1827b], [Cauchy, 1828a]. Остання з цих статей містить основні рівняння, виведені цілком правильно.

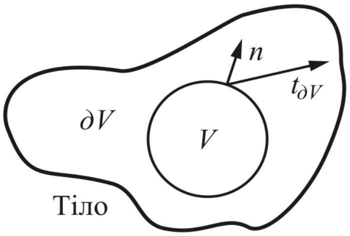


Рис. 2.1. Напруження $\mathbf{t}_{\partial V}$, діюче на границі ∂V області V, зайнятої частиною тіла

де ds і dm вказують на інтегрування відносно площі поверхні і маси і де b - масова сила на одиницю маси. Таким чином, на тіло діють сили і моменти двох видів: ті, які є абсолютно неперервними функціями маси, і ті, які є абсолютно неперервними функціями площі граничної поверхні. Термін «тіло» застосовується до перших, а «контакт» або «напруження» - до останніх. Раціональна механіка матеріалів - це теорія контактних зусиль.

Коші припустив, що напруження залежать від поверхні тільки через нормаль:

$$\mathbf{t}_{\partial V} = \mathbf{t}_n, \tag{2.3}$$

тому всі тіла, обмежуючі поверхні яких мають спільну нормаль n в якійсь точці, мають там однакові напруження. Застосувавши принцип кількості руху, він потім довів, що $\mathbf{t}_n$ змінює знак, якщо змінюється орієнтація ∂V :

$$\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{-n}, \tag{2.4}$$

або напруження, що виникає під дією внутрішньої сторони на зовнішню, є таким самим і протилежним за напрямком напруженню, що викликається дією зовнішньої сторони на внутрішню. Використовуючи цей результат, який називається лема Коші, і звернувшись знову до принципу кількості руху, він доводить, що якщо, за припущенням, $\mathbf{t}_n$ - неперервна функція n, тоді вона - однорідна лінійна функція n:

$$t_n = T_n, \tag{2.5}$$

Тобто у просторі векторів існує лінійне перетворення **T**, що зветься тензором напружень, дія якого на одиничний зовнішній вектор, нормальний до ∂V в якійсь точці, дає вектор напружень в цій точці. Зокрема, мовою самого Коші, напруження на трьох взаємно перпендикулярних площинах в деякій точці однозначно визначають там напруження на всіх площинах. Існування тензора напружень часто називають основною теоремою Коші. Застосувавши його в (2.1), Коші потім доводить, що в точці, внутрішній до області, де в певний час тензорне поле **T** неперервно диференціюється, де **b** - неперервна і де існує прискорення $\ddot{\mathbf{x}}$ і воно неперервне, принцип кількості руху в інерційній системі координат еквівалентний диференціальному рівнянню в частинних похідних

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{x}}, \tag{2.6}$$

де ρ - масова щільність також, за припущенням, неперервна. Потім він доводить, що за тих же припущень, якщо виконується (2.6), принцип моменту кількості руху еквівалентний

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \tag{2.7}$$

Таким чином, тензор напружень симетричний. Ці два рівняння, (2.6) і (2.7) - перший і другий закони руху Коші. Якщо ми підтверджуємо правильність принципів кількості руху і моменту кількості руху, то перший закон Коші доводить, що рівнодіюча контактного зусилля на одиницю об’єму дорівнює $\operatorname{div}\mathbf{T}$, в той час як другий - необхідна і достатня умова, щоб рівнодіюча контактного обертового моменту була моментом рівнодіючої контактного зусилля.

Для сучасної механіки суцільних середовищ ці два закони іноді недостатньо загальні. По-перше, те, що всі діючі моменти є моментами сил, як стверджується (2.2), не завжди підходяще припущення, тому що там можуть бути контактні пари, а також у зв’язку з орієнтованими матеріалами може виникнути необхідність ввести напруження вищого порядку, крутний момент кількості руху тощо. По-друге, припущення про гладкість, необхідні для отримання законів Коші, можуть виявитися занадто сильними. Довга низка досліджень ударних хвиль і інших сильних порушень неперервності, починаючи з окремих випадків, розглянутих Фур’є, Пуассоном, Стоксом, Ренкіном, Гюгоніо, Адамаром і Цемпленом, призвела, зрештою, до загальної теореми Кочина [Кочин, 1926], застосовування якої до принципу кількості руху з рівнодіючою силою, заданою (2.1), дає умову стрибка

$$\left[\mathbf{t}_{\partial V} + \rho U \dot{\mathbf{x}}\right] = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

Тут квадратні дужки позначають стрибок через сингулярну поверхню в конкретному розглянутому місці, U - локальна швидкість поширення поверхні, а $\dot{\mathbf{x}}$ - поле швидкості. Умова (2.8) необхідна і достатня для того, щоб виконувався принцип кількості руху з рівнодіючою силою, заданою принципом напружень Коші, в кожному околі точки, до якої він відноситься. Таким чином, ця умова не висловлює нового поняття, а скоріше є результатом математичного застосування принципу напружень для випадку, коли звичайні припущення про гладкість були б занадто сильними. Принцип моменту кількості руху, за умови, що рівнодіючий момент заданий (2.2), при сингулярній поверхні також еквівалентний умові Коші.

Таким чином О. Коші вивів три рівняння рівноваги елементарного чотиригранника, довів закон парності дотичних напружень, ввів поняття головних осей і головних напружень і вивів диференціальні рівняння рівноваги. Їм же введено поняття про поверхню нормальних напружень (квадрика Коші), на якій розташовуються кінці радіус-векторів, напрями яких збігаються з напрямом нормалей до площадок, а величина обернено пропорційна кореню квадратному з абсолютної величини нормального напруження на цій площадці, і доведено, що ця поверхня є поверхнею другого порядку з центром у початку координат. Можливість перетворення поверхні нормальних напружень до головних осей свідчить про існування в кожній точці трьох взаємно головних перпендикулярних площадок.

Огюстен Луї Коші
(1789–1857)
фр. Augustin Louis Cauchy

Аналогічне поняття про поверхню дотичних напружень було введено російським механіком Г.В. Колосовим в 1933 р. [Колосов, 1933].

Цікаво, що коли О. Коші було дванадцять років, великий Ж.-Л. Лагранж звернув увагу на його визначні математичні здібності, наврочив хлопчикові велике майбутнє і порадив батькові хлопчика: «*Якщо ви не поквапитесь дати Огюстену ґрунтовну літературну освіту, то він попростує за своїм покликанням, зробиться великим математиком, але не буде вміти навіть писати рідною мовою. Не дозволяйте йому торкатись до математичних книг раніше сімнадцятирічного віку*». Порада була виконана. Огюстен отримав освіту в школі для особливо обдарованих дітей, де вивчав гуманітарні науки, декілька мов. Його вірші французькою та латинською мовами відзначались преміями. В шістнадцять років він вступив у Ecole Polytechnique (Політехнічну школу), а потім у Ecole des Ponts et Chaussees (Школу мостів і шляхів). Після її закінчення молодий інженер працює в Шербурзі на будівництві портових і оборонних споруд. Одразу почалася і наукова діяльність спрямована, на розрахунок кам’яних мостів, склепінь та інших конструктивних форм. Але молодого дослідника тягнуло до наукових проблем з використанням математики. Коші написав більш ніж 700 математичних робіт, у яких заклав основи сучасної математики.

Геометрична інтерпретація напруженого стану в просторі у вигляді еліпсоїда напружень була запропонована Г. Ламе і Б. Клапейроном в їх мемуарах, представлених в Паризьку академію наук у 1828 р. і опублікованих в 1833 р. [Lamé & Clapeyron, 1833].

Геометричне зображення напруженого стану на площині для однієї серії площадок, що проходять через головну ось, у вигляді кола напружень було запропоновано К. Кульманом в його книзі в 1866 р. [Culmann, 1866].

Для загального випадку напруженого стану дуже наочною є геометрична інтерпретація на площині дана О. Мором (так звана кругова діаграма Мора) [Mohr, 1882] в 1882 р. З неї можна зробити ряд важливих висновків про екстремальність головних напружень, положення площадок, на яких дотичні напруження максимальні, і про величини цих максимальних дотичних напружень.

О. Коші дав визначення деформацій, вивів залежність їх від переміщень в окремому випадку малих деформацій, визначив поняття головних напружень і головних деформацій і отримав залежності компонентів напружень від компонентів деформацій як для ізотропного, так і для анізотропного пружного тіла. Вони називаються узагальненим законом Гука, хоча, звичайно, ця назва умовна, тому, що поняття напружень Р. Гуку не було відомо.

У зазначених залежностях Коші спочатку ввів дві постійні і записав залежності напружень від деформацій у вигляді

$$\sigma_x = k\varepsilon_x + K\Theta, \quad \sigma_y = k\varepsilon_y + K\Theta, \quad \sigma_z = k\varepsilon_z + K\Theta,$$

$$\tau_{xy} = k\frac{\gamma_{xy}}{2}, \quad \tau_{yz} = k\frac{\gamma_{yz}}{2}, \quad \tau_{zx} = k\frac{\gamma_{zx}}{2}.$$

де $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, тобто так, як це прийнято в теорії пружності (з іншими позначеннями). Проте надалі О. Коші прийняв концепцію Л. Нав’є. Згідно їй пружні тіла складаються з молекул, між якими при деформуванні виникають сили, які діють за напрямками прямих ліній, що з'єднують молекули, і пропорційні зміні відстаней між молекулами. Тоді число пружних постійних для загального випадку анізотропного тіла дорівнює 15, а для тіла ізотропного отримуємо одну пружну постійну. Цієї гіпотези дотримувався С.-Д. Пуассон, а спочатку - Г. Ламе і Б. Клапейрон.

Дж. Грін в 1839 р. вивів залежність між деформаціями і напруженнями без використання гіпотези про молекулярну будову пружних тіл [Green, 1839]. Він отримав їх на основі принципу збереження енергії, ввівши поняття пружного потенціалу, і показав, що при використанні лінійних залежностей шести компонентів деформацій від шести компонентів напружень з 36 коефіцієнтів незалежними є 21, тобто в загальному випадку анізотропного тіла число пружних постійних дорівнює 21. Для ізотропного тіла число пружних постійних знижується до двох.

Як зазначає А.Ляв [Ляв, 1935], роботи Гріна за тим значенням, яке вони мали для основ теорії пружності, можна порівняти тільки з відкриттям основних рівнянь Нав'є. Виходячи із закону, званого нині "принципом збереження енергії", він запропонував новий метод отримання цих рівнянь. Він сам у такий спосіб формулював свій принцип і метод:

"*Яким би не був характер взаємодії елементів матеріальної системи, сума добутків внутрішніх сил на елементи відповідних напрямків, утворена для будь-якої даної маси, завжди є точним диференціалом деякої функції. Якщо ця функція відома, то ми можемо безпосередньо застосувати загальний метод, що дається в Mécanique Analytique, який, мабуть, може бути прямо застосований до проблем руху систем, що складаються з безлічі частинок, що діють одна на одну. Одна з важливих переваг цього методу полягає в тому, що сам хід обчислення необхідно приведе нас без особливих зусиль до всіх тих рівнянь і умов, які необхідні і достатні для повного вирішення будь-якої проблеми, до якої він застосовується*" [Ляв, 1935, стор.24-25].

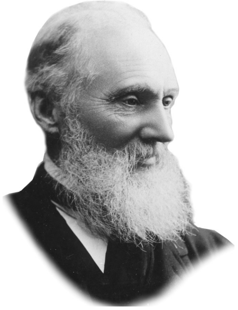
Функція, про яку тут ідеться, є взята з протилежним знаком потенціальна енергія деформованого пружного тіла, віднесена до одиниці об'єму і виражена в компонентах деформації; частинні похідні цієї функції за компонентами деформації дорівнюють компонентам напружень. Грін припускав, що ця функція може бути розкладена за ступенями і добутками компонентів деформації, тому він представив її у вигляді суми однорідних функцій цих величин першого, другого, третього і вищих порядків. Перший з цих членів повинен бути рівний нулю, бо потенціальна енергія до деформації повинна мати найменше значення; а оскільки всі деформації малі, то істотне значення має тільки один другий член. З цього принципу Грін вивів свої рівняння теорії пружності, що містять в загальному випадку 21 постійну. У разі ізотропії залишаються тільки дві постійні, і рівняння збігаються з тими, які наведені в першому мемуарі Коші.

Цікаво, що Джордж Грін (1793-1841) в юності не отримав освіти, математику вивчив самостійно і тільки у 1833 р. вступив до Кембриджського університету, який закінчив у 1837 р., тобто у 44-річному віці. У роботі «Досвід застосування математичного аналізу до теорії електрики і магнетизму» (1828) розвинув теорію електрики і магнетизму, спираючись на введене у цій роботі поняття потенціалу і співвідношення між інтегралом по об’єму і інтегралом по поверхні, що обмежує цей об’єм. Незалежно від Гріна зазначене співвідношення у тому ж році отримав М.В. Остроградський. У 1839 р. Д. Грін на основі принципу збереження енергії, вводячи поняття пружного потенціалу, вивів залежності між деформаціями і напруженнями для пружного анізотропного тіла.

Лорд Кельвін (Lord Kelvin) навів доведення існування пружного потенціалу Гріна, засноване на першому і другому законах термодинаміки. Користуючись цими законами, він робить висновок, що коли деформація твердого тіла не супроводжується зміною температури, компоненти напруження є частинними похідними деяких функцій від компонентів деформації по цим компонентам. Можна довести, що це вірно і в тому випадку, коли деформація відбувається настільки швидко, що в жодній частині тіла не відбувається ані поглинання, ані віддача тепла.

Симеон-Дені Пуассон
(1781–1840)
фр. Siméon-Denis Poisson

Джордж Грін
(1793–1841)
англ. George Green



Вільям Томсон, лорд Кельвін *(1824–1907)*
англ. William Thomson, 1st Baron Kelvin

Справа в тому, що методи Нав'є, Пуассона і пізніших мемуарів Коші призводять до рівнянь руху, що містять менше число пружних постійних, ніж рівняння, одержувані методами Гріна, Стокса і першого мемуара Коші. Значення цієї розбіжності вперше було підкреслено Стоксом. Суперечка йшла про те, чи визначаються пружні властивості ізотропного тіла двома або ж однією постійною. Пірсон називає ці дві теорії "мультиконстантною" і "рариконстантною" теоріями [Todhunter & Pearson, 1886, p. 496]; полеміка щодо цих теорій тривала досить довго. Рариконстантні рівняння можуть бути отримані з мультиконстантних, якщо в останніх прирівняти деякі пари коефіцієнтів, але рариконстантні рівняння засновані на деякій спеціальній гіпотезі про будову речовини, в той час як прийняття мультиконстантної теорії пов'язано, як вважали, з запереченням цієї гіпотези. Розбіжності між результатами обох теорій могли б бути усунені шляхом експериментальних досліджень, і можна було думати, що таким шляхом питання було б остаточно вирішене; однак цінність багатьох експериментальних досліджень, зменшується тим, що отримати достатню впевненість в ізотропії матеріалу досить нелегко, і тенденція багатьох прихильників мультиконстантної теорії базуватися на випробуванні таких матеріалів, як пробка, желатин, каучук, тільки послабила їх аргументацію. Велика частина суперечок велася стосовно значення відношення поперечного скорочення до поздовжнього видовження стержня під дією розтягуючого навантаження, прикладеного до його кінців. Це відношення називається "коефіцієнтом Пуассона". Пуассон на підставі своєї теорії прийшов до висновку, що це відношення має дорівнювати 1:4. Експерименти Вертхейма [Wertheim, 1848] зі склом і латунню не підтвердили цих результатів, і Вертхейм запропонував вважати його рівним 1:3 - значення, яке не має жодного теоретичного обґрунтування. Ґрунтуючись на експериментальному матеріалі, Ламе [Lamé, 1852] у своєму трактаті приходить до мультиконстантних рівнянь; і після появи цієї книги вони стали загальноприйнятими. Сен-Венан, який був переконаним прихильником рариконстантної теорії, виклав, проте, результати своїх досліджень про кручення [Saint-Venant, 1855], згин [Saint-Venant, 1856] і розподіл пружних властивостей в деякій даній точці [Saint-Venant, 1863], користуючись мультиконстантною теорією. Кірхгоф [Kirchhoff, 1850, 1859a] користувався цією ж теорією в своїх дослідженнях про тонкі стержні і пластинки і підкріпив її експериментами по крученню і згину сталевих стержнів [Kirchhoff, 1859b]. Клебш в своєму трактаті [Clebsch, 1862] також користувався термінологією біконстантної ізотропії. Кельвін і Тет [Thomson & Tait] приділили цій суперечці лише кілька слів і приєдналися до поглядів Стокса. Експерименти підтверджують висновок, що коефіцієнт Пуассона може значно відрізнятися від 1/4 для матеріалів, які без натяжки можна розглядати як ізотропні і однорідні.

Сер Джордж Габріель Стокс, 1-й баронет
(1819–1903)
англ. Sir George Gabriel Stokes, 1st Baronet

Вольдемар Фохт (Фогт, Фойгт)
(1850 – 1919)
нім. Woldemar Voigt

Однак найбільш вражаючі дані були отримані Фохтом [Voigt, 1887, 1910] при вивченні пружних властивостей кристалів. Відсутність впевненості в ізотропії матеріалів, які піддавались випробовуванням перестало бути перешкодою після того, як він зважився проводити експерименти з матеріалом, свідомо анізотропним[6].

Разом з тим труднощі, які підлягають вирішенню, є глибшими. За Гріном матеріал, який має анізотропію самого загального характеру, характеризується 21 незалежною постійною. Молекулярна гіпотеза, яку, розробив Коші і підтримував Сен-Венан, призводить до 15 пружних постійних, тобто якщо рариконстантна теорія вірна, то 21 постійна Гріна повинна бути пов'язана 6 незалежними співвідношеннями[7].

---

[6] Відома пропозиція, вперше зроблена Ф. Нейманом, полягає у твердженні, що анізотропія кристалів щодо пружності може бути вивчена за допомогою дослідження кристалографічних форм.

[7] Мабуть, вони вперше були отримані Сен-Венаном в його роботі про кручення [Saint-Venant, 1855], хоча А.Ляв [Ляв, 1935] називає їх співвідношеннями Коші.

Експерименти Фохта полягали у в випробуваннях на кручення і згин призм з різних кристалічних матеріалів; для більшості з них справедливі формули Сен-Венана для анізотропних стержнів, а для інших Фохт сам знайшов необхідні формули; співвідношення Коші з певним ступенем точності підтвердилися тільки для берилу і кам'яної солі; для 7 інших досліджених кристалічних матеріалів було виявлено, що коефіцієнти, які згідно з цими співвідношеннями повинні були б бути рівні, досить значно відрізнялися один від одного.

Незалежно від експериментальних даних рариконстантна теорія втратила значення у зв'язку з розширенням поглядів на будову матерії. Гіпотеза матеріальних точок, пов'язаних дією центральних сил, була облишена. Ця еволюція в фізичних поглядах визначається багатьма причинами, серед яких розбіжність рариконстантної теорії пружності з результатами експерименту грає порівняно підпорядковану роль. Набагато більше значення мали розвиток атомістичної теорії в хімії, статистичної молекулярної теорії у фізиці, поширення енергетичних принципів і відкриття електромагнітного випромінювання.

2.2. Основні етапи історії узагальненого принципу О.Коші

Можна виділити такі основні етапи історії узагальненого принципу О.Коші:

- епоха античності – Демокрит, Архіт, Аристотель, Архімед;
- епоха Відродження – Леонардо да Вінчі;
- роботи Галілея з розриву тіл при розтягуванні;
- роботи Гука, Маріотта, Юнга;
- поняття про натяг у гнучких нитках – Г. Пардіс (1673), Я. Германн (1716), Якоб Бернуллі (1744). Дослідження з пружності Л.Ейлера (1727);
- принцип затвердіння С.Стевіна (1586). Роботи з гідростатики, гідравліки, гідродинаміки – І. Ньютон (1687), Б. Тейлор (1715), Л. Ейлер (1740), Даніель Бернуллі (1730), Йоганн Бернуллі (1740), Л. Ейлер (1749-1752), Ж. Д'Аламбер (1749), Л. Ейлер (1750-1766);
- напруження при згині балки – Г.Галілей, Е.Маріотт, Г.Лейбніц (1684), А.Паран (1713), Варіньон, Кулон, Якоб Бернуллі, Ейлер, Дюло, Тредгольд;
- визначення напружень зсуву – Кулон (1773);
- урахування зсувів при згині балки. Д.І. Журавський;
- узагальнена теорія напружень – Декарт, Ньютон, Бошкович, Нав'є, Коші, Френель, Пуассон, Дж.Грін, Кельвін, Стокс, Б.Сен-Венан, Фохт.

2.2.1. Античність

Перші знання в галузі механіки до початку VI ст. до н. е. були (користуючись сучасною термінологією) з гідравліки, будівельної механіки, статики, динаміки і небесної механіки.

Значно розвинув учення про рух відомий грецький матеріаліст Демокрит (прибл. 460-370 до н. е.). Він вчив, що матерія складається із атомів, дрібних частинок, які не поділяються, мають різну величину і форму. Атоми рухаються у порожнині у різних напрямках і з різними швидкостями, але не прискорюючись і не сповільнюючись і, таким чином, не зупиняючись. Цей рух вічний, він не має ні початку ні кінця. Таким чином Демокріт випередив закон інерції, різниця була у тому, що він припускав не тільки прямолінійний, а і круговий рух атомів.

Вважається, що першим, хто застосував математичні методи до систематизованого вивчення механіки, був представник піфагорійської школи Архіт Тарентський (прибл. 428-347 до н. е.).

Математика епохи еллінізму розвивалась в основному у прикладному напрямку: будівництво, створення нових машин, більша увага до міцності конструкцій тощо.

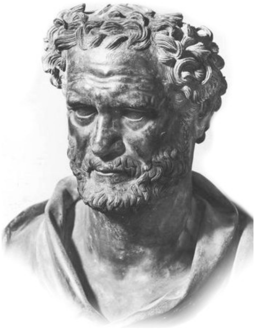
Формулювання принципу можливих швидкостей (переміщень) для важеля містилось ще у «Фізиці» видатного давньогрецького філософа Аристотеля (384–322 до н. е.). Причому Аристотель, як зазначає Л. Ейлер [Эйлер, 1959], мабуть запозичив цю думку у своїх попередників.

У роботах Аристотеля – «Фізика», «Трактат про небо» представлена розгорнута концепція поняття сили або напруженості (до речі, воно остаточно було сформовано лише через дві тисячі років), яка (сила) у Аристотеля виступає першопричиною руху. Він знає складання рухів за правилами паралелограму, йому відомі поняття швидкості і опору середовища.

У творі «Механічні проблеми», що належить одному з учнів Аристотеля (цей твір довгий час приписувався самому Аристотелю, тому автора його зараз називають «Псевдо-Аристотелем») і написаному в III ст. до н. е., ми знаходимо навіть визначення механіки (грецьке слово «механе» означає хитрість). У цьому творі вперше було надано пояснення рівноваги тіл і, таким чином, він став фундаментальним для створення статики. Вказавши, що своїм мистецтвом людина може перемагати природу, йти «проти природи», Псевдо-Аристотель говорить: «*У багатьох речах природа діє всупереч потребам нашим; вона має свій образ дій, який не підлягає мінливості умов, а потреби наші змінюються дуже різноманітно. Тому при здійсненні чого-небудь всупереч природі виникають складні питання - апорії, що вимагають майстерного з ними поводження*».

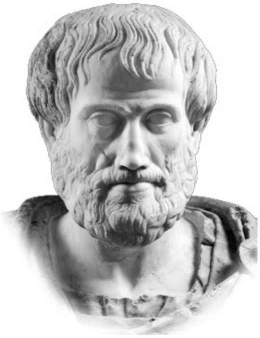
Серед інших в «Механічних проблемах» дискутується питання, яке викликало досить великі спори в XVII і XVIII ст., - питання про відмінність дії тиску і удару. «*Чому, якщо прикласти до дерева сокиру і на сокиру покласти важкий вантаж, дерево буде пошкоджено дуже мало, тоді як, якщо підняти сокиру і без вантажу ударити по дереву, дерево розколеться, хоча вага падаючої сокири буде набагато менша ваги вантажу, що тисне на сокиру?*». Проте, задовільної відповіді на питання Псевдо-Аристотель, звичайно, дати не може - питання вимагає глибокого вивчення перетворення рухів. Відзначимо, проте, що вже в творі «Про небо» Аристотель дав як міру сили величину mv.

Славетним математиком і механіком античності був Архімед (287–212 р. до н. е.). Він зробив видатний внесок у математику, механіку, фізику і астрономію, впритул підійшов до створення інтегрального числення. Також він з'ясував принцип центра ваги, створив строгу систему статики, заклав основи гідростатики. У галузі прикладної механіки зробив багато винаходів, створив багато нових машин.

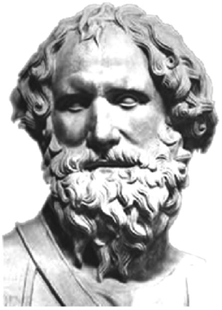


Демокріт *(прибл. 460–370 до н.е.) дав.-гр. Δημόκριτος,*

Архіт Тарентський *(428–365 до н. е.) дав.-гр. Αρχύτας ,*



Аристотель *(384-322 до н. е.) дав.-гр. Αριστοτέλης*



Архімед *(прибл. 287-212 до н. е.) дав.-гр. Αρχιμήδης*

Математичний геній Архімеда проявився особливо виразно в тому, що він взявся за вирішення найважчих проблем свого часу: обчислення площ криволінійних фігур, обчислення поверхонь і об’ємів циліндра і кулі. Ці проблеми приводять його (у творі «Ефодікон», відкритому в 1906 р.) до встановлення основних понять інтегрування. Історії знадобилося біля 1700 років для того, щоб І. Ньютоном і Ґ. Лейбніцем було фактично започатковано диференціальне і інтегральне числення. Свій математичний геній Архімед проявив і в розв’язанні механічних задач. Його основні досягнення: закон важеля і закон Архімеда отримані геометричним методом. Можна з повним правом назвати Архімеда піонером математичної фізики. Статика Архімеда викладена в трактатах «Про рівновагу площин» та «Про плаваючі тіла». Закон важеля міститься в першому трактаті. Центральною ідеєю трактату є поняття центру тяжіння. Емпіричні відомості про рівновагу важкого тіла були відомі давно. Ще єгиптяни вживали виска. Але тільки у Архімеда ми знаходимо виразне уявлення про таку точку всередині тіла, щодо якої врівноважуються ваги всіх інших точок його, так що тіло, обперте в цій точці, буде в рівновазі.

Звернемося тепер до іншого результату Архімеда, до його знаменитого закону [Кудрявцев, 1948]. Добре відома розповідь Вітрувія про обставини відкриття цього закону. Вигук Архімеда, який відкрив закон у ванні, «*Еврікa!*» - став розхожим виразом. Вітрувій розповідає, що Архімед дослідом перевірив своє відкриття. Звичайно, не підлягає сумніву, що дослід наштовхнув Архімеда на ідею, і дослід дав йому можливість її перевірити. Більше того, Архімед, безсумнівно, вмів на досліді визначати питомі ваги; згадують навіть про поплавок, за допомогою якого порівнюють питомі ваги рідин (ареометр). Але, вірний своєму методу, Архімед прагне довести закон математично, виходячи з деяких постулатів. В основу Архімед кладе таку гіпотезу про природу рідини: «*Вважається, що рідина по природі своїй така, що при рівномірному і безперервному розташуванні її частинок менш стиснута частинка виштовхується більш стиснутою, і що окремі частинки цієї рідини відчувають тиск розташованої над ними рідини, оскільки ця рідина не замкнута в чому-небудь або не відчуває тиску з боку будь-якого іншого предмета*»[8].

Виходячи з цієї гіпотези, Архімед показує, що поверхня рідини в спокої повинна бути сферою, центр якої збігається з центром Землі. Справді, якби цього не було, то не могло б бути рівноваги: одні частини рідини були б здавлені більше, ніж інші, що згідно з постулатом призвело б до переміщення менш здавлених частинок.

Ця теорема у Архімеда відіграє основну роль. Звідси він доводить насамперед, що тіла однакової питомої ваги з рідиною («*мають при рівному об'ємі і рівну з рідиною вагу*») занурюються в рідину настільки, що абсолютно не виступають над її поверхнею, але і не опускаються в ній скільки-небудь глибше.

Далі Архімед формулює свій закон в наступних двох твердженнях:

«*Твердження VI. Тверді тіла, які легші за рідину, будучи занурені в рідину, прагнуть догори з силою, рівною перевищенню ваги рідини, взятої в об'ємі цих тіл, над вагою самих тіл.*

Твердження VII. Тіла, які важчі за рідину, будучи опущені в рідину, занурюються все глибше, поки не досягають дна, і, перебуваючи в рідині, втрачають в своїй вазі стільки, скільки важить рідина, взята в об'ємі цих тіл».

В особі Архімеда механіка стародавніх досягла кульмінаційного пункту. До його результатів наступники не додали нового (Виняток становлять дослідження Паппа про центр ваги.), а в середні віки вони були втрачені, і архімедове вчення про плавучість тіл було замінено вченням схоластів про те, що плавання тіл обумовлено їх формою.

2.2.2. Відродження. Леонардо да Вінчі

Епоха відродження принесла пожвавлення інтересу до науки механіки. Найбільш виразним представником цієї епохи є Леонардо да Вінчі. Як зазначає К. Трусделл [Truesdell, 1968], із запропонованих Леонардо правил тільки одне справедливо і в наші дні, і воно досить очевидне: міцність стержня пропорційна площі його поперечного перерізу.

Леонардо експериментально вивчав міцність будівельних матеріалів, досліджував згин балок, зокрема вплив їх розмірів на міцність, опір колон, де він встановив, що їх несуча здатність зворотно пропорційна довжині і прямо пропорційна площі їх перетину.

Леонардо Да Вінчі
(1452–1519)
італ. Leonardo da Vinci

---

[8] Цитата взята з книги: Архимед, Стэвин Симон, Галилей Галилео, Паскаль Блез. Начала гидростатики. - М.-Л.: ГТТИ, 1933. - 404 с.

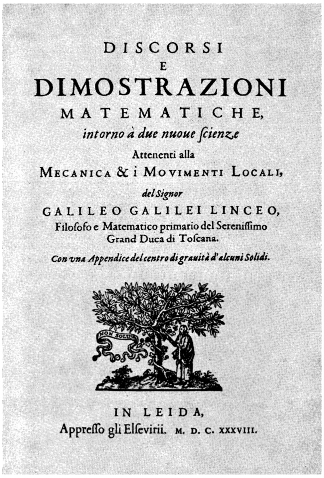
Кюррер [Kurrer, 2008] відзначає, що у рисунках Леонардо, можна знайти численні приклади принципів теорії споруд і опору матеріалів, які перевершують за своїм значенням видатні внески учених стародавньої науки періоду еллінізму, таких як Архімед, Герон і Ктесібій, і тісно пов'язані з технічними роздумами Леонардо. Найбільш знаменитий як живописець, автор «Мони Лізи» і «Таємної вечері», Леонардо як інженер представив перші письмові свідоцтва по експериментах в галузі опору матеріалів в своїх записках, датованих приблизно 1500 роком, відомих історикам культури, науки і техніка під назвою «Codex Atlanticus» (Атлантичний Кодекс).

2.2.3. Галілей

Галілео Галілей
(1564–1642)
італ. Galileo di Vincenzo Bonaiuti de 'Galilei

Першим в історії людства поставив питання про міцність тіл і першим, хто спробував його розв'язати був Галілео Галілей. Тільки Леонардо да Вінчі займався проблемою міцності і стійкості раніше за Галілея. Але його праці залишились неопублікованими і тому не мали впливу на розвиток науки про міцність.

Галілео ді Вінченцо Бонайуті де Галілей – італійський фізик, механік, математик, астроном, один із засновників точного природознавства. Галілей народився в м. Піза [Fahie, 1903] (Італія) і походив зі знатного флорентійського роду. Початкове навчання латинської і грецької мов і логіці він отримав у монастирі Валдомброза, поблизу Флоренції. У 1581 р. був прийнятий в Пізанський університет, де йому належало вивчати медицину. Але дуже скоро він захопився лекціями з математики і з усією енергією поринув у вивчення творів Евкліда і Архімеда.Мабуть, з творів Кардано (див. [Duhem, 1905, стор. 39])[9] він познайомився з відкриттями Леонардо да Вінчі в галузі механіки. У 1586 р. він сконструював гідростатичні ваги для вимірювання щільності різних речовин і провів дослідження по знаходженню центрів ваги твердих тіл. Ця робота[10] принесла йому популярність і в середині 1589 р. він почав викладати в Пізанському університеті математику в якості професора. На той час йому не виповнилося і 26 років.



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Титульний аркуш «Бесід»

---

[9] Дж. Кардано обговорює питання механіки в одній зі своїх математичних робіт. Його уявлення про цю науку дуже схоже з уявленнями Леонардо да Вінчі, у зв'язку з чим зазвичай припускають, що Кардано були відомі рукописи і записники останнього.

[10] Опублікована в 1586 р. під назвою «La Bilancetta» (Маленьки ваги).

За період свого перебування в Пізі (1589-1592) Галілей продовжував дослідження в галузі математики і механіки, поставивши, зокрема, знамениті досліди з падаючими тілами. На основі цих дослідів їм був написаний (1590) трактат «De motu gravium» («Про рух падаючих тіл»), який являє собою початок тієї динаміки, яку ми знаємо нині. Головними висновками цієї роботи були наступні: 1) всі тіла падають з однієї і тієї ж висоти в рівні інтервали часу; 2) швидкості, що мають тіла в кінці падіння, пропорційні тривалості падіння; 3) шляхи, що пройшли падаючі тіла, пропорційні квадратам часу падіння. Ці висновки повністю розходилися з основами механіки Аристотеля, але Галілей, не вагаючись, спирався на них у своїх диспутах з представниками аристотелевої школи. Це породило почуття ворожості проти молодого Галілея, яке спонукало його, врешті-решт, покинути Пізу і повернутися у Флоренцію. У цей важкий для Галілея час друзі допомогли йому отримати посаду професора в Падуанському університеті.

7 грудня 1592 р. Галілей вступив у виконання своїх нових обов’язків, виголосивши промову, яка викликала неймовірне захоплення не тільки з причини її глибокої вченості, а й у силу її красномовства і витонченості формулювань. Перші роки роботи в Падуї Галілей був виключно активними. Його лекції набули такої широкої слави, що туди стали стікатися студенти з інших європейських країн. Іноді для цих лекцій відводилася аудиторія, в якій могло вміститися 2000 слухачів. У 1594 р. їм був написаний знаменитий трактат з механіки «Delia scienza meccanica» («Про науку механіку»). Різноманітні задачі статики розв’язувались у ньому за допомогою принципу віртуальних переміщень. Приблизно в той же час у зв’язку з деякими питаннями кораблебудування Галілей зацікавився і опором матеріалів [Тимошенко, 1957]. Однак незабаром його увагу привернула астрономія. Відомо, що в перші роки своєї педагогічної діяльності в Падуї Галілей дотримувався птолемеєвої системи, як це було зазвичай того часу. Але вже в 1597 р. у листі до Кеплера він зізнається: «*Багато років тому я почав схилятися до думок Коперника, і в світлі його теорії мені вдалося пояснити багато таких явищ, які абсолютно не піддавалися поясненню на основі старої гіпотези*».

Галілей був послідовником М. Коперника (1473-1543) і шукав підтвердження справедливості його вчення про геліоцентричну систему світу. Однак, у 1616 р. вчення Коперника було офіційно визнане єретичним. Після перипетій з інквізицією і «добровільного» в 1633 році (після допитів, під загрозою тортур) зречення від космогонічної теорії, Галілей оселився в Арчетрі, поблизу Флоренції. Там «величний єретик», якому виповнилося вже 69 років, присвятив свій діяльний дух давно задуманій (але також далеко не небезпечній в ті смутні часи) праці з фізики, математики й механіки. Тут він створив свою величну працю «Бесіди і математичні докази, які стосуються двох нових галузей науки, що мають відношення до механіки і місцевого руху». Зацікавленість Галілея проблемами міцності не випадкова. Великий астроном був не менш видатним інженером. Заслуга його полягає в тому, що він поклав початок розвитку двох розділів механіки - динаміки і опору матеріалів як самостійних наук. Лаґранж стверджував, що перші основи динаміки закладені Галілеєм. Сам Галілей звів велике коло питань, що пов’язані з міцністю і руйнуванням матеріалів, до однієї галузі знань (зараз це зветься опором матеріалів).

У 1638 р. на скромну віллу Арчетрі поблизу Флоренції, де доживав свого віку опальний Галілей, з далекого голандського міста Лейдена доставили примірники книги, виданої італійською, «Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze…» («Бесіди і математичні доведення, що стосуються двох нових наук…»), тільки що віддрукованої в типографії Ельзевірів [Galileo Galilei, 1638]. В Європі важко було знайти видавця, який погодився б надрукувати нову працю засудженого інквізицією ученого. Сімдесятичотирьохрічний Галілей взяв книгу, помацав її руками і відклав у бік. Йому не довелося побачити свою останню книгу – вже рік як він був сліпий.

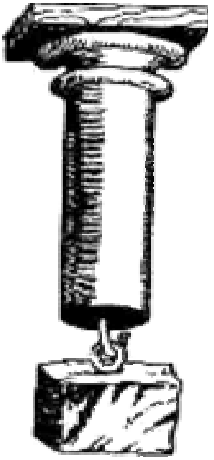


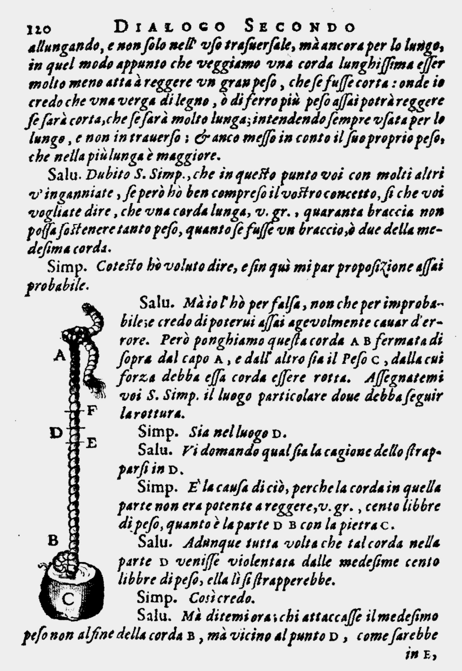
Рис. 2.2. Ілюстрація Галілея до випробування на розтяг

У цій книзі, написаній у формі діалогів, викладені фундаментальні дослідження з механіки матеріалів і динаміки. Перші два діалоги присвячені основам опору матеріалів і будівельній механіці.

Як зазначав С.П. Тимошенко [Тимошенко, 1957], частина книги, що присвячена механічним властивостям будівельних матеріалів і дослідженню міцності балок, являє собою першу друковану працю в галузі опору матеріалів; датою її виходу в світ починається історія механіки пружних тіл.

Всі роботи Галілея з механіки матеріалів увійшли в перші два діалоги його книги про дві нові науки. Своє викладення він починає посиланням на деякі спостереження, зроблені ним при відвідинах венеціанського арсеналу, і обговоренням властивостей геометрично подібних споруд. Він стверджує, що якщо зводити споруди геометрично подібні, то в міру збільшення їх абсолютних розмірів вони будуть ставати все більш і більш слабкими. Для пояснення цього він вказує: «*Невеликі обеліск, колона чи інша будівельна деталь можуть бути встановлені без усякої небезпеки обвалення, тим часом як вельми великі елементи цього типу розпадаються на частини через найнесуттєвіші причини, а то й просто під дією своєї власної ваги*». Щоб підтвердити це, він починає з дослідження міцності матеріалів при простому розтязі (рис. 2.2) і встановлює, що міцність бруса пропорційна площі його поперечного перерізу і не залежить від його довжини. Таку міцність бруса Галілей називає «*абсолютним опором розриву*» і наводить кілька числових значень, що характеризують міцність міді.

У книзі Галілея Сальвіаті береться спростувати загальну помилку, що довга мотузка не може витримати таку ж велику вагу, як і коротка (рис. 2.3). Є конкретна мотузка; він вважає, що прикріпленої в точці C деякої ваги якраз достатньо, щоб розірвати її, і він запитує Сімплічіо, де відбудеться розрив. Сімплічіо обирає точку *D*, «*тому що в цій точці мотузка не достатньо міцна, щоб витримати, скажімо, 100 фунтів*». Сальвіаті тоді пропонує уявити, що мотузка закріплена в точці *F*, трохи вище за *D*, а в точці *E*, яка розташована трохи нижче за *D*, прикріплений вантаж. Він каже, що мотузка все ще піддається такому ж натягненню в *D*, таким чином, короткий фрагмент *FE* знову розірветься в точці *D* згідно з припущенням Сімплічіо. Це reductio ad absurdum (доведення до абсурду) є типовим прикладом методу викладення Галілеєм своїх припущень у формі риторики [Truesdell, 1968]. В дійсності він припускав, що дія мотузки і вантажу *DC* на частину мотузки, що знаходиться вище точки *D*, зводиться до деякої сили, яка діє у напрямку *DE*. Іншими словами, дія системи, що розташована нижче *D*, на систему, розташовану вище *D*, еквівалентна деякій силі, прикладеній в точці *D*.



120 DIALOGO SECONDO

allungando, e non ſolo nell' vſo traſuerſale, mà ancora per lo lungo, in quel modo appunto che veggiamo vna corda lunghiſſima eſſer molto meno atta à reggere vn gran peſo, che ſe fuſſe corta: onde io credo che vna verga di legno, ò di ferro più peſo aſſai potrà reggere ſe ſarà corta, che ſe ſarà molto lunga; intendendo ſempre vſata per lo lungo, e non in trauerſo: & anco meſſo in conto il ſuo proprio peſo, che nella più lunga è maggiore.

Salu. *Dubito S. Simp., che in queſto punto voi con molti altri v' inganniate, ſe però hò ben compreſo il voſtro concetto, ſi che voi vogliate dire, che vna corda lunga, v. gr., quaranta braccia non poſſa ſoſtenere tanto peſo, quanto ſe fuſſe vn braccio, ò due della medeſima corda.*

Simp. *Coteſto hò voluto dire, e ſin quì mi par propoſizione aſſai probabile.*

Salu. *Mà io l' hò per falſa, non che per improbabile; e credo di poterui aſſai agevolmente cauar d'errore. Però ponghiamo queſta corda* A B *fermata di ſopra dal capo* A, *e dall' altro ſia il Peſo* C, *dalla cui forza debba eſſa corda eſſere rotta. Aſſegnatemi voi S. Simp. il luogo particolare doue debba ſeguir la rottura.*

Simp. *Sia nel luogo* D.

Salu. *Vi domando qual ſia la cagione dello ſtrapparſi in* D.

Simp. *E' la cauſa di ciò, perche la corda in quella parte non era potente a reggere, v. gr., cento libbre di peſo, quanto è la parte* D B *con la pietra* C.

Salu. *Adunque tutta volta che tal corda nella parte* D *veniſſe violentata dalle medeſime cento libbre di peſo, ella lì ſi ſtrapperebbe.*

Simp. *Così credo.*

Salu. *Mà ditemi ora; chi attaccaſſe il medeſimo peſo non al fine della corda* B, *mà vicino al punto* D, *come ſarebbe in* E,

Рис. 2.3. Доведення Галілея, що довга мотузка не слабкіша за коротку

114 DIALOGO SECONDO

ſin quì dichiarate, non ſarà difficile l' intender la ragione, onde auuenga, che vn Priſma, ò Cilindro ſolido di vetro, acciaio, legno, ò altra materia frangibile, che ſoſpeſo per lungo ſoſterrà grauiſſimo peſo, che gli ſia attaccato, mà in trauerſo (come poco fà diceuamo) da minor peſo aſſai potrà tal' volta eſſere ſpezzato, ſecondo che la ſua lunghezza eccederà la ſua groſſezza. Imperò che figuriamoci il Priſma ſolido A B, C D *fitto in vn muro dalla parte* A B, *e nell' altra eſtremità s'intenda la forza del Peſo* E, *(intendendo ſempre il muro eſſer eretto all' Orizonte, & il Priſma, ò Cilindro fitto nel muro ad angoli retti) è manifeſto che douendoſi ſpezzare ſi romperà nel luogo* B, *doue il taglio del muro ſerue per ſoſtegno, e la* B C *per la parte della Leua, doue ſi pone la forza, e la groſſezza del ſolido* B A *è l'altra parte della Leua, nella quale è poſta la reſiſtenza, che conſiſte nello ſtaccamento, che s' hà da fare della parte del ſolido* B D, *che è fuor del muro, da quella che è dentro; e per le coſe dichiarate il momento della forza poſta in* C *al momento della reſiſtenza che ſtà nella*

Prop. 1

Рис. 2.4. Частина з міркувань Галілея про опір розриву консольної балки

Звичайно, саме доведення виглядає досить наївним, тому що воно доводить, що мотузка або не порветься ніколи, або порветься відразу скрізь. Поняття критичного навантаження зовсім не пояснює розрив однорідної мотузки, і згідно із загальним досвідом, який має кожен, довгий відрізок намотаного на бобіну кабелю зазвичай, хоча й не завжди, рветься під меншим навантаженням, ніж короткий, взятий навмання з тієї ж бобіни.

Коли Галілей розглядає розрив циліндричних балок в режимі розтягу, він доводить, що необхідна для цього сила повинна бути такою ж як площа основи, оскільки разом із площею збільшується і кількість волокон, ниток або інших частин, які утримують разом частини твердого тіла. Тобто він допускає, що розрив при розтягу відбувається тоді, коли сила на одиницю площі досягає певної величини.

2.2.4. Гук, Маріотт, Юнг

Знаний англійський учений-енциклопедист Роберт Гук (1635-1703), наукова творчість якого охоплює багато розділів природознавства, у 1660 р. сформулював, а у 1676 р. записав у своїй криптограмі наступне твердження «*Яке подовження, така і сила*» (навіть не навпаки), що ввійшло в історію науки як закон Гука і стало фундаментом, на якому надалі будувалась механіка пружних тіл. Працюючи над створенням конструкції регулятора точного ходу годинника, Р. Гук робив випробування плоских спіральних пружин і встановив, що кут закручування пружини пропорційний прикладеному моменту. Потім він повторив досліди на розтягнутій крученій пружині, розтягнутому сталевому дроті, консольній дерев'яній балці, зігнутою силою, прикладеною на вільному кінці. У ході цих досліджень він встановив, що в усіх випадках переміщення прямо пропорційні прикладеним силам [Hooke, 1931] . Таким чином, закон Гука був отриманий експериментально для наступних типів навантаження: розтяг (сталевий дріт), кручення (кручена пружина), згин (спіральна пружина і дерев'яна балка).

Цікаво, що як і життя Р. Гука було сповнено таємниць, так і саму появу його видатного закону не оминули загадки. Закон був надрукований в книзі Гука у вигляді криптограми «*ceiiinosssttuv*».

Чотирнадцять латинських літер, розставлених за абеткою. Якщо їх упорядкувати шляхом, відомим тільки автору криптограми, то з них починаються слова фрази, яка розкриває сутність закону - «*Ut tensio, sic vis*», тобто яке подовження така і сила.

Значення і роль закону Гука такі важливі тому, що він - загальний. Відомий французький математик, фізик і філософ А. Пуанкаре в своїй праці «Наука і метод» писав: «*... усякий закон буде тим більш цінним, чим більш він буде загальним*». До цього слід додати, що чим змістовнішим і загальнішим є науковий закон, тим більш стислою є форма, в якій він записаний, тим він простіший. Закон Гука повністю відповідає цій думці.

Тільки скорочений перелік відкриттів і винаходів Р. Гука в різних галузях техніки займе багато місця.

У 1665 р. Р. Гук вперше описав будову деяких рослинних тканин, зокрема, пробки, яка складається із маленьких комірок, обмежених перетинками. Так була відкрита клітина. Зусиллями багатьох учених, головним чином XIX і першої половини XX ст. склалась наука про клітину, яка отримала назву *цитології.*

В тому ж році Р. Гук видав класичну працю «Мікрографія», присвячену оптиці і мікроскопії (він, до речі, удосконалив мікроскоп). Тут він навів, зокрема, результати вивчення будови рослин і ввів термін «клітина».

Р. Гука визнавали хорошим архітектором. Після пожежі в Лондоні в 1666 р. він був головним помічником Кристофера Рена з відновлення міста. У співробітництві з Реном і самостійно побудував як архітектор багато будівель (наприклад, Грінвічську обсерваторію, церкву Вілленського приходу у Мілтон Кінсє), співпрацював з Реном у будівництві Лондонського собору св. Павла, купол якого побудований за його власним методом, запропонував нову схему планування вулиць при відновленні Лондона.

Р. Гук займався хвильовою теорією світла, описав явище дифракції і низку інших світлових явищ. Він проводив досліди з дерев'яними консольними балками, вимірюючи їхні прогини, і дійшов висновку, що на опуклому боці волокна - розтягнуті, на угнутому - стиснуті. В 1666 р. Р. Гук зробив доповідь в Королівському науковому товаристві, в якій, зокрема, сказав: «*Я маю намір викласти систему всесвіту, що вельми відрізняється від усіх досі запропонованих...*».

По суті, він обґрунтував закон всесвітнього тяжіння. В листі до І. Ньютона в 1668 р. він писав, що «*сила, яка керує рухом планет, змінюється в деякій залежності від відстані*». Але проникливі думки Р. Гука так і залишилися незавершеними. Пріоритет відкриття закону всесвітнього тяжіння належить І. Ньютону (1683). Почався сумнозвісний позов Р. Гука до І. Ньютона за авторство закону. Врешті решт, І. Ньютон одного разу зробив посилання на Р. Гука і інцидент було вичерпано.

В.І. Арнольд у книзі «Гюйгенс і Барроу. Ньютон і Гук» аргументує, в тому числі документально, твердження про те, що саме Р. Гук відкрив закон всесвітнього тяжіння (закон зворотніх квадратів для центральної гравітаційної сили) і навіть цілком коректно обґрунтовав його для випадку кругових орбіт. І. Ньютон же доробив це обґрунтування для випадку еліптичних орбіт (Р. Гук за власною ініціативою повідомив І. Ньютону свої результати і попросив зайнятися його цією задачею). Наведені там цитати І. Ньютона, який оспорював пріоритет Р. Гука, говорять лише про те, що І. Ньютон вважав свою частину доведення значно більш важливою (в зв'язку з її складністю і т.ін.), але зовсім не заперечує належність саме Р. Гуку формулювання закону. Таким чином, пріоритет формулювання і первинного обґрунтування слід віддати Р. Гуку і він же, мабуть, ясно сформулював І. Ньютону задачу про завершення обґрунтування. І. Ньютон стверджував, що зробив це відкриття незалежно і раніше, але він нікому не повідомляв і не залишив жодних документальних свідоцтв цього. Крім того, І. Ньютон зупинив роботи по цій темі, які поновив, за його зізнанням під впливом Р. Гука.

Наведений факт не є єдиною суперечкою Р. Гука за свій пріоритет. Відомо, що він оспорював свої права з К. Гюйгенсом та іншими вченими. Пояснюється це різнобічністю інтересів і захоплень Р. Гука, внаслідок чого він проривався у сферу наукових досліджень інших дослідників. Швидко добиваючись успіхів, він остигав, йому частенько не вистачало терпіння і часу довести справу до кінця.

Остання цікава риса його характеру. Він був товариською людиною і зустрічався з різними людьми. Його нерідко можна було бачити в порту. Як результат розпитувань моряків, він в 1696 р. зробив в Королівському товаристві доповідь про нову мапу «Татарії» – просторої території, до якої входить Урал і західна частина Сибіру.

Майже одночасно з Р. Гуком (1680 р.) і незалежно від нього закон, який ми називаємо ім'ям Гука, сформулював француз Е. Маріотт: «*Навіть найбільш тверді* *тіла – скло і залізо – деформуються пропорційно навантаженню*». Тобто, $f = kP$, де P – навантаження, f – деформація стержня, k – коефіцієнт пропорційності.

Едм Маріотт (1620-1684) - французький фізик, один із засновників (1666) і перших членів Академії наук, заснованої в Парижі. Народився в Діжоні, був пріором монастиря св. Мартіна в містечку Сан-Мартан су Бон (St. Martin sous Beaune) поблизу Діжона [Храмов, 1983, стор. 179].

Наукові роботи відносяться до механіки, термодинаміки, оптики. У 1676 р. встановив закон залежності зміни об’єму газу від тиску при сталій температурі (зазвичай його називають «законом Бойля-Маріотта», оскільки цей закон був відкритий і опублікований у 1662 р. Р. Бойлем). Передбачив різноманітні застосування цього закону, зокрема, розрахунок висоти місцевості за показаннями барометра. Описав численні досліди з вивчення течії рідин по трубах, експериментально підтвердив висновки Г. Галілея і Е. Торрічеллі відносно швидкості витоку рідини. Дослідив висоту підйому води у фонтанах і склав таблиці залежності висоти підйому води від діаметру випускних отворів. Вивчав деформації пружних тіл, коливання маятника. У «Трактаті про удар і співудар тіл» (1678) узагальнив дослідження у цій галузі. Довів збільшення об’єму води при замерзанні. У 1666 р. виявив наявність в оці людини сліпої плями. Досліджував кольори, зокрема, вперше описав світлові кольорові кільця навколо Сонця і Місяця (оптичне явище гало), вивчав веселку, променеву теплоту, показав різницю між тепловими і світловими променями. Помер у Парижі у 1684 р.

Розшифрування коефіцієнту пропорційності k стало можливим через 130 років, коли англійський фізик Томас Юнг (1773–1829) при дослідженні розтягу-стиснення вперше (1807) ввів поняття модулю пружності E, названого його ім’ям (модуль Юнга). Тепер можна було записати $f = \Delta l = \frac{Pl}{EF}$, де l – довжина стержня, F – площа поперечного перерізу, E – модуль Юнга, P – навантаження (сила).

Роберт Гук
(1635–1703)
англ. Robert Hooke

Едм Маріотт
(1620–1684)
фр. Edme Mariotte

Томас Юнг
(1773–1829)
англ. Thomas Young

Цікаво, що за фахом Т. Юнг - лікар, дослідник в галузі медицини і фізіології. Його праці стосуються також оптики, акустики, теплоти, механіки, астрономії, геодезії,філології. Він один з основоположників хвильової теорії світла, пояснив явище інтерференції світла тощо.

По-різному люди приходять в науку. Т. Юнг належить до тих, хто є дослідником від природи. У дворічному віці навчився читати, в шість – почав самоосвіту, вже з дев’яти років вивчав математику і мови. В чотирнадцять років він володів французькою, італійською, єврейською, фарсі і арабською і почав давати приватні уроки. В п’ятнадцять років він розпочав роботу над «Філософським трактатом». З дев’ятнадцяти років почав вивчати медицину одразу в трьох університетах. Медицина стала справою всього його життя. Одночасно він представив у Королівське наукове товариство працю «Теорія зору», а невдовзі «Начала і досліди, що стосуються звуку і світла». В 23 роки отримав докторський ступінь з медицини. В 1807 році видав два томи по 900 сторінок кожний з натуральної філософії. Він глибоко дослідив єгипетські ієрогліфи і теорію музики. Грав на всіх відомих музичних інструментах, навіть на шотландській волинці. Він чудово знав живопис. При всьому цьому він все життя працював практикуючим лікарем.

Сказано вже багато дивовижного про Т. Юнга, але дуже хочеться ще додати до його повного неповторного портрета. Ще в дитинстві захопившись ботанікою, він збудував для своїх дослідів мікроскоп. А оскільки він до всього підходив розважливо, вивчив для розрахунків диференціальне числення, а для роботи - токарну справу. Під час навчання в університетах виступав у цирку наїзником, вольтижером на двох конях одразу і танцював на канаті не гірше від професійного циркача.

Різнобічність талантів Т. Юнга дозволяє багатьом дослідникам порівнювати його з Леонардо да Вінчі. Т. Юнг розробив особисте правило: «*Всяка людина спроможна робити те, що роблять інші люди*», і все життя сповідував його. Він займався різноманітними справами і неодмінно здобував успіх.

Т. Юнг розвинув теорію згину балок, теорію ударного руйнування твердих тіл. Він вперше ввів термін «*енергія*». Зазначимо, що термін «*робота*» був введений Г.-Г. Коріолісом.

Т. Юнг встановив обмеженість закону Гука, тобто справедливість його тільки в початковій стадії навантаження, а також визначив поняття модуля пружності, хоча й у формі, відмінній від прийнятої в даний час. Т. Юнг ввів дві величини: вагу модуля EA, де A - площа поперечного перерізу стержня, і висоту модуля $\frac{E}{g \cdot \rho}$, де ρ - щільність матеріалу тіла. Перша величина не є постійною матеріалу. Це жорсткість стержня при розтягуванні. Друга - постійна матеріалу, що має розмірність довжини. Визначення модуля пружності дано Т. Юнгом в такій вельми туманній формі: «*Модуль пружності якої-небудь речовини являє собою стовпчик цієї речовини, здатний призвести тиск на свою основу, який так само відноситься до ваги, що створює деяку ступінь стиснення, як довжина стовпчика до зменшення його довжини*».

Т. Юнг звернув увагу на те, що при розтягуванні-стисненні поперечні розміри стержня змінюються. Ці положення сформульовані їм у двотомному курсі лекцій, виданих у 1807 р. [Young, 1807], які Т. Юнг читав в Королівському інституті.

Т. Юнг також застосовує такі вирази, як «*вага модуля*» і «*висота модуля*», зазначаючи, що висота модуля для даного матеріалу не залежить від площі поперечного перерізу. Вага модуля дорівнює добутку величини, яку ми називаємо зараз модулем Юнга, на площу поперечного перерізу бруса. Т. Юнг визначив величину модуля пружності сталі, спостерігаючи за частотою вібрацій камертона, і знайшов, що він дорівнює $29 \cdot 10^6$ *фунт/дюйм*^{2} = $2 \cdot 10^5$ *МПа*.

Механік і історик механіки К. Трусделл вказує [Truesdell, 1968], що в манускрипті Л. Ейлера, написаному в 1727 р. (за 80 років до виходу у світ книги Т. Юнга), але опублікованому тільки в 1862 р., міститься поняття модуля пружності E, хоча для його використання надалі він застосовував величину $\frac{E}{g \cdot \rho}$, тобто висоту модуля за Юнгом [Белл, 1984].

Математик, механік і архітектор Джордано Ріккатті (1709-1790) по експериментально виміряній частоті згинальних коливань сталевих і латунних циліндрів в 1767 р. визначив співвідношення їх модулів пружності [Riccati, 1782], тобто здійснив перше експериментальне дослідження модулів пружності.

Абсолютна величина співвідношення поперечної деформації до поздовжньої, постійна в межах справедливості закону Гука, пов’язана з ім’ям С.-Д. Пуассона, який ввів її у своєму мемуарі, представленому в Паризьку академію наук в 1829 р. [Poisson, 1829], і на основі рариконстантної молекулярної теорії встановив, що вона дорівнює 1/4.

Слід зазначити, що при постановці задачі розтягу стержня зазвичай формулюється принцип Б. Сен-Венана. Згідно з цим принципом стосовно стержнів особливості прикладення зовнішніх сил до розтягнутого або стиснутого стержня проявляються, як правило, на відстанях, що не перевищують характерних розмірів поперечного перерізу стержня. Цей принцип був висловлений Б. Сен-Венаном в мемуарах [Saint-Venant, 1855, 1856][11] і обґрунтований їм дослідним шляхом. На загальний випадок деформованого тіла цей принцип був поширений учнем Б. Сен-Венана механіком Ж.В. Буссінеском (1842-1929) в 1885 р. [Boussinesq, 1885].

Клод Баре де Сен-Венан
(1797 – 1886)
фр. Claude Barré de Saint-Venant

***Жозеф Валантен Буссінеск** (1842 – 1929)*
фр. Joseph Valentin Boussinesq

Габріе́ль Ламе́
(1795 – 1870)
фр. Gabriel Lamé

---

[11] Існує переклад цих мемуарів російською: [Сен-Венан, 1961].

У статті [Джанелидзе, 1958] розглянуті роботи, в яких дано доведення принципу. В.З. Власовим показано [Власов, 1959], що цей принцип несправедливий для тонкостінних стержнів.

2.2.5. Поняття про натяг у гнучких нитках. Г. Пардіс, Я. Германн, Якоб Бернуллі. Дослідження з пружності Л.Ейлера

Слід зазначити, що при вивченні ланцюгової лінії і підвісного моста Г. Пардіс (1673) припустив, що форма гнучкої лінії не зміниться, якщо будь-яка частина її ствердіє, або, більш того, якщо ми замінимо частини нитки, розташовані над двома точками A і a, відповідними силами, що діють уздовж дотичних в точках A і a. Цей принцип використаний у всіх наступних дослідженнях ланцюгової лінії.

У ряді своїх досліджень гнучких ниток довільної товщини під дією довільно розподіленого навантаження (1691-1704) Якоб Бернуллі застосовував принцип Пардіса без змін. Він в явній формі вводить *firmitas* (*напруження*); позначивши його через T, можна записати одну з форм, в яких Бернуллі дав загальні рівняння рівноваги плоскої гнучкої нитки, наступним чином:

$$T\frac{dx}{ds} = T_0 - \int_0^s F_x ds,$$

$$T\frac{dy}{ds} = -\int_0^s F_y ds,$$

де F_x і F_y - компоненти прикладених сил на одиницю довжини. Ці результати не були опублікування до 1744 р.; тим часом Я. Германн (1716), який був учнем Якоба Бернуллі, розвинув їх і опублікував явне визначення поняття «tenacitas vel firmitas»: «*Натяг або стиснення нитки або тіла в будь-якій його точці або в будь-якому елементі кривої є та сила нитки або тіла, з якою воно опирається силі або навантаженню, що виникає від всіх прикладених навантажень і розтягує нитку в протилежному напрямку, прагнучи розірвати її. Цей натяг строго дорівнює розриваючій силі, яка обумовлена усіма навантаженнями, прикладеними до тіла*». Це визначення не є настільки змістовним, як воно виглядає на перший погляд, оскільки Я. Германн не розглядав чого-небудь більш загального, ніж плоска ідеально гнучка нитка.

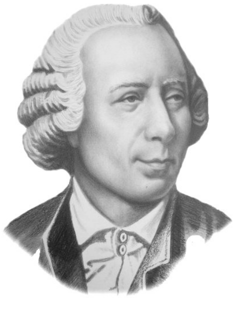
К. Трусделл [Truesdell, 1968] відзначає, що в роботах Якоба Бернуллі і Л. Ейлера про згин стержнів (1705, 1727, 1779) досліджувався вплив властивостей матеріалу на загальне поняття напружень.

Якоб Бернуллі в своїй статті 1705 р. довів, що закон пружності для волокон стержня повинен містити дробове розширення як функцію сили, розділену на площу. Можливо через помилки, що містяться в ній з інших питань, ідеями, які висловлені в цій статті, не скористались послідовники, навіть Антуан Паран (1666-1716). Оскільки, як і в роботі Лейбніца про нерозтяжні і незгинні стержні, форма поперечного перерізу явно впливає на модуль, то аналіз не виявив певної відповіді.

Перший випадок, коли математично необхідно використовувати скоріше загальне рівняння для матеріалу, а не рівняння для різних тіл, зустрічається, якщо ми виводимо закон згину Бернуллі на підставі закону розширення для волокон, з тим щоб отримати також добре відомий сьогодні результат жорсткості при згині EI , де E - «модуль Юнга» матеріалу, I - момент інерції поперечного перерізу навколо осі, перпендикулярній площині згину вісі. Величина I зустрічалася в роботі Г. Лейбніца (1687) про істотно нерозтяжні і негнучкі стержні, яка вказана вище. Для того щоб проінтегрувати напруження по поперечному перерізу, як це зробив Г. Лейбніц, необхідно мати вираз для напруження на одиницю площі, а не просто рівнодіюче напруження в стержні. Хоча Якоб Бернуллі намагався протягом багатьох років отримати теорію згину, засновану на законі розширення волокон, він жодного разу не домігся успіху, незважаючи на те, що назбирав достатньо понять і принципів, і вона залишилася Л. Ейлеру, який отримав доказ під час першої спроби дослідження теорії пружності, розпочатої в двадцятирічному віці, коли він був студентом в Базелі (1727), але ця робота залишилася неопублікованою до 1862 р. У цій статті явно застосовується одномірна залежність розтягу-стиску, типу запропонованої двадцятьма роками раніше Якобом Бернуллі, але лінійна, тому необхідно було ввести те, що ми тепер називаємо «модулем Юнга». Л. Ейлер повернувся до цього питання в 1779 р., в кінці життя. У своїх останніх статтях про коливання стержнів, опублікованих в 1782 р., він представив і пояснив визначення «модуля Юнга» і закони подібності для стержнів, засновані на його застосуванні.

Якоб І Бернуллі
(1654-1705)
нім. Jakob Bernoulli

Якоб Герман
(1678–1733)
нім. Jakob Hermann



Леонард Ейлер
(1707–1783)
нім. Leonhard Euler

Звичайно, у всіх цих роботах векторний характер напружень, хоч і досить очевидний, але не висловлений відкрито.

Як відзначив К. Трусделл [Truesdell, 1968], сам Т. Юнг, на жаль, не вводив цей модуль, а визнав закон пружності, який виражає швидше властивості матеріалу, ніж тіла з цього матеріалу. Всі уривки, що відносяться до пружності і коливань в лекціях Т. Юнга [Young, 1807], складаються з повторень найлегших частин досліджень Бернуллі і Л. Ейлера, де рівняння переведені на мову слів, і докази, часто недостатні.

Хоча у своєму найбільш ранньому дослідженні з пружності (1727) Л. Ейлеру і вдалося врахувати лінійну зміну натягу по поперечному перерізу зігнутої балки, так що він отримав закон згину Якоба Бернуллі із закону розтягу Гука, він був незадоволений статичним обґрунтуванням теорії пружності. Впродовж наступних років Л. Ейлер отримав деякі результати зі своїх досліджень систем сил. У записі, зробленому близько 1742 р. в одному з неопублікованих записників, Л. Ейлер розрахував силу, яку потрібно прикласти в точці *A* пружного стержня для того, щоб елемент з одного боку точки *A* зберіг свою форму, якщо прибрати весь матеріал з іншого боку від *A*; він знайшов, що ця сила не буде дотичною до стержня, тобто окрім натягу, достатнього у разі ідеально гнучкої нитки, взагалі кажучи, необхідна ще й поперечна сила. У 1771 р. Л. Ейлеру, нарешті, вдалося відокремити статичні рівняння від рівнянь стану. Вводячи результуючі напруження, діючі на плоску криву, як вектор, що має дотичну і нормальну компоненти *T* і *V*, Л. Ейлер отримав замкнену систему загальних рівнянь статики для випадку відсутності розподілених пар у вигляді

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dT}{ds}-V\chi=-F_t\\ &\frac{dV}{ds}-T\chi=-F_n\\ &\frac{dM}{ds}-V=0 \end{aligned}\right\},$$

де χ - кривизна, а M - згинальний момент. Пізніше він висловив принцип

$$\mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_- = 0,$$

де $\mathbf{S} = T\mathbf{t} + V\mathbf{n}$ і де знаки плюс і мінус відповідають дії прибраного матеріалу з різних сторін від розглянутої точки.

2.2.6. Принцип затвердіння С.Стевіна. Роботи з гідростатики, гідравліки, гідродинаміки

Те, що рідини чинять тиск на стінки судин, в яких вони містяться, загальновідомо, однак потрібні були сторіччя роботи людської думки, щоб виробити скільки-небудь певне поняття внутрішнього тиску. Найперша згадка про силу, з якою діє рідина на рідину, зустрічається в теорії Архімеда (250 р. до н.е.) про сферичний океан, що покриває сферичну землю.

Принцип затвердіння Стевіна часто формулюється наступним чином: якщо в будь-якій рідині замінити будь-яку її частину твердим тілом, то сили, що діють з боку іншої частини рідини, залишаться незмінними. Однак аж до роботи А.К. Клеро (1743) не можна знайти такого формулювання.

Сімон Стевін
(1548–1620)
нід. Simon Stevin

Теорія С. Стевіна (1586) обмежена нестисливими рідинами на поверхні плоскої землі. С. Стевін отримує правильну формулу для тиску на горизонтальне дно;

незважаючи на те, що він ніде не робить ніякого певного твердження про бічний тиск, йому вдається знайти сумарну силу на похилі поверхні, наближаючи їх ступінчастими стінками, а потім переходячи до границі при зменшенні сходинок до нуля. Принцип затвердіння у формі Стевіна, який дає кілька наслідків, відноситься тільки до результуючої сили, що діє на плоске дно. У сучасних позначеннях він являє собою твердження того, що незалежно від форми посудини має місце співвідношення

$$F = \rho ghA, \tag{2.9}$$

де h - глибина занурення плоского дна площі A під поверхнею води.

Результати Б. Паскаля (1663) для нестисливих рідин, мабуть, цілком слідують звідси; з книги Б. Паскаля стало відомо, що повітря в стані рівноваги підкоряється тим же законам, що й вода.

Блез Паскаль
(1623–1662)
фр. Blaise Pascal

Математична гідростатика розвинулася до введення поняття внутрішнього тиску. І. Ньютон (1687) був першим, хто подумки виділив внутрішню частинку рідини і висловив твердження, що вона «*однаковим чином здавлена з усіх боків*» і що «*будь-яка внутрішня частина рідини знаходиться в тому ж стані, як і занурене в рідину тіло*».

Фактично використовуваний, хоча і не сформульований постулат в теорії рівноваги атмосфери Тейлора (1715) еквівалентний наступному співвідношенню:

$$dF = \rho ghdA,$$

де F - сила, яка діяла б на плоску поверхню площі A на висоті h. Таким чином, Тейлор вважав, що формулу С. Стевіна (2.9) можна застосовувати до приростів навіть в рідині змінної щільності ρ.

У трактаті Л. Ейлера з гідростатики (близько 1740) розглядаються тільки нестисливі рідини поблизу поверхні Землі. Л. Ейлер висловлює в явній формі твердження, що у всіх випадках тиски в усіх напрямках в даній точці рівні і нормальні до поверхонь, на які вони діють. Робота починається з леми, яка еквівалентна рівнянню

$$dF = \int_S \rho ghdS.$$

А. Клеро і К. Маклорен у своїх роботах уникають використання поняття внутрішнього тиску.

Даніель Бернуллі (1730) успішно пов’язав швидкість сталої течії нестисливої рідини в трубі з тиском, з яким ця рідина діє на стінки.

Внутрішню силу, що діє на тонкий шар рідини в трубі, вперше ввів Йоганн Бернуллі (1740) в ході успішного виконання його програми об’єднання результатів Даніеля Бернуллі в рамках загальної системи механіки. Цей тиск, названий Йоганном Бернуллі «*рушійною силою*», являє собою дію рідини на рідину. Хоча в цій роботі розглядалися тільки рух нестисливої рідини по трубах, в ній були отримані правильні результати для труб довільної форми і для несталих течій. Насправді Іоганн Бернуллі застосував до гідравлічного руху поняття натягу, яке було вироблено Якобом Бернуллі при вивченні рівноваги гнучкої нитки.

Ісаак Ньютон
(1643 - 1727)
англ. Sir Isaac Newton

Брук Тейлор
(1685 - 1731)
англ. Brook Taylor

Даніель Бернуллі
(1700–1782)
нім. Daniel Bernoulli

Іоганн Бернуллі
(1667-1748)
нім. Johann Bernoulli

Л. Ейлер з ентузіазмом сприйняв ідею Йоганна Бернуллі і поклав її в основу свого ясного і загального викладу гідравліки в ряді робіт, присвячених, головним чином, конкретним задачам (1749-1752). У цих роботах розглядалися тільки нестисливі рідини. Дійсний гідравлічний тиск *p*, що має розмірність [сила]/[площа], відіграє в цих роботах точно таку ж роль, як і в сучасному трактуванні.

У роботі Ж. Д'Аламбера з гідродинаміки (1749) було отримано ряд важливих і досить загальних рівнянь.

Статті з гідродинаміки Л. Ейлера (1750-1766) ґрунтуються на використанні внутрішнього гідродинамічного тиску у всій його загальності для будь-якої рідини при будь-яких умовах.

Статті з гідродинаміки Л. Ейлера (1750-1766) ґрунтуються на використанні внутрішнього гідродинамічного тиску у всій його загальності для будь-якої рідини при будь-яких умовах.

Жан ле Рон Д'Аламбер
(1717–1783)
фр. Jean Le Rond D'Alembert

2.2.7. Згин балки

Визначивши абсолютний опір бруса, Галілей досліджує опір руйнуванню того ж бруса в тому випадку, коли він використовується як консоль і навантажений на вільному кінці (рис. 2.5, *а*). Він стверджує: «*Ясно, що якщо призматичний брус* *піддасться зламу, цей злам відбудеться в точці B, причому ребро гнізда грає роль осі обертання для важеля BC, до якого прикладена сила; товщина BA бруса являє собою інше плече, вздовж якого розподіляється опір. Цей опір перешкоджає відділенню частини BD, що лежить поза стіною, від частини, що лежить всередині її. Зі сказаного випливає, що величина сили, прикладеної в C, відноситься до величини опору, обумовленого товщиною призми, тобто зчепленням основи BA з прилягаючим до нього частинами бруса, точно так само, як половина довжини BA відноситься до довжини BC»*[12].

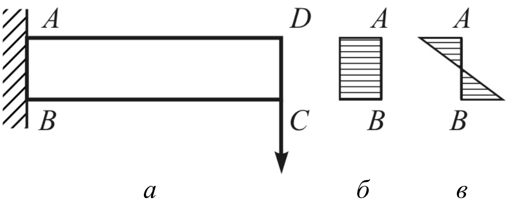


Рис. 2.5

Ми бачимо, що в разі зламу згідно з поданням Галілея «опір» розподіляється рівномірно по поперечному перерізу *BA* (рис. 2.5,*б*). Вважаючи, що поперечний переріз бруса прямокутник і що матеріал слідує закону Гука до настання зламу, ми отримуємо розподіл напружень по епюрі, яка показана на рис. 2.5,*в*.

Слід зазначити, що який би не був закон розподілу напружень при згині по перерізу $\sigma = f(y)$ і де б не була нейтральна лінія, момент опору прямокутного профілю буде $w = (bh^2)/m$, а круглого - $w = (\pi d^3)/n$, причому числа m і n будуть функціоналами від $f(y)$, які не залежать від розмірів перерізу. Цю теорему вперше довів А. Паран для прямокутного профілю у 1713 р.

У подальшому послідовно приймалось декілька законів розподілу напружень. Галілей прийняв $f(y) = C$, Е. Маріотт і Г. Лейбніц – закон $f(y) = Cy$, вважаючи початок системи координат на краю перерізу, А. Паран – той же закон, але з початком системи координат на середині висоти, і, нарешті, Л. Нав'є переніс початок системи координат (нейтральну лінію) у центр ваги перерізу. Згідно з цим коефіцієнти m і n для прямокутного і круглого перерізів мали значення:

	Галілей	Маріотт	Паран
m	2	3	6
n	8	12.8	32

Зазначимо, що наведені значення можна вважати правильними тільки, якщо балка знаходиться у пружному стані. Але за межами закону Гука функція $f(y)$ змінює свій вигляд, а Галілей вивчав саме граничний стан балки. Тому для задачі Галілея наші звичайні значення $m = 6$ і $n = 32$ не є достовірними. Відомо, що сучасна теорія пластичності дає у граничному стані $m = 4$ і $n = 18.84$. Які будуть дійсні значення цих коефіцієнтів для конкретного матеріалу слід визначати експериментальним шляхом [Бернштейн, 1957].

---

[12] «Discorsi e dimostrazioni...», Діалог другий.

Таким чином, постановка Галілеєм задачі про порівняльну міцність геометрично подібних балок була розв’язана ним правильно.

Дві нові галузі науки, створені Галілеєм у його безсмертній роботі, обумовили розвиток динаміки і науки про міцність і лишаються актуальними до цього часу.

На основі своєї теорії Галілей отримує ряд важливих висновків [Тимошенко, 1957]. Розглядаючи балку прямокутного поперечного перетину, він ставить питання: «*Чому і у скільки разів брус, або, краще, призма, ширина якої більше товщини, надасть більше опору зламу, коли сила прикладена в напрямку її ширини, ніж у тому випадку, коли вона діє в напрямку товщини?*». Виходячи зі свого припущення (рис. 2.5,*а*), він дає правильну відповідь: «*Будь-яка лінійка або призма, ширина якої більше товщини, надасть більший опір зламу, коли вона поставлена на ребро, ніж коли вона лежить плазом, і притому в стільки разів більше, у скільки ширина більше товщини*»[13].

Продовжуючи дослідження задачі про балку-консоль постійного поперечного перерізу, Галілей робить висновок, що згинальний момент ваги балки зростає пропорційно квадрату її довжини. Зберігаючи довжину кругових циліндрів, але змінюючи радіуси їх основ, Галілей знаходить, що їх момент опору пропорційний кубам радіусів. Цей результат випливає з того факту, що «абсолютний» опір пропорційний площі поперечного перерізу циліндра, а плече моменту опору дорівнює радіусу циліндра.

Порівнюючи геометрично подібні консолі, навантажені власною вагою, Галілей робить висновок, що геометрично подібні балки не рівноміцні.

Всі ці міркування приводять Галілея до наступного важливого зауваження загального характеру: «*Ви тепер ясно бачите неможливість як для мистецтва, так і для природи збільшувати розміри своїх творів до надмірно величезних; рівним чином неможливо і спорудження кораблів, палаців або храмів колосальних розмірів, якщо ми хочемо, щоб їх весла, реї, балки, скріпи, коротше, всі взагалі їх частини трималися б як одне ціле; сама природа не виробляє дерев надзвичайної величини, інакше гілки їх поламалися б від власної ваги; неможливо було б також створити і скелет людини, коня або якої-небудь іншої тварини, так щоб він опирався і виконував би свої нормальні функції, якби розміри цих живих істот були б непомірно збільшені у висоту; таке збільшення у висоту могло б виявитися здійсненним лише в тому випадку, якби для них був використаний більш твердий і міцний матеріал, або якби їхні кістки були збільшені також і в ширину, від чого по формі і по вигляду ці істоти стали б походити швидше на чудовиськ ... Якщо, навпаки, розміри тіла скоротити, то міцність його хоча й зменшиться, але не в тій же мірі; і дійсно, чим менше тіло, тим більше його відносна міцність. Так, наприклад, маленька собачка змогла б, ймовірно, понести на своїй спині пару або*

---

[13] Див.: «Беседы и математические доказательства...» [Галилей, 1934 (стор. 228)]. Наведена С.П. Тимошенко цитата не містить повної відповіді: у цій фразі лише посилання на емпіричний факт; теоретичне ж пояснення, засноване на співвідношенні моментів, міститься в продовженні відповіді. Див.: там же [Галилей, 1934 (стор. 229)].

навіть три таких, як вона, собачки, кінь же, треба думати, не в силах був би підняти і одного собі подібного» [Галилей, 1934, (стор. 247-248)].

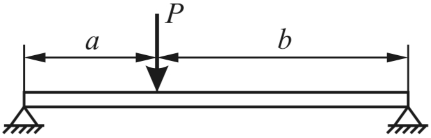


Рис. 2.6

Галілей досліджує також балку, що лежить на двох опорах (рис. 2.6), і знаходить, що згинальний момент набуває найбільшого значення в тій точці прольоту, де прикладене навантаження, величина ж його є пропорційною добутку *ab*, так що для здійснення зламу з найменшим навантаженням це навантаження слід помістити в середину прольоту. Він зазначає, що тут є можливість заощадити на матеріалі, зменшуючи поперечний переріз поблизу опор.

Галілей дає повний розв’язок задачі про консоль рівного опору, поперечний переріз якої - прямокутник. Розглядаючи спочатку призматичну консоль *ABCD* (рис. 2.7,*а*), він зауважує, що частина матеріалу можна з неї видалити, не завдаючи шкоди її міцності. Він показує також, що якщо ми видалимо половину матеріалу, надавши консолі форму клина *ABC*, то міцність в будь-якому проміжному поперечному перерізі *EF* виявиться недостатньою з тієї причини, що якщо відношення згинальних моментів в перетинах *EF* і *AC* дорівнює відношенню EC/AC, то моменти опору для цих перетинів, пропорційні квадратам товщини, будуть знаходитися у відношенні $(EC)^2/(AC)^2$. Для того щоб моменти опору знаходилися між собою в тому ж самому відношенні, що і згинальні моменти, ми повинні надати повздовжньому обрису консолі параболічну форму *BFC* (рис. 2.7,*б*). Це задовольняє вимогу рівної міцності, оскільки для параболи ми маємо:

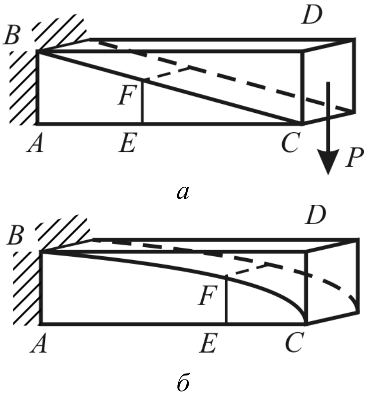


Рис. 2.7

$$\frac{(EF)^2}{(AB)^2} = \frac{EC}{AC}.$$

На закінчення Галілей досліджує міцність порожнистих балок, вказуючи, що такі балки «*знаходять найрізноманітніші застосування в техніці, а ще частіше в природі, в цілях можливо більшого збільшення міцності без зростання у вазі; прикладами тому можуть служити кістки птахів і різного виду очерети: і ті й інші відрізняються великою легкістю і в той же час добре опираються як згину, так і зламу. Так, якби пшеничне стебло, яким підтримується перевищуючий його за вагою колос, був би сформований з тієї ж кількості матеріалу суцільним стержнем, то він зміг би надати менший опір згину та зламу. Перевірений і підтверджений практикою досвід вказує, що порожнисті списи або труби, будь то з дерева або з металу, завжди виявляються значно міцнішими, ніж відповідні суцільні стержні тієї ж ваги при тій же довжині ...*». Порівнюючи порожнистий циліндр з суцільним тієї ж площі поперечного перерізу, Галілей зауважує, що їх абсолютні опори розриву однакові, а оскільки моменти опору рівні абсолютним опорам, помноженим на зовнішній радіус, то міцність при згині труби буде перевищувати відповідну міцність суцільного циліндра в стільки ж разів, у скільки разів діаметр труби більше діаметру суцільного циліндра.

Слід зазначити, що Е. Маріотт, залишаючись на позиціях Галілея про граничний стан стержня, показав спочатку, що у випадку, коли руйнування стержня при згині відбувається шляхом обернення навколо стиснутого ребра (за Галілеєм), то зусилля у загрозливому перерізі повинні змінюватись за лінійним законом, а не залишатись постійними. Таку ж трикутну епюру після Е. Маріотта отримали Г. Лейбніц (1684) і П. Варіньон (1702). Трохи пізніше Е. Маріотт виправив цю епюру і розмістив нульову точку на середині висоти, визнавши наявність стиску при згині і підійшовши впритул до істини. У сучасних підручниках відкриття стиску при згині часто приписується французькому ботаніку та морському інженеру Анрі-Луї Дюамелю дю Монсо (1767) [Александров, 2003, стор. 162].

Ґотфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716)
нім. Gottfried Wilhelm Leibniz

П'ер Варіньон
(1654-1722)
фр. Pierre Varignon

Анрі-Луї Дюамель дю Монсо
(1700–1782)
фр. Henri-Luis Duhamel du Monceau

При цьому відбувся прикрий випадок. Виконуючи обчислення опору стержня прямокутного перерізу згину за двозначною епюрою напружень із умови рівності моментів зовнішніх і внутрішніх сил, Е. Маріотт припустився алгебраїчної помилки і ввів у розрахунок зайву двійку. В результаті він дійшов висновку, що міцність балки буде однакова при прийнятті трикутної епюри і двозначної епюри напружень з нулем посередині висоти. В обох випадках він отримав значення моментів опору прямокутного перерізу $(bh^2)/3$ замість $(bh^2)/6$ для двозначної епюри.

Дивно, але факт – та ж сама помилка трапилась в розрахунках іншого відомого ученого через 25 років після Е. Маріотта, що відтермінувало на сторіччя (!) правильний розв'язок задачі. У 1705 р. Якоб Бернуллі повернувся до задачі згину вже після того, як він встановив закон про пропорційність згинального моменту кривізні балки. Як і Е. Маріотт, Я. Бернуллі співставив трикутну і двозначну епюри напружень і також помилився в два рази у тому ж самому місці при оцінці міцності за двозначною епюрою. На цій підставі Бернуллі навіть сформулював дивну теорему про те, що положення нульової точки у лінійній епюрі напружень взагалі ніяким чином не впливає на опір згину і тому не варто уточнювати положення цієї точки. Саме ця невірна теорема, підкріплена авторитетом імені Якоба Бернуллі, загальмувала учення про згин на ціле сторіччя.

Перший правильний розв'язок задачі про міцність балки при згині дав французький військовий інженер А. Паран [Parent, 1713] у 1713 р. Він вперше показав, що між розтягуючими і стискаючими зусиллями при згині повинна бути рівновага, звідки витікає, що при симетричному перерізі балки нульова точка епюри знаходиться на середині висоти. До речі, Парану належить перший розв'язок відомої задачі про те, як вирізати з круглого поліна прямокутний брус найбільшої міцності при згині.

Антуан Паран – французький математик і механік, учень Ф. Лагіра. Займався також анатомією, ботанікою, хімією тощо. Роботи присвячені аналітичній геометрії, сферичній тригонометрії. Розробляв теорію згину балок, виправив деякі результати Е. Маріотта.

Вірний розв'язок А. Парана, який для прямокутного перерізу отримав вираз моменту опору $(bh^2)/6$, повторив у 1723 р. петербурзький академік Г. Більфінгер. Його робота [Bilfinger, 1735], опублікована (латиною) у «Відомостях академії наук» у 1735 р., стала першою роботою з будівельної механіки, виданою в Росії.

Через 60 років після А. Парана його висновки повторив Ш.О. Кулон. Важливо, що Ш.О. Кулон поставив положення нейтральної лінії у відповідність до закону Гука. Він, зокрема, вказав, що у випадку, коли закон Гука перестає діяти раніше, до руйнування, нейтральна лінія при руйнуванні займе інше положення. Це твердження Ш.О. Кулона стало першим, що вказувало на суттєву розбіжність між робочим і граничним станами.

Таким чином, Ш.О. Кулон у 1773 р. повністю підтвердив вірність роботи А. Парана 1713 р. У знаменитому мемуарі (1773) Ш.О. Кулон переглянув і уточнив міркування А. Парана. Він розглянув випадок довільної зміни сил, як нормальних, так і дотичних, діючих на поперечний переріз балки, що знаходиться під поперечним навантаженням, прикладеним на її кінці. Як і у А. Парана, ці сили можна розглядати як внутрішні напруження в плоскому випадку. Ш.О. Кулон дійсно виписав, в проінтегрованому вигляді, всі рівняння рівноваги для поперечного перерізу. Таким чином, він прийшов до висновку, що площа, обмежена кривою тисків, має дорівнювати площі, обмеженій кривою натягів, і розрахував результуючі напруження зсуву в залежності від навантаження. Після А. Парана Ш.О. Кулон вперше розглянув напруження, що діють на різні площини, що проходять через точку; він обчислив напруження зсуву на площадці, довільно нахиленій до напрямку прикладеної сили для балки, яка за припущенням знаходиться у стані чистого стиснення. Він показав також, що зсув є найбільшим на площадці, нахиленій під кутом в 45°. Але, як зазначив Б. Сен-Венан, робота Ш.О. Кулона містила так багато ідей у малому об'ємі, що увага інженерів і учених протягом наступного півстоліття не змогла зупинитися на жодній з них.

Через 25 років після роботи Ш.О. Кулона у 1798 р. побачив світ «Курс опору матеріалів» П. Жирара [Girard, 1798]. П. Жирар посилається на Ш.О. Кулона при розв'язанні задачі згину, але, не зважаючи на це, розміщує нульову точку епюри на краю перерізу і повторює помилкове твердження Якоба Бернуллі про те, що положення нульової точки може бути довільним. Дивно, але ця книга отримала позитивний відгук самого Ш.О. Кулона. Тобто П. Жирар у своїй роботі повернув задачу згину до того рівня, на якому вона перебувала до 1713 р. (регрес на 85 років).

Пройшли ще 15 років, і Л. Нав'є в одній із своїх перших робіт (1813) все ще дотримується теореми Бернуллі (тобто через 100 років після того, як А. Паран довів її помилковість). Це можна пояснити тільки досить поверхневим умоглядним ставленням до задачі згину і відповідною відсутністю експериментів і їх теоретичного обґрунтування.

У 1820 р. А. Дюло виступив із твердженням про те, що положення нульової точки в епюрі напружень визначається із умови рівності моментів розтягуючих і стискаючих напружень, а не рівності самих зусиль. Якщо вважати, що $\sigma = ky$, то ця умова Дюло буде мати вигляд

$$\int_p \sigma y dF = \int_c \sigma y dF ,$$

де індекси p і c під знаками інтегралів вказують, що інтегрування відбувається у розтягнутій і стискаючій зонах перерізу балки, або

$$\int_p y^2 dF = \int_c y^2 dF .$$

Тобто, моменти інерції цих двох зон перерізу рівні між собою. Очевидно, це вірно тільки для симетричного профілю балки.

Такого ж результату дійшов Т. Тредгольд [Tredgold, 1821], який, до речі запропонував термін «нейтральна лінія», даючи йому таку трактовку: «*нейтральна лінія розподіляє переріз на такі дві частини, що якщо кожну з них симетрично відобразити на іншу сторону нейтральної лінії, то обидва симетричних профілі будуть мати однаковий опір*». Тобто, це правило по суті еквівалентне висновку А. Дюло. Але справа полягає у тому, що жорсткості обох профілів, побудованих таким чином, будуть однакові, а міцність – різна. Мабуть, ідея Дюло-Тредгольда була останньою помилкою в історії задачі згину балки. У 1826 р. Л. Нав'є дав, врешті решт, правильний розв'язок задачі, хоча перед тим і він не утримався від нетривалого захоплення теорією Дюло.

Наступний крок після Л. Нав'є в цій галузі зробив Н. Персі [Persy, 1834], який ввів поняття моменту інерції перерізу, розробив теорію моментів інерції і вказав на те, що теорія згину Нав'є вірна лише при співпадінні нейтральної лінії з головною віссю перерізу. Ще через 9 років Б. Сен-Венан розв'язав задачу косого згину (1843), ввівши два рівняння моментів відносно обох головних осей. Він же дав рішення для задачі про згин з розтягом, вперше використавши для цього принцип накладення малих деформацій.

Вражає те, що знадобилося 20 років з часу появи перших рівнянь теорії пружності, перш ніж їх лінійність навела на думку про можливість такого накладення. Ще більш вражає те, що думка про можливість накладення навантажень виникла ще пізніше, до кінця 1840-х років, коли її одночасно використовували Д.І. Журавський і Ж. Бресс. Нагадаємо, що лінійність рівнянь теорії пружності стала наслідком прийняття умови малих деформацій і необмеженої справедливості закону Гука, тобто тих самих допущень, які склали сутність перевороту в будівельній механіці, - переходу від принципу граничного стану до розрахунку по початковому робочому стану. Додатковий виграш, отриманий при цьому переході, полягав саме в лінійності всіх рівнянь, і це якраз не було усвідомлено і використано протягом двох десятиліть.

Пьер Симон Жирар
(1765 – 1836)
фр. Pierre Simon Girard

Томас Тредгольд
(1788 – 1829)
англ. Thomas Tredgold

Жак Антуан Шарль Бресс *(1822–1883)*
фр. Jacques Antoine Charles Bresse

Задачу про позацентровий розтяг або стиск розв’язав в загальному вигляді Ж. Бресс [Bresse, 1854], що ввів поняття ядра перерізу і вивчив його властивості.

2.2.8. Визначення напружень зсуву. Кулон

Знаний мемуар Ш.О. Кулона [Coulomb, 1773] містить правильні розв’язки цілої низки проблем механіки матеріалів, але інженерам знадобилось більш ніж 40 років, щоб достатньо повно осягнути їх і використати на практиці.

Шарль Огюстен Кулон (1736-1806) народився в Ангулемі (Франція). Після попередньої підготовки в Парижі він вступив до військово-інженерного корпусу. Будучи відрядженим на острів Мартініку, він протягом дев’яти років брав там участь у різного роду будівельних роботах, що спонукало його до вивчення механічних властивостей матеріалів та інших проблем будівельної техніки. За час перебування на острові ним була написана відома робота «Sur line application des regies de maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs a 1'architecture» («Про застосування правил максимуму і мінімуму до деяких питань статики, що мають відношення до архітектури»), представлена в 1773 р. до Французької академії наук. У передмові до цієї роботи Ш.О. Кулон повідомляє: «*Цей мемуар, написаний мною кілька років тому, призначався в першу чергу для особистого користування в* *роботі, яку мені доводиться виконувати у відповідності зі своєю професією. Якщо я наважуюсь тепер представити його Академії, то тільки тому, що ця остання вітає навіть і найскромніші старання, якщо вони спрямовані на корисні цілі. Крім того, наука - це монумент, що споруджується заради блага суспільства. Кожен громадянин повинен внести в нього що-небудь відповідно до своїх талантів. У той час як великі люди піднімаються до вершини будівлі, де вони отримують можливість розмічати й будувати верхні поверхи, іншим працівникам, розсіяним по нижніх поверхах або ж прихованим у тьмі підвалів, потрібно прагнути остаточно обробити те, що вже створено раніше умілими руками».*

Після 1781 р. Ш.О. Кулон постійно жив у Парижі, де був обраний членом Академії і де йому представилися більш широкі можливості для наукової роботи. Він переключив свою увагу на нові для того часу галузі досліджень - електрику і магнетизм. Він винайшов для вимірювання малих електричних і магнітних сил вельми чутливі крутильні ваги, а у зв'язку з цим досліджував міцність дроту на кручення.

Шарль-Огюстен Кулон
(1736–1806)
фр. Charles-Augustin de Coulomb

На початку Французької революції 1789 р. Ш.О. Кулон поїхав у свою маленьку садибу в Блуа. У 1793 р. Академія була закрита, але два роки потому вона знову приступила до роботи, будучи перейменована в Institut national des Sciences et de Arts (Національний інститут наук і мистецтв). Ш.О. Кулон одним з перших був обраний до цього нового вченого закладу і його останні роботи, присвячені питанням в'язкості рідин та магнетизму, були надруковані в «Memoires de l'lnstitut» (1801, 1806). Він був призначений в 1802 р. на посаду одного з генеральних інспекторів з наукової частини і віддав багато сил на поліпшення постановки народної освіти. Ця діяльність була пов'язана з частими роз'їздами, занадто для нього стомлюючими при його віці і слабкому здоров'ї, і в 1806 р. він помер. Але праці його зберегли своє значення, і ми досі ще користуємося його теоріями тертя, міцності будівельних матеріалів і крутіння.

Ніхто інший з учених XVIII ст. не дав так багато механіці пружного тіла, як Ш.О. Кулон [Тимошенко, 1957]. Найцінніші його досягнення в цій галузі увійшли в його роботу, видану в 1773 р., на початку якої повідомляється про виконані Кулоном випробування з визначення міцності одного з різновидів пісковика.

У своїй теорії згину Ш.О. Кулон правильно застосовував рівняння статики при дослідженні внутрішніх сил і мав ясне уявлення про розподіл цих сил по поперечному перерізі балки. Наукові роботи А. Парана залишилися, мабуть, йому невідомі, оскільки у своїй роботі він посилається лише на Боссю, що рекомендує у своєму творі «La construction la plus avantagense des digues» («Найвигідніше зведення гребель») розраховувати дерев'яні балки як, пружні, кам'яні ж - як абсолютно жорсткі.

Своїм наступним завданням Кулон ставить дослідження стиснення призми осьовою силою *P*. Ш.О. Кулоном в 1733 р. вперше був висловлений критерій пластичності, відомий в курсах опору матеріалів як критерій найбільшого дотичного напруження. Він вважав, що руйнування стиснутої призми виникає в результаті ковзання однієї частини по іншій по деякій площині, розташованої під кутом 45° до стискаючої сили. Однак Кулон безпідставно вважав, що дотичне напруження в цій площині (максимальне) при ковзанні дорівнює граничному напруженню при розтягу, а не половині його. Таким чином, хоча Кулон і прийняв за критерій величину максимального дотичного напруження, проте використовував його швидше як критерій руйнування.

У 1784 р. Кулон видав свій мемуар про кручення. Кулону належить безперечно прогресивна роль в історії будівельної механіки. Він винайшов чудовий метод розрахунку підпірних стінок, має роботи з розрахунку склепінь.

Ми вже відзначили, що Кулон дав правильний розв'язок задачі про міцність балки. Крім цього, йому належать ще три важливих відкриття. По-перше, він відкрив існування дотичних напружень. Ймовірно це відкриття було зроблено у зв'язку з його відомими дослідженнями в галузі тертя. Кулон показав, що руйнування стиснутих стержнів дуже часто відбувається шляхом зсуву і висловив припущення, що саме зсуви є причиною всякого руйнування. Це припущення ми називаємо тепер третьою теорією міцності і дуже широко застосовуємо в розрахунковій практиці.

Цікаво, що Кулон надав задачі про дотичні напруження в стисненому стержні форму задачі на мінімум, як і всім іншим проблемам будівельної механіки, розглянутим в його роботі, що мала характерний заголовок: «Застосування правил знаходження максимумів і мінімумів до деяких задач статики, що належать до архітектури». Ось справжній текст цієї задачі: «*Щоб визначити найбільшу вагу, яку може витримати устій, знайти такий переріз, у якому сили зчеплення здатні врівноважити найменшу вагу*». Ця мінімальна вага для небезпечного перетину буде максимально безпечною вагою навантаження для устою в цілому. Той же своєрідний підхід - визначення максимального (граничного) навантаження як мінімуму деякої функції - Ш.О. Кулон застосував і до розрахунку підпірних стінок і склепінь. Це був послідовно проведений шлях розрахунку за граничним станом.

По-друге, Кулон дав перший розв'язок задачі про кручення (1784). Він вивчив кручення тонких дротів круглого перерізу і вивів для них правильні розрахункові формули, якими ми постійно користуємося, не думаючи про їх автора. Кулон встановив, що крутний момент пропорційний куту закручування і четвертому ступеню діаметра. Ми сказали б зараз, що кут закручування пропорційний крутильному моменту. Але для Кулона розрахунковим станом був кінцевий стан стержня, що вже отримав деформацію. З цієї деформації Кулон визначав крутний момент, що її викликав. Абсолютно так само підходили попередники Кулона до задачі про деформації балки: по заданій деформації вони визначали навантаження, що викликало її. Підхід, характерний для всього XVIII ст.

Кулоном була вперше експериментально встановлена формула для кута закручування круглого стержня. У мемуарах, представлених в Паризьку академію наук у 1784 р. [Coulomb, 1784], Кулон навів результати експериментального дослідження крутильних коливань круглого стержня, отримав диференціальне рівняння вільних крутильних коливань і вивів формулу для періоду коливань. Досліджуючи крутильні коливання експериментально на спеціальному приладі, Кулон встановив, що при малих кутах закручування період не залежить від кута закручування. На цій підставі Кулон зробив правильний висновок про те, що кут закручування пропорційний крутному моменту.

Випробовуючи на кручення круглі дроти різної довжини і різного діаметру, Кулон експериментально отримав формулу для кута закручування круглого стержня довжиною l:

$$\varphi = \frac{kMl}{d^4},$$

де M - крутний момент, k - постійна для матеріалу. В даний час ми знаємо, що

$$\varphi = \frac{M_{кр}l}{GI_p},$$

де G - модуль пружності при зсуві. Таким чином, Кулон ввів поняття модуля пружності при зсуві і експериментально визначив його для заліза і латуні.

По-третє, Кулон з дослідів на згин і кручення вивів закон про пропорційність між навантаженням і пружною частиною деформації аж до руйнування - закон, який неправильно називають законом Герстнера.

Чудові відкриття Кулона були останніми важливими дослідженнями в галузі будівельної механіки в XVIII ст.

2.2.9. Урахування зсувів при згині балки. Д.І.Журавський

Про наявність зсувів при згині балки першу вказівку дав, мабуть, Ж. Дюгамель в 1767 р., відмітивши, що тільки зсувами можна пояснити відмінність міцності і жорсткості у суцільній балці і у балці, що складена з окремих шарів. Пізніше Ш.О. Кулон вказав, що даний ним розрахунок на згин вірний тільки в тих випадках, коли плече сили набагато більше висоти перетину (або по сучасній термінології, якщо вплив поперечної сили на міцність невеликий). Поняття зрізу при згині зустрічається згодом у Т. Юнга, що порівнював це явище з дією ножиць. Термін поперечної сили ввів Л. Віка, що вивчав дослідним шляхом зсув при згині [Vicat, 1833]. Таким чином, явище зсуву при поперечному згині було вже давно відоме, коли Д.І. Журавський вперше спробував підійти до нього розрахунковим шляхом і дав свій відомий розв’язок [Журавский, 1855].

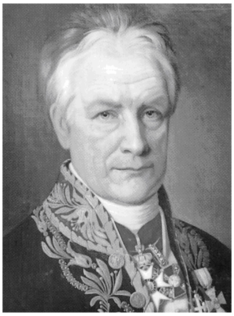
Задача про дотичні напруження при згині була для Д.І. Журавського побічною задачею, що виникла при розв’язанні більш загального питання про розрахунок мостових дерев’яних ферм.

Зазначимо, що будівельна механіка в Росії в ті часи розвивалась досить впевнено. У 1810 р. в Росії відкрився перший вищий технічний учбовий заклад — Інститут інженерів шляхів сполучення в Петербурзі, що став колискою російської технічної науки. Через відсутність вітчизняних кадрів створення його було довірене представникам самої передової для того часу наукової школи - французької. Вибір був зроблений правильно, оскільки ні німецька, ні англійська школи у той час не могли змагатися з французькою. До Росії були запрошені ряд видатних французьких інженерів - Бетанкур, Базен і інші, серед яких ми зустрічаємо в 20-х роках імена таких видатних учених, як Ґ. Ламе і Б. Клапейрон.

Таким чином, для розв’язання задачі про згин балки знадобилося майже два сторіччя, точніше 188 років, якщо рахувати від дати публікації «Бесід» Галілея, де була зроблена перша спроба розрахунку балки на міцність. Це характерний приклад того тернистого шляху, яким йшла наука у XVIII ст. До речі, на протязі всього цього сторіччя поняття моменту інерції і моменту опору перерізу були ще не розділені.

Дмитро Іванович Журавський *(1821 –1891)*
рос. Дмитрий Иванович Журавський

Вільям Джон Ренкін
(1820 –1872)
англ. William John Macquorn Rankine



Луї Жозеф Віка
(1786-1861)
фр. Louis-Joseph Vicat

У 1848 р. Д.І. Журавський розробив наближений метод розрахунку балок (опублікований в 1855-1856 рр.).

Д.І. Журавський був інженером-практиком, будівельником мостів, і у своїй науковій діяльності він залишався таким же переконаним практиком. У його працях не слід шукати теоретичних узагальнень, які зможуть стати в нагоді коли-небудь згодом. Він виходив з потреб будівництва і намагався задовольнити їх з дивовижною сміливістю, не бентежачись жодними труднощами. Його наукова інтуїція і винахідливість були вражаючі, і саме ці властивості дозволили йому розв’язати задачу про зсув при згині. Для оцінки його заслуги в цій області треба згадати, що для більш простої задачі про нормальні напруження при згині знадобилось 200 років праці найбільших вчених, від Галілея до Л. Нав'є, перш ніж вдалося отримати вірне рішення. Д.І. Журавський поставив і розв'язав задачу про зсув абсолютно самостійно, не маючи навіть натяку на метод розв'язку в працях своїх попередників. Д.І. Журавський розглянув одну частинну задачу: консоль прямокутного профілю з вантажем на кінці (рис. 2.8). Якщо відокремити консоль від защемлення і прикласти замість опорного моменту розподілені по двозначній епюрі нормальні зусилля в опорному перерізі, то стане ясно, що ці нормальні зусилля, спрямовані в різні боки, викликають зріз вздовж нейтрального шару. Величина зсувного зусилля Q визначається з рівняння рівноваги

$$Q = \int_0^{h/2} \sigma dF = \frac{M}{J} \int_0^{h/2} y dF = \frac{MS}{J}.$$

На перший погляд це рішення може здатися дивним і навіть неправильним, оскільки зсувна сила виявляється пропорційною згинальному моменту. Але цей сумнів пояснюється просто; на вільному кінці консолі момент дорівнює нулю, а якби він був відмінний від нуля, то за методом Д.І. Журавського зсувна сила вийшла б пропорційною різниці моментів, або, точніше, - похідною від моменту. Як відомо, цей останній висновок часто називається теоремою Д.І. Журавського, хоча прямого доказу її він не дав.

З формули можна отримати зсувне зусилля і вираз для дотичних напружень в нейтральному шарі, але для цього треба покласти, що напруження рівномірно розподілені по ширині консолі b і її довжині l

$$\max \tau = \frac{Q}{bl} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{F}.$$

Д.І. Журавський дав і більш загальний розв'язок для дотичних напружень в довільному шарі, які призводять після ділення на b і l до відомої формули:

$$\max \tau = \frac{6P}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{PS}{Jb}.$$

Однак, треба зауважити, що прийом розв'язку, заснований на допущенні про рівномірний розподіл дотичних напружень по довжині балки, справедливий тільки для ділянки балки, що не несе місцевого навантаження. Д.І. Журавський розглянув саме цей випадок, але не обумовив це.

У зарубіжній літературі формула для дотичних напружень, виведена Д.І. Журавським, зустрічається вперше у В. Ренкіна [Rankine, 1862][14] в 1862 р. (розв'язок Д.І. Журавського був опублікований у 1855 р.). Відомо, що формула Д.І. Журавського є наближеною, оскільки вимагає прийняття гіпотези про рівномірний розподіл дотичних напружень по ширині прямокутного профілю. Точний розв'язок, отриманий згодом Сен-Венаном методами теорії пружності, показав високу ступінь наближення формули Д.І. Журавського для прямокутних профілів, у яких висота дорівнює або більше ширини, тобто для всіх практично важливих випадків. Тепер ми сміливо застосовуємо формулу Д.І. Журавського і для більш складних форм профілів - двотаврових, швелерних тощо, оскільки цей розв'язок виявився значною мірою більш загальним, ніж припускав сам Д.І. Журавський. І особливо важливо підкреслити, що розв'язок Д.І. Журавського залишився єдиним практичним методом обчислення дотичних напружень при згині.

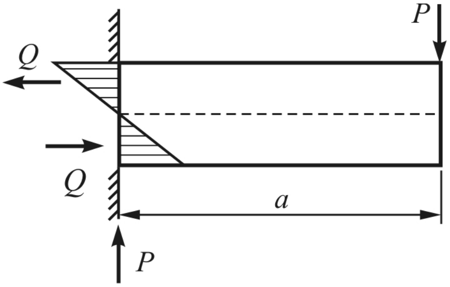


Рис. 2.8. Схема Д.І. Журавського для обчислення дотичних напружень при згині

В результаті роботи Д.І. Журавського, який вирішив питання про дотичні напруження при згині, і діяльності французької школи, що дала розв'язок для нормальних напружень при будь-якій формі профілю, проблема згину прямолінійного стержня до середини 1850-х років виявилася вирішеною досить повно.

Література

Александров А.В. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.

Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых тел. Ч. I. Малые деформации – 596с. Ч. II. – Конечные деформации. – 431 с. – М.: Наука, 1984.

Бернулли Д. Гидродинамика. Ленинград: Изд-во АН СССР, 1950.

Бернулли И. Избранные сочинения по механике. – М.-Л., 1937.

Бернштейн С.А. Очерки по истории строительной механики. – М.: Госстройиздат, 1957. – 236 с.

Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. - М.: Физматгиз, 1959. - 568 с.

Галилео Галилей. Сочинения, т. I, «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Русский

---

[14] Існує переклад російською: [Рэнкин, 1870].

перевод С.Н. Долгова. Серия «Классики естествознания». - М.-Л.: Гос. тех.-теор. изд., 1934. – 695 с.

Декарт Р. Геометрия. З додатком вибраних робіт П. Ферма і листування Декарта. − М.−Л.: ГОНТИ, 1938.

Декарт Р. Сочинения в двух томах. - М.: Рипол Классик, 1989

Джанелидзе Г.Ю. Принцип Сен-Венана (К столетию принципа). // Труды Ленинградского политехнического института им М. И. Калинина. – 1958. – № 192. – С. 7 – 20.

Журавский Д.И. О мостах раскосной системы Гау. - Спб., 1855.

Колосов Г.В. О поверхностях, демонстрирующих распределение срезывающих усилий в точке сплошного деформируемого тела // Прикладная математика и механика. – 1933. – Т. 1. – Вып. 1.

Кочин Н. Е. Sur la theorie des ondes de choc dans un fluide. Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 50, 1926

Кудрявцев П.С. История физики. Т. 1. От античной физики до Менделеева: Гос. учебно-педагог. изд-во, 1948.

Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935

Рэнкин У.Д.М. Руководство для инженеров-строителей. – СПб.: 1870.

Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. - М.: Физматгиз, 1961. – 518 с.

Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. - М.: Гостеориздат, 1957. - 536 с.

Трусделл К. Этапы развития понятия напряжения. В кн.: Проблемы механики сплошной среды. (К 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили). – М.: АН СССР, 1961. – С. 439-447.

Трусделл К. Очерки по истории механики. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 316 стр.

Храмов Ю.А. Мариотт Эдм (Mariotte Edme) // Физики: Биографический справочник / Под ред. А. И. Ахиезера. - Изд. 2-е, испр. и дополн. - М.: Наука, 1983. - 400 с.

Эйлер Л. Диссертация о принципе наименьшего действия, с разбором возражений славнейшего проф. Кёнига, выдвинутых против этого принципа // Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 96 – 108.

Эйлер Л. Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. Санкт-Петербург: Наука, 2002.

Bernoulli D. De vibrationibus et sono laminarum elasticarum commentationes physico-geometricae // Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. T.13 ad annum 1741 — 43. — Petropoli. — 1751. — P. 105-120.

Bernoulli J. Veritable hypothese de la resistance des solides avec la demonstration de la courbure des corps qui font ressort // Histoire de L'Acadamie des sciences de Paris, 1705. — P. 176 — 186.

Bernoulli J. Curvatura laminai elasticae // Acta Eruditorum. Lipsiae: 1694. June. — P. 262 — 276.

Bernoulli J. Opera omnia tam antea sparsim edita quam hactenus inedita : tomus primus, quo continentur ea quae ab anno 1690 ad annum 1713 prodierunt. - Lutetiae Parisiorum: apud Carolum Jombert ..., 1742. – 563 p.

Bilfinger G.B. De solidorum resistentia specimen, Comment, Acad. Soient. Petropol. ad annum 1729, т. IV, p. 164. – 181, Спб., 1735

Boscovich R.I. Theoria Philosophiae Naturalls redacta ad unicam legem virium in natura existentium, Venice 1763.

Boussinesq J. Application des potentiels a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques, principalement au calcul des deformations et des pression que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exerces sur une petite partie de leur surface ou de leur interieur. Memoires suivis de notes etendues sur divers points de physique mathematique et d'analyse. – Paris: Gautier – Villars, 1885 – 722 p.

Bresse J.A.C. Recherches analytiques sur la flexion et la resistance des pieces courbes. - Paris, 1854.

Burkhardt H. Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 10, 2, Heft 3, 1903.

Cauchy A.-L. Recherches sur l'equilibre et le mouvement interieur des corps solides ou fluides, elastiques ou non elastiques // Bulletin de sciences par la Societe Philomatique. – 1823. – P. 9 – 13.

Cauchy A.-L. De la pression ou tension dans un corps solide. Exercices de Mathématiques. 2 (1827a), pp. 42–56

Cauchy A.-L. Sur la condensation et la dilatation des corps solide. Exercices de Mathématiques. 2 (1827b), pp. 60–69

Cauchy A.-L. Sur les equations qui expriment les conditions d'equllibre ou les lois de mouvement interieur d'un corps solide. Exercices de Mathématiques. 3 (1828a) 160-187

Cauchy A.-L. De la pression ou tension dans un système de points matèriels. Exercices de mathematique. 3 (1828b) pp. 213-236

Cauchy A.-L. Sur les pressions ou tensions supportees en un point donn ´ e d'un corps solide par trois plans perpendiculaires entre eux. Exercices de Mathématiques. 4, (1829a), pp. 30–40

Cauchy A.-L. Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues, Exercices de Mathématiques. 4, (1829b), pp. 293-319.

Clebsch A. Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862

Coulomb C.A. Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. - Mémoires de mathématique et physique presenté à l'Acádemie des sciences par savantes étrangères, Paris, 1773.

Coulomb C.A. Le statique des voùtes. – Paris, 1776

Coulomb C.A. Recherches theoriques et experimentales sur la force de torsion, et sur l'elasticite des fils de metal: Application de cette theorie a l'emploi des metaux dans les Arts et dans differentes experiences de Physique: Construction de differentes balances de torsion, pour mesurer les plus petits degres de force. Observations sur la loi de 1'elasticite et de la coherence // Historire de 1'Academie Royale des Sciences annee 1784. – Paris: 1787. – P. 229 – 269.

Culmann K. Die graphische statik. 1866.

D'Alembert. Traité de dynamique, dans lequel les lois de l'equilibre & du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible. - Paris: David L'aîné, 1743.

Delambre J.B.J. Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange - Œuvres de Lagrange, V.1, Paris, 1867, p. XVI.

Duhem P. Les Origines de la statique, Paris, 1905.

Duleau A. Essai theorique et experimental sur la resistance du fer forge, Paris, 1820.

Euler L. Scientia Navalis seu Tractatus de Construendis ac Dirigendis Navibus.St. Petersburg: Typis Academiae Scientiarum, 1749.

Euler L. Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides. Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres, Berlin, 1757. 11 (1755a), pp. 217–273.

Euler L. Principes généraux du mouvement des fluides. Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres, Berlin, 1757. 11 (1755b), pp. 274–315.

Fahie J.J. Galileo, his life and work. - New York, 1903.

Fresnel A. (1819). "Memoir on the Diffraction of Light". The Wave Theory of Light – Memoirs by Huygens, Young and Fresnel. American Book Company. pp. 79–145.

Fresnel A. (1819). "On the Action of Rays of Polarized Light upon Each Other". The Wave Theory of Light – Memoirs by Huygens, Young and Fresnel. American Book Company. pp. 145–56.

Galileo Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. In Leida, MDCXXXVIII.

Girard P.S. Traite analytique de la resistance des solides et des solides d'egale resistance, Paris, an VI, 1798.

Green G. On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the common Surface of two non-crystallized Media. In: Transactions of the Cambridge Philosophical Society (1838 –1842), vol. 7, 1839. pp. 1–24.

Hermann J. Phronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo, Amsterdam, 1716

Hooke R. Lectures. De potentia restitutiva, or of spring, Explaining, the power of springing bodies // Early Science in Oxford. V. VIII. – Oxford: R. T. Gunther. – 1931. – P. 331 – 356.

Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. Journ. f. Math. (Crelle), 40, 1850

Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Scheibe. Journ. f. Math. (Crelle), 56, 1859a

Kirchhoff G. (1859b) Ann. Phys. Chem. (Poggendorf), Bd. 108, 1859b

Kurrer K.-E. The History of the Theory of Structures. – Berlin: Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2008. – 848 p.

Lamé G., Clapeyron B.P.E. Memoire sur l'equilibre interieur des corps solides homogenes. Memoires presentes par divers savants. (1833). V. 4. pp. 465 – 562.

Lamé G. Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. - Mallet-Bachelier, 1859.

Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris, 1852

Laplace P.S. Traité de Mécanique Céleste, Supplement au Xe Livre, Paris, 1806

Leibniz G.W. Demonstrationes novae de Resistentis solidorum // Acte Eruditorum Lipsiae 1684. — P. 319 — 325.

Leonardo da Vinci. Codices Madrid (Codex Madrid I), ed. L. Reti, German facs. ed. Frankfurt a.M.: S. Fischer-Verlag, 1974.

Mariotte E. Traite du mouvement des eaux et des autres corps fluides. — Paris: — 1686.

Mariotte E. Œuvres de Mr. Mariotte. - Leyden, 1717.

Maxwell J.C. On Action at a Distance. The Scientific Papers. 23 (1890) pp. 311–323

Maxwell J.C. Electricity and Magnetism, 2nd ed. 1. Ch. 5 (1881)

Mohr O.C. Üeber die Darstellung des Spennungzustandes und des Deformationzustandes eines Koerperselementes. Civil ingenieur. 1882. p. 113.

Mohr O. Über die Elasticität der Deformationsarbeit. Zivilingenieur, vol. 32, 1886. - pp. 395–400.

Navier C.L.M.H. Memoire sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps solides elastiques. Bulletin des Sciences par la Societe Philomatique. (1823) 177–183.

Navier C.L.M.H. Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. Mém. Acad. Sci. **7**, 375–394 (1827)

Navier C.L.M.H. Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique a l'Etablissement des Constructions et des Machines. 1er partie: Leçons sur la résistance des materiaux et sur l'établissement des constructions en terre, en mазоnnerie et en charpente. - Paris: Firmin Didot pere et fils, 1826. - 288 p. 1-е изд. 1826, 2-е изд. 1833, 3-е изд. 1864.

Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687.

Newton I. Optiks, 2 nd. edition, London 1717, 31-е питання [Російське вид. М. – Л. 1927, стор. 292 і наст.]

Parent A. De la veritable mecanique de resistance relative des solides, Essais et reherches des raathematiques et des physiques. 111 c vol., XIV-e memoire, Paris, 1713.

Persy N. Cours de stabilite des constructions a l'usage des eleves de l'Ecole d'application de 1'artillerie et du genie. – Metz, 1834.

Poisson S.D. Mémoire sur les surfaces élastiques. Mémoires de l'Institut , Vol. 9, pp. 167–226, Paris, 1814

Poisson S.D. Memoire sur 1'equilibre et du mouvement des corps elastiques // Memoires de 1'Academie des sciences de Paris. – 1829. – V. 8. – P. 357 – 570.

Rankine W.J.M. A Manual of Civil Engineering. London, 1862

Riccati G. Delle vibrazioni sonore dei cilindri // Memorie ci Matematica e Fisika della Societa Italiane. – Verona: 1782. – T. 1. – P. 447-525.

Saint-Venant A.B. Memoires sur la resistance des solides suivis de deux notes la flexion des pieces a double cuorbure. – Paris: 1844.

Saint-Venant A.B. Mémoire sur la torsion des prismes. Mémoires des Savants éntrangers Acad. Sci. Paris 14 (1855)

Saint-Venant A.B. Mémoire sur la flexion des prismes. J. Math. Liouville 1 (1856)

Saint-Venant A.B. Mémoire sur la distribution des élasticités. J. Math. Liouville 8 (1863)

Stevin S. De Beghinselen der Weeghconst, 1586.

Stokes G.G. Mathematical and Physical Papers. Cambridge, 1880.

Stokes G G. Memoirs and scientific correspondence. Cambridge, 1907.

Taylor B. Methodus incrementorum directa et inversa. London: William Innys. 1715.

Thomson W., Tait P.G. Treatise of Natural Philosophy, 1867

Todhunter I., Pearson K. History of the Theory of Elasticity, vol. 1, Cambridge, 1886

Tredgo1d T. A practical essay on the strength of cast iron. 1821.

Truesdell C. Rational fluid mechanics, 1687-1765// L. Euler. Opera omnia, v. 11-12 (1954), p. vii-cxxv.

Truesdell C. The first three sections of Euler's treatise on fluid mechanics (1766). The theory of aerial sound, 1687-1788// L. Euler. Opera omnia, v. 11-13 (1956), p. vii-cxvii.

Truesdell C. The rational mechanics of elastic or flexible bodies, 1638-1788// L.Euler. Opera onmia, v. H-11:2 (1960). - 435 p.

Truesdell C.A. Die Entwicklung des Drallsatzes. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 44, No. 4/5, 1964/ - pp. 149–158.

Truesdell C. Six Lectures on Modern Natural Philosophy. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1966.

Truesdell C.A. Essays in the history of mechanics. – Berlin: Springer Verlag, 1968. - 384 p.

Varignon P. Projet d'une nouvelle mécanique, 1687.

Varignon. De la resistance des solides en general pour tout ce qu'on peut faire d'hypothesis touchant la force ou la tenacite des fibres des corps a rompre; et en particulier pour les hypotheses de Galilee et de M. Mariotte // Histoire de l'Academie Royale des Sciences Annee 1702. – Paris: 1704. — P. 66 — 94.

Varignon. Nouvelle mécanique, т. 2, - Paris, 1725.

Verdet E., Oeuvres completes d'Augustin Fresnel. 1, Paris,1866

Vicat L. Memoires et recherches experimentales sur les phenomenes physiques precedent et accompagnement la rapture ou l’affaissement d’une certaine classe de solides. Annales des ponts et chaussées, 2 semestre, 1833, p. 201-268.

Vicat L. Note sur l’allongment progressif du fil de fer coumis a diverses tensions. Annales des ponts et chaussées, 1 semestre, 1834, pp. 40—44.

Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Kristalle. -Abh. Ges. Wiss. Gottingen, 1887, 34, 100 pp.

Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig, 1910.

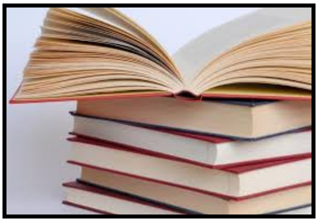
Wertheim G. Mémoire sur la vitesse du son dans les liquides. Annales de Chimie et de Physique, XXIII. pp. 434–475. Paris, 1848

Young T. "Chromatics" Encycl. Brit, Supplement, 1817

Young T. A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. – London. – 1807. – V. 2. – 738 p.

Нарис 3

ЕТАПИ РОЗВИТКУ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ РІВНОВАГИ



Поняття стійкості має фундаментальне значення. Як у природі, так і в активній людській діяльності більш-менш тривало можуть бути використані лише стійкі явища чи процеси.

В.В. Болотін

Перш ніж міняти підлогу, варто полагодити дах.

З афоризмів Інтернету

Проблемі стійкості рівноваги присвячені тисячі робіт, і їх історичний аналіз є вкрай складною задачею. Однак можна обмежити галузь дослідження, зупинившись, головним чином, на стержневих системах, які упродовж довгого часу були єдиним об’єктом дослідження у будівельній механіці. Таке рішення тим більш доречне у зв’язку з тим, що саме в процесі аналізу стійкості стержнів і стержневих систем були отримані майже всі значущі результати. Щодо неосяжної галузі стійкості пластин і оболонок, то ми її торкнемося лише в тій частині, де в якості інструменту дослідження використовуються скінченно-елементні методи.

3.1. Загальні принципи і теореми стійкості

Поняття «стійкість», починаючи з глибокої давнини і до 17-го століття, було пов'язане з проблемою відбору дійсних (спостережуваних) станів рівноваги. Мабуть, вперше така задача була поставлена в приписуваних Аристотелю «Механічних проблемах». При цьому розглядалося питання про те, чи повернеться виведене зі стану рівноваги тіло до первісної конфігурації після усунення збурення. Це питання було поставлено щодо Т-подібних терез, і Аристотель вказує, що в разі верхнього підвісу (рис. 3.1, *а*) таке повернення відбудеться (стійке положення), а в разі нижнього підвісу (рис. 3.1, *б*) – не відбудеться.

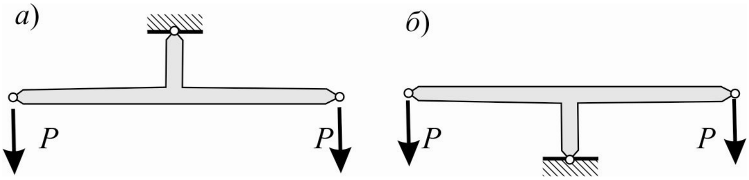
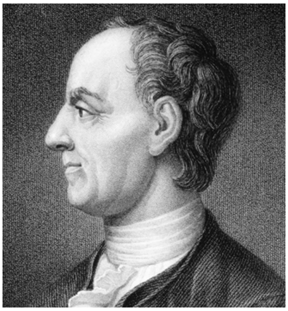


Рис. 3.1. Терези Аристотеля

Такою самою задачею займався і Архімед, який розглядав положення рівноваги важкого параболічного сегмента, що плавав в рідині різної щільності; як справжнього практика його цікавили лише стійкі положення рівноваги, і він перевіряв, чи може дане тіло, будучи виведеним з положення рівноваги, самостійно в нього повернутися.

Проблему розглядали Архімед, Герон Олександрійський і інші мислителі античності, нею цікавився Леонардо да Вінчі, Тарталья, Кардано, Стевін і інші вчені епохи Відродження [Моисеев, 1949]. Їх цікавив загальний критерій, за допомогою якого можна було б без розрахунків визначити, чи буде це положення рівноваги стійким чи ні. Перший такий критерій для механічної системи тіл, що знаходяться під дією сили тяжіння, дав учень Галілея Торрічеллі; він вказав (1644 р.), що при дії сил тяжіння стійка рівновага відповідає таким положенням системи, в яких висота центру ваги має мінімальне значення. Для поширеного випадку, коли важке тіло має тільки одну точку опори, принцип Торрічеллі тлумачився так, що положення рівноваги є стійким, коли центр тяжіння знаходиться нижче точки опори.

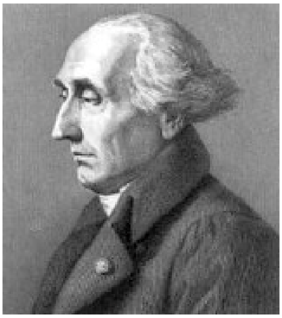


Леонард Ейлер
(1707-1783)
нім. Leonhard Euler

Але стосовно нового часу відлік слід вести від роботи Леонарда Ейлера «Корабельна наука», яка є першим великим монографічним твором з теорії стійкості [Euler, 1749]. Цей трактат Ейлера був викликаний потребами кораблебудівної практики, але саме він заклав основи двох найважливіших розділів теорії стійкості: вчення про статичну стійкість і теорії малих коливань біля положення рівноваги.

Принципово важливим було чітке визначення: «... *равновесное положение тела будет устойчиво, ежели оное тело будучи несколько наклонено, опять справится*» (зрівноважене положення тіла буде стійким, якщо це тіло після деякого нахилу знов випрямиться), а також пропозиція щодо кількісної характеристики стійкості: «*Стійкість положення рівноваги тіла, яке плаває у воді, повинна оцінюватися величиною моменту відновлювальної сили, коли тіло буде нахилено з положення рівноваги на даний нескінченно малий кут*».

Надалі це поняття стійкості для твердих тіл було поширене на пружні тіла. Рівновага пружної системи вважається стійкою за Ейлером при заданих зовнішніх силах, якщо після статичного прикладення і подальшого зняття малої збурюючої сили система повертається до свого початкового стану. В іншому випадку система вважається нестійкою.



Жозеф-Луї Лагранж
(1736-1813)
фр. Joseph Louis Lagrange

Перший том «Аналітичної механіки» Лагранжа, який з'явився в 1788 році [Lagrange, 1788], містив параграф V, в якому йшлося про «*властивості рівноваги, що мають відношення до максимуму і мінімуму*». Там була сформульована теорема, яка в сучасних термінах звучить так:

Якщо на досліджуваному рівноважному стані потенціальна енергія системи приймає строго мінімальне значення в деякій околиці цього стану, то цей рівноважний стан консервативної механічної системи є стійким в сенсі наведеного вище визначення.

При цьому, що дуже важливо, поняття стійкості рівноваги пов'язується з тими рухами, які можуть виникнути після порушення рівноваги, а саме, якщо в своєму подальшому русі система буде досить мало відхилятися від досліджуваного рівноважного положення, то такий стан рівноваги вважається стійким.

Випадок стійкості рівноваги системи тіл, що має кілька ступенів свободи, було розглянуто Лагранжем за допомогою прийому «першого наближення», коли справа зводилася до розгляду системи лінійних диференціальних рівнянь; якщо для невеликих відхилень виходили рівняння, відповідні гармонійним коливанням, то становище рівноваги вважалося стійким. Для цього потрібно, щоб корені характеристичного рівняння, за допомогою якого визначаються можливі періоди коливань, були уявними. Крім того, Лагранж проілюстрував свою теорему, звертаючись до принципу Торрічеллі, застосованого до уявного механізму, в якому сили утворювалися натягом нитки, переданому через поліспасти (рис. 3.2).

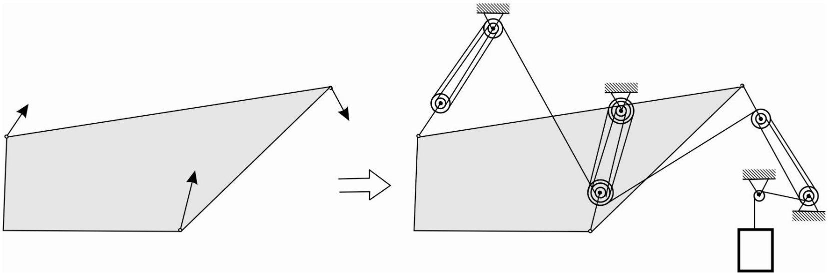
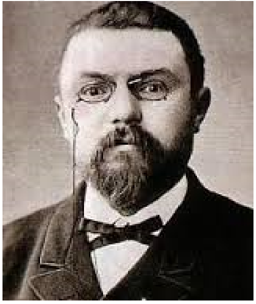


Рис. 3.2. Система передавання навантажень за Лагранжем

Відкидання членів вищих порядків Лагранж не обґрунтував, а перше строге доведення цієї теореми, що спирається на закон збереження енергії і не прив'язане до розкладання потенціальної функції в ряд, дав Лежен Діріхле [Lejeune Dirichlet, 1846]. Тому зараз говорять про теорему Лагранжа-Діріхле.

Зауважимо, що ейлерове уявлення про стійкість рівноваги спирається на зовсім інше визначення, в якому поняття руху взагалі не використовується. У його схемі міркувань величина зовнішнього навантаження подумки нарощується і передбачається, що в процесі такого нарощування в якийсь момент разом з даним рівноважним станом виникає можливість реалізації іншого рівноважного стану, суміжного з досліджуваним (розглядуваний рівноважний стан системи перестає бути однозначним). Те значення параметра навантаження $\lambda = \lambda_e$, при якому така неоднозначність форми рівноваги допускається механічною системою, називається критичним (за Ейлером). Вважається також, що при значеннях навантаження, менших за ейлерове критичне значення, стан рівноваги є стійким, а при значеннях навантаження, більших за ейлерове критичне значення λ_e, стан рівноваги нестійкий. Виявилося, що при певних умовах обидва ці підходи призводять до однакових результатів, однак факт їх тотожності був усвідомлений пізніше [Моисеев, 1949].

Наступний принципово важливий крок у розвитку загальних принципів аналізу стійкості зробив знаменитий французький математик, фізик, астроном і філософ Анрі Пуанкаре, який вивчав природу втрати стійкості механічних систем в параметрах узагальнених координат. Теорія Пуанкаре добре описує природу втрати стійкості континуальних конструкцій при зміні одного параметра зовнішнього навантаження. Ця теорія дозволяла відшукувати на кривій рівноважних станів точки біфуркації (рис. 3.3, *а*) і граничні точки (рис. 3.3, *б*), точне визначення останніх належить Пуанкаре [Poincaré, 1882].



Жуль Анрі Пуанкаре
(1854-1912)
фр. Jules Henri Poincare

Для оцінки якості рівноваги Пуанкаре розглядає функцію потенціальної енергії системи, яку він подає у вигляді квадратичної функції від узагальнених координат q_i

$$U = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} q_i q_j \ , \tag{3.1}$$

яка в стійкому стані рівноваги повинна бути додатно визначеною (це гарантує необхідний по Лагранжу строгий мінімум).

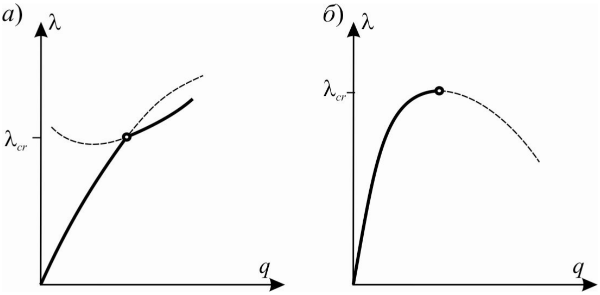


Рис. 3.3. Точки біфуркації і граничні точки

Пуанкаре визначає додатну визначеність функції потенціальної енергії системи шляхом аналізу знаків при квадратах змінних, коли ця функція приведена до канонічного вигляду

$$U = \sum_{j=1}^{n} a_i q_i^2 \ . \tag{3.2}$$

Коефіцієнти a_i при квадратах змінних Пуанкаре назвав рядом стійкості, а число від'ємних коефіцієнтів – ступенем нестійкості [Poincare, 1885].

Олександр Михайлович Ляпунов *(1857-1918)*
рос. Александр Михайлович Ляпунов

Для консервативних систем зі скінченним числом ступенів свободи розробка загальних принципів стійкості завершена роботами О.М. Ляпунова, в докторській дисертації якого «Загальна задача про стійкість руху» всебічно розглянуто проблему стійкості руху (в окремому випадку – рівноваги) [Ляпунов, 1892].

О.М. Ляпунов запропонував оригінальний, досить важливий метод, заснований на розгляді квазіенергетичної функції, що носить тепер його ім'я. Зміст свого методу Ляпунов розкрив у загальних теоремах про стійкість і нестійкість. Користуючись цим методом, він строго з'ясував, коли можна вирішити питання про стійкість за першим наближенням, а коли не можна.

Функція Ляпунова являє собою скалярну функцію

$$V(X) = V(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, ..., x_n, \dot{x}_n,), \tag{3.3}$$

задану на фазовому просторі переміщень x_i і швидкостей $\dot{x}_i$ системи, за допомогою якої можна довести стійкість положення рівноваги. Її повну похідну за часом можна записати у вигляді скалярного добутку двох векторів

$$\frac{dV}{dt} = \left(gradV, \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right). \tag{3.4}$$

Тут перший вектор являє собою градієнт функції $V(\mathbf{X})$), тобто він завжди спрямований у бік найбільшого зростання функції $V(\mathbf{X})$. Другий вектор у скалярному добутку – це вектор швидкості руху. У будь-якій точці він спрямований по дотичній до фазової траєкторії.

Розглянемо випадок, коли похідна функції $V(\mathbf{X})$ в околиці U початку координат є від'ємною:

$$\frac{dV}{dt} = \left(gradV, \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right) < 0 . \tag{3.5}$$

Це означає, що кут φ між вектором градієнта і вектором швидкості більше 90°. Для функції двох змінних це схематично показано на рисунку 3.4.

Очевидно, що якщо похідна dV/dt уздовж фазової траєкторії усюди від'ємна, то траєкторія руху прямує до початку координат, тобто система є стійкою. В іншому випадку, коли похідна dV/dt є додатною, траєкторія спрямована від початку координат, тобто система є нестійкою.

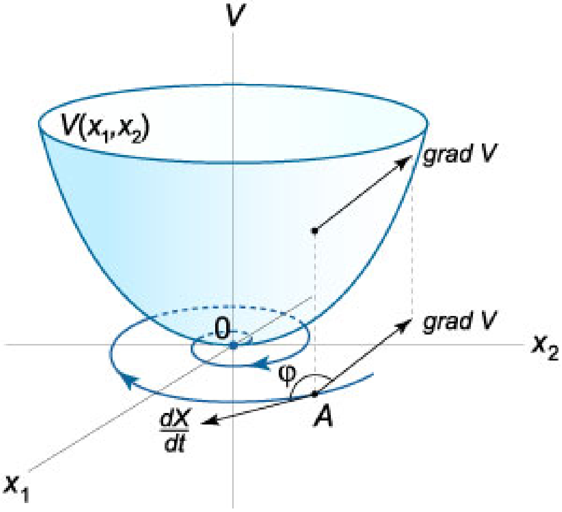


Рис. 3.4. Функція Ляпунова і її похідна за часом

Таким чином, функції Ляпунова дозволяють встановити стійкість і нестійкість системи. Перевагою даного методу є те, що тут не потрібно знати сам розв'язок $\mathbf{X}(t)$. Крім того, даний метод дозволяє досліджувати стійкість положень рівноваги негрубих систем, наприклад, у разі, коли точка рівноваги є центром. Недолік полягає в тому, що не існує загального методу побудови функцій Ляпунова. В окремому випадку однорідних автономних систем з постійними коефіцієнтами функцію Ляпунова можна шукати у вигляді квадратичної форми.

Останній факт дає підставу при розв'язанні лінеаризованих задач застосовувати в якості функції Ляпунова функціонал повної потенціальної енергії системи. Для континуальної системи такого типу енергетичний підхід (навіть без згадки теорем Ляпунова), мабуть, вперше застосував Дж. Брайан [Bryan, 1891]. Саме йому належить першість у застосуванні енергетичного принципу до розв'язання задач про стійкість рівноваги, виходячи з якого він отримав диференціальне рівняння, покладене в основу теорії випучування плоских пластинок.


Джордж Брайан
(1864-1928)
англ. George Bryan

Досліджуючи стійкість нескінченної пластини при дії стиснення по краям та задаючи прогини тригонометричним рядом, Брайан прирівнює роботу стискаючої сили потенціальній енергії згину

$$\frac{1}{2}P\int_0^l\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx \qquad (3.6)$$

і отримує значення критичної сили.

В роботі [Bryan, 1888] Брайан з'ясував границі застосовності теореми Кірхгофа щодо єдиності розв'язку задачі теорії пружності і показав, що за умови малих деформацій вона не працює, якщо тільки один або два розміри тіла можна вважати малими. При цьому явище нестійкості може мати місце в межах пружності, якщо добуток модуля пружності E на квадрат відношення малого розміру до скінченного буде того ж порядку, що і границя пружності матеріалу.

Подальша розробка загальної теорії стійкості рівноваги пружних тіл належить Р. Саусвеллу [Southwell, 1913]. Він усуває обмеження щодо малості деформацій і оперує з ідеальним тілом нескінченно великої міцності.

Слідом за Брайаном подальший розвиток енергетичний підхід отримав в роботах С.П. Тимошенка, який починаючи з першої своєї роботи 1907 року [Тимошенко, 1907], де був використаний енергетичний метод, широко застосовував його до найрізноманітніших задач стійкості пружних систем [Тимошенко, 1910], включаючи і енергетичне виведення формули Ейлера [Timoshenko, 1910]. На відміну від Дж. Брайана, який використав пружний потенціал, що залежить від напруженого стану тіла, С.П. Тимошенко розглядав роботу зовнішніх сил на переміщеннях, що відповідають формі втрати стійкості. Це виключало необхідність визначення початкового напруженого стану. Тому замість (3.6) у С.П. Тимошенка фігурує

$$\frac{1}{2}P\int_0^l\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx=\frac{P^2}{2EI}\int_0^l w^2 dx \qquad (3.7)$$

Степан Прокопович Тимошенко
(1878-1972)

С.П. Тимошенко, як і Дж. Брайан, а також багато інших послідовників енергетичного підходу, використовував варіант сильно лінеаризованої постановки задачі, при якому початковий стан системи, стійкість рівноваги якого і вивчається, вважається напруженим, але не деформованим.

У прикладній теорії пружності, особливо в задачах розрахунку тонкостінних систем (тонкі пластини і оболонки, стержні і стержневі системи, тонкостінні стержні) традиційно, хоча не завжди виправдано, використовується саме сильна лінеаризація в постановках задач стійкості рівноваги.

Тимошенко, який використав розкладання форми деформування в тригонометричні ряди, зробив важливе зауваження про можливість утримання тільки перших членів ряду:

> «*Задаючись певною формою кривої згину, ми тим самим наче вводимо додаткові в'язі в нашу пружну систему. Таке збільшення числа в'язей може супроводжуватися лише збільшенням жорсткості системи, але ніяк не зменшенням її, тому одержувані наближеним способом значення $P_{кр}$ можуть бути тільки більше дійсних, але ні в якому разі не менше їх. Застосування наближеного прийому до цілого ряду задач показує, що точність розв'язку, навіть за умови використання лише одного довільного параметра, зазвичай цілком достатня для практичних застосувань*».

Аналіз виразу для потенціальної енергії, що має вигляд квадратичного функціоналу в лінійних задачах, нерозривно пов'язаний з проблемою стійкості. Це витікає безпосередньо з теореми Лагранжа-Діріхле. Однією з перших робіт, де такий аналіз виконувався в досить загальному формулюванні, була робота П.Ф. Папковича, яка вийшла в 1941 році [Папкович, 1941]. В ній детально розглянуті варіанти задачі, коли квадратичний функціонал потенціальної енергії має тільки квадратичну частину або ж містить і лінійні відносно узагальнених координат члени. На цій основі детально проаналізовані властивості різних навантажень з точки зору їх впливу на стійкість рівноваги. Папкович розділив їх на звичайні та особливі (активні і параметричні, за термінологією, запропонованою пізніше О.Р. Ржаніциним [Ржаницын, 1955]). Доведено, що стійкість залежить тільки від параметричних навантажень, і встановлено, що завдяки дії параметричного навантаження вплив, який чиниться активним навантаженням на кожну з узагальнених координат, збільшується в $1/(1 - \varphi)$ разів, де φ – відносна величина параметричного навантаження.

Випадок, коли конструкція піддається тільки одному фіксованому виду зовнішніх впливів, є скоріше винятком, ніж правилом. Практично завжди інженер має справу з сукупністю незалежних навантажень, причому ці навантаження можуть діяти в самих різних комбінаціях.

Важливі загальні властивості критичних навантажень для систем, що піддаються дії багатьох навантажень, також були встановлені П.Ф. Папковичем, який довів теорему про опуклість області стійкої рівноваги, побудованої в просторі навантажень [Папкович, 1941][1].

Петро Федорович Папкович *(1887-1946)*
рос. Петр Федорович Папкович

Справедливості заради слід зазначити, що проблему стійкості при багатопараметричному навантаженні розглядав ще в 1933 році Людвіг Феппль [Föppl, 1933], який, виходячи з аналогії між задачами стійкості і теорії коливань та застосовуючи відому формулу Данкерлея [Dunkerley, 1894]:

$$1/\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} 1/\omega_i^2, \tag{3.8}$$

отримав для критичних навантажень

$$1/N = \sum_{i=1}^{n} 1/N_i. \tag{3.9}$$

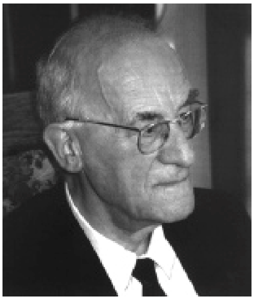
Саме з цієї причини цю теорему іноді називають теоремою Феппля-Папковича, але оскільки саме завдяки П.Ф. Папковичу цей результат увійшов в активний арсенал будівельної механіки, то назва «теорема Папковича» є теж цілком прийнятною. Пізніше О.Р. Ржаніцин показав, що в загальному випадку геометрично нелінійних систем теорема Папковича не вірна, і вказав умови, за яких в таких системах опуклість області стійкості має місце [Ржаницын, 1964]. Деякі додаткові результати в цьому напрямку отримав Б.М. Броуде [Броуде, 1964]. В дослідженнях Хусейна [Huseyin, 1975], [Huseyin, 1986] були визначені властивості граничних поверхонь для тих випадків, коли втрата стійкості відбувається в граничної точці.

Необхідність нелінійного дослідження втрати стійкості з'явилася у зв'язку з використанням таких конструктивних елементів, як пластинки і оболонки. Перші при осьовому стисненні здатні ефективно працювати при навантаженнях, визначених як критичні в лінійному аналізі, і, більш того, продовжують працювати в закритичній стадії. А другі раптово втрачають стійкість задовго до досягнення «лінійного» критичного навантаження, причому розкид експериментальних даних дуже великий. Таким чином, до 40-х років XX століття обмеженість лінійного аналізу була повністю усвідомлена, але нелінійна теорія ще не була розроблена.

Цю проблему в 1945 році блискуче розв'язав у своїй дисертації В. Койтер [Koiter, 1945]. Теорія Койтера заснована на розгляді малих, але скінченних відхилень від основного (докритичного) стану. Найбільш важливим її результатом є поява граничних точок, відповідних випадку нестійкого критичного стану "ідеальної" спрощеної моделі. Значення дійсного критичного навантаження

---

[1] В книзі [Папкович, 1941] автор зазначає, що його результати доповідались в Ленінградском механічному товаристві в 1934 р. та були опубліковані в I випуску Праць ЛКІ в 1937 році.



Ворнер Т. Койтер
(1914 – 1997)
нід. Warner T. Koiter

виявляється в таких випадках дуже чутливим до впливу початкових недосконалостей.

Теорія Койтера дозволяє отримати асимптотичні формули, які пов’язують параметр початкових недосконалостей з відхиленням значення критичного навантаження від класичного, обчисленого для "ідеальної" конструкції. У рамках даної теорії використано енергетичний підхід. В околі точки розгалуження або точки біфуркації виконується розвинення в ряд Тейлора функції повної потенціальної енергії системи з утриманням членів вище квадратичного порядку. При цьому вдається описати нахил і кривизну вторинної траєкторії в околі критичної точки і зробити висновок щодо вигляду розгалуження. Наприклад, точка розв’язку на другорядній траєкторії з нульовим нахилом і додатною кривизною ідентифікується як стійка симетрична точка розгалуження. Це дозволяє дати якісну оцінку закритичної поведінки конструкції на основі дослідження її поведінки в околі критичної точки.

Чутливість до недосконалостей описується як міра початкової післякритичної поведінки і визначається величиною першого ненульового коефіцієнта у степеневій залежності параметра навантаження від амплітуди біфуркаційної форми втрати стійкості. В. Койтер пов'язує вплив неминучих недосконалостей реальних конструкцій із закритичною поведінкою ідеальної конструкції відповідної форми. Причому до аналізу залучаються компоненти функції повної потенціальної енергії системи, що мають порядок вище квадратичного.

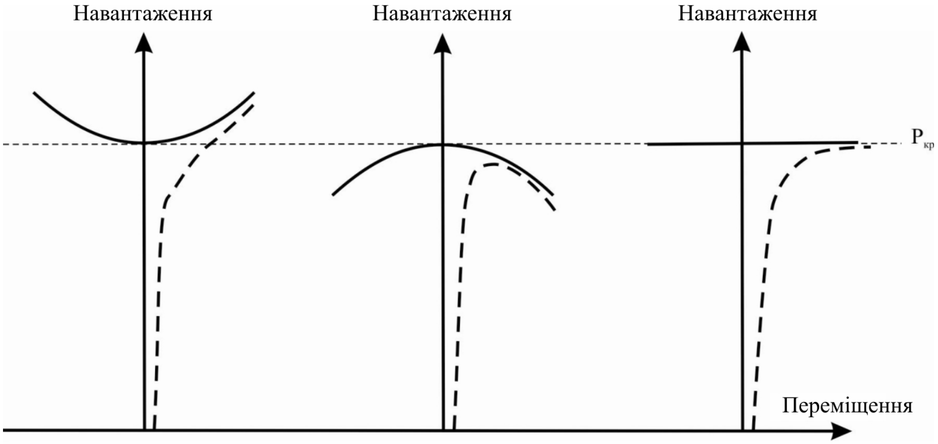
Підхід В. Койтера дозволяє, перш за все, уточнити уявлення про поведінку системи поблизу точки біфуркації, тобто при навантаженнях, що мало відрізняються від критичного значення. Сила цього підходу полягає в тому, що якісна оцінка закритичної поведінки системи передбачається на основі її вивчення в одній тільки критичній точці. Найважливіший практичний результат цього полягає в тому, що від типу критичної точки (стійка або нестійка) залежить співвідношення між критичними навантаженнями ідеальних систем і граничними навантаженнями систем з недосконалостями, тобто тут може формуватися уявлення про міру небезпеки досягнення критичного стану [Койтер, 1980].

Необхідно відзначити, що своє дослідження В.Койтер завершив ще в 1942 році, коли Нідерланди були окуповані Німеччиною, і як пише професор Марцелл Пігнатаро в некролозі, присвяченому Койтеру:

> «*Згідно з окупаційним законом аспіранти, які бажали опублікувати свою дисертацію, були зобов'язані дати клятву відданості нацистському уряду. Дисертація Койтера, присвячена стійкості пружної рівноваги, тоді була готова, але автор, не маючи наміру присягатись нацистам, чекав звільнення своєї країни. Дисертація таким чином з'явилась тільки в 1945 році*».

Теорія Койтера була застосована до різноманітних конструкцій, зокрема булла досліджена їх чутливість до недосконалостей (рис. 3.5). Її застосування до стержневих, пластинчастих і оболонкових конструкцій дозволило виявити причини відмінності в їх поведінці.

Як ідеї А. Пуанкаре, так і ідеї В. Койтера приводили до думки про класифікацію особливих точок, але лише до 60-х років XX століття цей підхід був достатньо розвинений Томом [Thom, 1975] для глибокої класифікації систем, описуваних градієнтними (потенціальними) функціями. Він покладений в основу того, що пізніше отримало назву теорії катастроф [Постон, Стюарт, 1980], – теорії, яка дала нове загальне бачення проблеми стійкості.



Нечутливість до збурення (пластини)

Чутливість до збурення (оболонки, непружні стійки)

(Пружні стійки, балки, рами)

Рис. 3.5. Чутливість до початкових збурень

Майкл Томпсон
англ. J. Michael T. Thompson

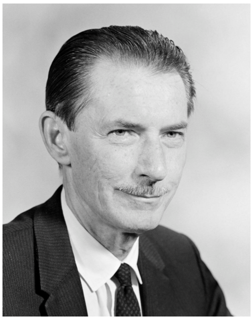
Жиль Вільям Хант
англ. Giles William Hunt

Розробники і пропагандисти цього підходу Томпсон і Хант писали в своїй класичній праці [Thompson, Hunt, 1973]: «*... повне значення роботи професора Койтера повільно проникало в нашу свідомість, як у зв'язку з нідерландською мовою, так і з нашими характерами, які незмінно надавали перевагу власним дослідженням. Але сказавши це, ми повинні проте відзначити нашу глибоку залежність від роботи професора Койтера ... Хоча і розвинений в узагальнених координатах, а не в термінах континууму, наш підхід дуже зобов'язаний вищезгаданій праці професора Койтера, і ми раді ще раз це визнати...*»

Все сказане вище, включаючи і результати В. Койтера, відносилося до проблем стійкості пружних систем під дією консервативних навантажень. Однак цим не обмежується коло проблем стійкості в задачах механіки твердого деформівного тіла. Зокрема, помітний шлях пройшли дослідження пружно-пластичного випучування. Тут довгий час фігурував ейлерів підхід з тією лише різницею, що замість модуля пружності використовувався деякий його еквівалент (теорія приведеного модуля). Але в 1946 році з'явився розв’язок Ф. Шенлі задачі про стійкість стиснутого пружно-пластичного стержня, що змінило принципово підхід до аналізу стійкості за межами пружності.

Шенлі звернув увагу на те, що концепція «приведеного модуля» відповідає лише деякому окремому припущенню про поведінку навантаження і що для пластичної стадії слід ввести визначення критичної сили, відмінне від того, яке використовується для пружної стадії.

Робота Ф. Шенлі [Shanley, 1946] показала, що для пружно-пластичних систем можливе існування деяких сил, критичних в іншому, ніж за Ейлером, сенсі. Адже за Ейлером розглядається випадок, коли можлива поява суміжного стану рівноваги при тому ж самому навантаженні, а Шенлі розглядає випадок триваючого навантаження, тобто зміни навантаження. Дивно, що ця проста думка не була прийнята на озброєння раніше, тим більше, що вже в 1910 році вона по суті була використана Т. Карманом.



Френсіс Р. Шенлі
(1904-1968)
англ. Francis R. Shanley

Але саме робота Шенлі стала основою для нового етапу в розвитку теорії стійкості, в основу якого було покладено погляд на випучування за межею пружності як на процес, що розвивається із зростанням зовнішнього навантаження.

Серед великого числа робіт зазначеного етапу слід вказати на цикл статей Р. Хілла (див., наприклад, [Хілл, 1958]), де була сформульована загальна умова єдиності в швидкостях. Зіставляючи потім цю умову з умовою стійкості, що розглядається як умова єдиності стану рівноваги, Р. Хілл вказує на їх нееквівалентність. Звідси робиться висновок про можливість біфуркації рівноважних станів при змінному навантаженні (нєєдиність у швидкостях).

Таким чином, як формулює В.Д. Клюшніков [Клюшников, 1972, 1976], явище пружно-пластичного випучування зовсім не пов'язане з втратою стійкості стану рівноваги, а є наслідком втрати стійкості руху частинок тіла в процесі деформування, що є окремим випадком втрати стійкості збуреного руху тіл.

В.Д. Клюшніковим були розглянуті різні процеси навантаження (активне навантаження, розвантаження, нейтральне навантаження) і лінеаризовані задачі, що виникають при цьому, а також показано, в яких випадках не слід враховувати явище розвантаження при втраті стійкості. Результати цих досліджень узагальнені в монографії В.Д. Клюшнікова [Клюшников, 1980], де на найпростіших моделях досліджені специфічні особливості втрати стійкості пружнопластичних систем.

Неконсервативний характер задач про пружнопластичне випучування визначався фізичним законом пластичної течії. У цих задачах допускалося трактування втрати стійкості в формі виникнення деяких нових форм рівноваги крім вихідної. Однак більш загальний аналіз стійкості систем, які знаходяться під впливом не тільки консервативних, але і неконсервативних зовнішніх сил, дав несподівані результати навіть у разі ідеальної пружності. Було виявлено, що такі системи можуть втрачати стійкість таким чином, що взагалі зникають форми стійкої рівноваги. У цих випадках при деякому значенні навантаження, яке як і раніше можна називати критичним, відбувається перехід не до нової форми рівноваги, а до деякої формі руху з наростаючим відхиленням від початкового положення рівноваги. Критерієм стійкості є виникнення зазначеної форми руху, і виявити цей факт можна лише при динамічному аналізі задачі.

Вперше на цю обставину звернув увагу Є.Л. Ніколаї при дослідженні стійкості скрученого стержня [Николаи, 1928, 1929]. Він виявив, що рівноважна конфігурація стержня, скрученого стежачим або мертвим моментом, є нестійкою при як завгодно малому значенні крутного моменту.

Є.Л. Ніколаї доповів цей результат на двох засіданнях Ленінградського механічного товариства 26 травня і 29 вересня 1927 г. На першому засіданні повідомлення Є.Л. Ніколаї буквально шокувало всіх присутніх, бо поняття ейлерової критичної сили було добре знайоме і зрозуміло всім присутнім. Всі, зрозуміло, очікували аналогічного явища і при дії крутного моменту: при малих значеннях моменту повинна бути стійкість, а при перевищенні моментом деякого критичного значення - нестійкість. Однак результат аналізу показав, що це не так. І першим, хто вказав на можливу причину такої дивної поведінки стержня при крученні, був П.Ф. Папкович, який зауважив, що мова йде про неконсервативні задачі, а отже, в систему може поступати енергія.

Це пояснення примирило присутніх із парадоксом Ніколаї. Як би там не було, але обговорювані повідомлення Є.Л. Ніколаї започаткували новий і надзвичайно важливий розділ механіки - теорії стійкості неконсервативних систем. Але справжній бум в цій теорії виник, коли дослідники звернулись до аналізу стійкості систем, навантажених стежачими силами [Beck, 1952], [Ziegler, 1952].

Стосовно практичної значущості таких задач в літературі час від часу виникають дискусії, до яких залучається багато хто з відомих вчених. Так, наприклад, помітний резонанс викликала "сердита" замітка [Koiter, 1996] про "нереалістичність стежачих сил" з рекомендацією редакторам наукових журналів з порога відкидати публікації, присвячені аналізу ефектів від стежачих сил.

Це не могло лишитися поза увагою, тим більше, що відповідальність за саму ініціацію дискусії взяв на себе такий визнаний авторитет в механіці як Койтер.

Найбільш зважений відгук на цю статтю міститься в двох емоційно написаних статтях трьох авторів [Sugiyama et al., 1999, 2002]. Визнаючи частково правоту Койтера в тому, що в багатьох публікаціях помітна згубна тенденція до чисто академічного стилю досліджень без спроб обґрунтувати їх застосовність в прикладній інженерній справі, ці автори в той же час звертають увагу на принципову наукову важливість концепції стежачих сил. Поза рамками цієї концепції було б важко розібратися з багатьма випадками динамічної нестійкості механічних систем при їх неконсервативному навантаженні. Так, дійсно концепція стежачих сил породила безліч парадоксальних результатів, які було не дуже просто зрозуміти і прийняти з першого погляду [Болотин, 1961]. Саме в цьому сенсі в згаданій вище статті [Sugiyama et al., 2002] стежачі сили і названі "гидким каченям механіки"[2], але аж ніяк не в зневажливому сенсі. Згадуючи долю героя однойменної казки, який перетворився зрештою в дивного лебедя, автори наводять завершальні слова Ганса Християна Андерсена:

«Воно (гидке каченя) було невимовно щасливе, але не відчувало гордощів, бо добре щире серце не буває ніколи горде. Воно згадувало той час, коли всі глузували з нього і проганяли його. А тепер усі кажуть, що він найгарніший серед прекрасних птахів».

3.2. Стійкість стиснутих стержнів

Перші систематичні дослідження стійкості рівноваги гнучких стержнів при стисненні експериментальним шляхом виконав Петрус Ван-Мусшенброк. Виявлені ним кількісні закономірності (зворотна пропорційність критичної сили квадрату довжини стержня) були опубліковані в роботі [Van Musschenbroek, 1729]. А перші теоретичні роботи належать Л. Ейлеру, який в роботі 1744 року [Euler, 1744] розглянув точне рівняння пружної кривої (еластики)

$$\frac{Cy''}{\left(1+y'^2\right)}=M\,, \tag{3.9}$$

і знайшов критичну силу для стояка, защемленого в основі

$$P_{cr}=\frac{C\pi^2}{4l^2}\,. \tag{3.10}$$

Ім'я Ейлера в будівельній механіці нерозривно пов'язано із задачею про стійкість прямолінійного стержня, хоча Ейлер зовсім не шукав розв’язок цієї задачі і прийшов до неї випадково. Він зацікавився вказівкою свого друга Даніеля Бернуллі, що «потенціальна сила»

$$\int\left(1/r^2\right)ds \tag{3.11}$$

зігнутої пластинки отримує найменше значення для дійсної лінії прогину (при постійному перерізі, довжині і заданих граничних умовах). Неважко побачити, що ця «потенціальна сила» відрізняється від потенціальної енергії зігнутого стержня тільки множником $EJ/2$.

У 1759 році Л. Ейлер опублікував нову роботу [Euler, 1759], в якій навів виведення формули для визначення критичного навантаження, виходячи з спрощеного рівняння

$$C\frac{d^2y}{dx^2}=-Py\,, \tag{3.12}$$

---

[2] В назві статті, яка написана англійською мовою, обігрується кумедна співзвучність словосполучень *Ugly Duckling* (Гидке Каченя) та *Ugly Buckling* (Гидке Випучування).

що знову таки дало розв’язок (3.10). Коректність такого підходу довгий час викликала сумніви, і багато вчених вважали, що збіг результатів точної і лінеаризованої задачі є випадковим. Цей сумнів було розсіяно Ж.-Л. Лагранжем, який в роботі [Lagrange, 1868] підтвердив вірність формули Ейлера за допомогою точного аналізу. Він також отримав значення критичної сили для шарнірно опертого по кінцях стержня, для стержня з затисненими кінцями, а також для стержня змінного перерізу, для якого він намагався знайти оптимальний обрис, хоча і прийшов до помилкового розв’язку. В основу своїх міркувань Лагранж поклав тезу, що для отримання навантаження, яке спричиняє поздовжній згин, потрібно подати форму втрати стійкості у вигляді синусоїди, а в формулу Ейлера підставляти замість довжини l відстань між точками перегину.

Що стосується форми втрати стійкості (точніше, форми закритичного деформування) стержня, то якщо виходити з точного виразу для кривизни, вона матиме вигляд так званої еластики Ейлера і буде виражатися за допомогою еліптичного інтеграла. Властивості цієї кривої і більш зручні способи обчислень були дані Заальшюльцем [Saalschulz. 1880] і Шнейдером [Schneider, 1901]. Для не дуже великої гнучкості хороший наближений розв’язок знайшов Р. Мізес [Mises, 1924].

Незважаючи на величезний авторитет Ейлера, його формули не знайшли тоді визнання у практикуючих інженерів. Не допомогло і те, що на початку 19-го століття А. Дюло на підставі своїх випробувань металевих стержнів на стиск показав, що формула Ейлера дає задовільне значення критичної сили, якщо тільки забезпечуються передбачувані теорією граничні умови [Duleau, 1820]. Але Дюло використував порівняно тонкі стержні, тоді як елементи конструкцій на практиці бувають зазвичай не настільки гнучкими. Для цих практичних умов формула Ейлера призводить до перебільшених значень критичного навантаження, і для того щоб знайти формулу, яка ближче відповідає дійсності, треба було звернутися до дослідів.

Вельми серйозне теоретичне дослідження поздовжнього згину було виконано в той час Ламарлем [Lamarle, 1845-1846]. Він перший встановив межу, до якої допустимо користуватися формулою Ейлера і за якою можна покладатися тільки на експериментальні дані. Ламарль правильно робить висновок, що формула Ейлера може давати вірні результати лише до тих пір, доки значення критичного напруження не перевищує межі пружності матеріалу, звідки знаходиться граничне значення гнучкості

$$\frac{l^2}{i^2} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_т}. \tag{3.13}$$

Пізніше в 1887 р. І. Баушінгер [Bauschinger, 1887] експериментально дослідив стійкість стиснутих стержнів. Більшість зразків мали на кінцях тонкі конічні наконечники, які забезпечували шарнірне обпирання кінців зразка. В результаті випробувань було виявлено збільшення згину зразка при невеликій стискаючій силі, викликане різними похибками. Після досягнення стискаючою силою деякого значення вісь зразка значно викривлялася в площині найменшої жорсткості, що, як правило, вело до руйнування зразка. Отримане значення стискаючої сили виявилося близьким до критичного значення, що визначається за формулою Ейлера, якщо відповідні значення напружень не досягають границі пропорційності.

У 1890 р. Л. Тетмайер опублікував результати експериментальних досліджень, пов'язаних зі стійкістю стержнів, що стискаються, із зварювального і литого заліза для випадків різних поперечних перерізів [Tetmajer, 1890, 1907]. Зразки мали конічні наконечники з шарнірним закріпленням кінців так само, як і в дослідах І. Баушінгера. Дослідником в результаті проведених експериментів був зроблений висновок про те, що, коли відношення довжини стержня до мінімального радіусу інерції велике, а напруження в стержні менше границі пропорційності матеріалу, формула Ейлера справедлива. Для випадку більших напружень було зроблено припущення про лінійну залежність критичного напруження від гнучкості і визначені величини постійних, що входять в цю залежність.

В результаті досліджень, виконаних Ф.С. Ясинським [Jasinski, 1895], було виявлено гарне узгодження експериментальних і теоретичних результатів при напруженнях, що не перевищують границі пропорційності матеріалу. Для випадків, коли напруження перевищують границю пропорційності, він запропонував наступну формулу для критичних напружень стиснутого стержня в залежності від його гнучкості:

$$\sigma_{nl} = a-b\lambda, \tag{3.14}$$

де λ – гнучкість стержня і a, b – константи, які залежать від матеріалу. Коефіцієнти цієї залежності він отримав, за допомогою обробки експериментальних даних І. Баушінгера, Л. Тетмайера і А. Консідера методом найменших квадратів.

Результатом ретельно поставлених експериментів І. Баушінгера, Л.Тетмайера і А. Консідера стало те, що закінчилися майже 150-річні сумніви у формулі Ейлера, і знову з'явився інтерес до теоретичних робіт із стійкості.

Одним з перших учених цієї «нової хвилі» став Ф.С. Ясинський, який розв’язав ряд важливих в практичному відношенні задач стійкості, головним чином з практики мостобудування. Так, наприклад, він першим зайнявся питанням про стійкість стиснутих розкосів мостової ферми з перехресною решіткою з урахуванням підтримуючого впливу розтягнутих розкосів [Ясинский, 1894]. Ясинський розглянув ряд випадків стійкості стиснутих стержнів під впливом розподілених навантажень. Зокрема він розглянув стержень з шарнірно опертими кінцями в пружному середовищі, реакція якого, перпендикулярна осі стержня і пропорційна його прогину, а інтенсивність стискаючого розподіленого осьового навантаження пропорційна відстані від середнього перерізу.

Фе́лікс Станісла́вович Ясинський *(1856 — 1899)*
рос. Фе́ликс Станисла́вович Ясинский

Ця задача отримала назву «задача Ясинського», до неї він звів розрахунок стиснутих верхніх поясів відкритих мостів [Ясинский, 1894]. Це дослідження було ініційовано серією аварій таких мостів в Західній Європі і в Росії.

Ясинський вперше в науці дав узагальнення формули критичного напруження, яке дозволяє звести будь-який випадок поздовжнього згину до основного випадку шарнірно опертого стержня шляхом підстановки в формулу замість дійсної довжини стержня його приведеної (розрахункової) довжини. Введення понять коефіцієнта довжини і розрахункової довжини стержня мало велике значення для всього подальшого розвитку методів розрахунку стиснутих стержнів на стійкість, оскільки дозволило використовувати для будь-якого випадку поздовжнього згину формули і дослідні дані, отримані для основного випадку. Слідом за Ф.С. Ясинським цим поняттям стали користуватися в своїх дослідженнях і інші вчені, і воно увійшло в науку як одна з основних характеристик стиснутого стержня при його розрахунку на стійкість.

Учень і послідовник Ясинського С.П. Тимошенко вже в своїй роботі 1907 року [Тимошенко, 1907] приводить точний і наближений розв’язок для стержня, що лежить на суцільній пружній основі вінклеровського типу, а в наступній публікації [Тимошенко, 1908] розглядає стійкість стержня з пружно закріпленими кінцями і стійкість консолей змінного перерізу. Наближено оцінюється роль ослаблення перерізу на малій частині довжини стержня і розглядається питання про вплив зсуву на критичну силу. В останньому випадку енергетичним методом отримана формула Ніссбаума [Nissbaum, 1907]

$$\frac{1}{P_{cr}}=\frac{1}{P_{cr,e}}+\frac{1}{P_{cr,s}}, \qquad (3.15)$$

де $P_{cr,e}=\pi^2 EI/l^2$ — критична сила при згинному випучуванні, $P_{cr,s}=GA/k$ – критична сила при зсувній формі втрати стійкості, k – коефіцієнт форми перерізу.

Були розв’язані і деякі інші задачі стійкості прямолінійного стиснутого стержня, але найбільш важливою проблемою, що постала перед теоретиками в той час, була проблема розрахунку коротких стиснутих стержнів, які втрачали стійкість в непружній стадії роботи. Для них по суті тоді були придатні лише емпіричні залежності, про які говорилося вище.

Фрідріх Енгессер
(1848-1931)
нім. Friedrich Engesser

У 1885 р. Ф. Енгессер [Engesser, 1885] запропонував при роботі матеріалу за границею пропорційності використовувати у формулі Ейлера дотичний модуль пружності E^*, який визначається кутом нахилу дотичної до кривої деформація-напруження: $E^*=d\sigma/d\varepsilon$.

Ф. Енгессер вважав, що при згині стержня в момент втрати стійкості деформації стиснення частини перерізу з увігнутого боку стержня збільшуються, а з опуклого боку зменшуються. Причому коефіцієнтом пропорційності між приростами деформацій і напружень служить дотичний модуль E^*.

Пізніше Ф. Енгессер відгукнувся на критику Ф.С. Ясинського, який помітив, що при розвантаженні, яке відбувається на зовнішній стороні перерізу, слід використовувати звичайний модуль пружності. І в 1889 р. Ф. Енгессер [Engesser, 1889] опублікував виправлену формулу для критичної сили:

$$P^{**} = \frac{\pi^2 E^{**} I}{l^2}, \tag{3.16}$$

де E^{**} - приведений (назва з’явилась згодом) модуль пружності, котрий залежить як від дотичного модуля E^*, так і від модуля при розвантаженні E, а також від форми перерізу.

Ця ж формула була отримана в 1910 р. Т. Карманом, дисертація якого [Karman, 1910] містить вираз для приведеного модуля в разі прямокутного поперечного перерізу:

$$E^{**} = \frac{4E^*E}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E^*}\right)^2}. \tag{3.17}$$

На відміну від Ф. Енгессера, який відштовхувався від формули Ейлера, що фіксує стан втрати стійкості, Т. Карман вперше розглянув задачу про поздовжній згин стержня як задачу про його випучування і стійкість в *процесі* монотонно триваючого навантаження. Для фізично і геометрично нелінійних задач втрата стійкості відбувалася в граничній точці Пуанкаре. Свої результати Т. Карман підтвердив ретельно поставленими експериментами над короткими стержнями із заданою початковою недосконалістю у вигляді ексцентриситету стискаючої сили.

Підхід Енгессера-Кармана, заснований на використанні приведеного модуля, залишався єдиним при розгляді поздовжнього згину непружних стержнів протягом всієї першої половини XX століття.

Однак у багатьох експериментах критичне навантаження, визначене за дотичним модулем E^*, було ближче до дійсності, ніж приведено-модульне навантаження P^{**}. На становище, що склалося, як на якийсь парадокс в 1946 році вказав Ф. Шенлі [Shanley, 1946]. Він поставив свої експерименти і виявив, що на початкових стадіях випучування приріст деформацій з увігнутого боку набагато перевершує зменшення деформацій з опуклого боку стержня. Отже, початок випучування пов'язаний з нульовим об’ємом зони розвантаження і розрахунок повинен йти з використанням дотичного модулю. Крім того, виявилося, що припинення зростання навантаження консервує стрілу вигину, тобто втрата стійкості йде тільки в умовах збільшення навантаження [Shanley, 1947].

Карман в коментарях до статті Шенлі зауважив:

> «*Моє первинне дослідження, а також дослідження Енгессера є узагальненням теорії пружного випучування. Чому воно не охоплює всі можливі положення рівноваги в непружному випадку? Очевидно, не тому, що в непружній області співвідношення між напруженням і деформацією є нелінійним, але в зв'язку з тим, що процес деформації має незворотний характер. Залежно від*

історій процесу навантаження і розвантаження існує безліч значень залишкової деформації, що відповідають одному і тому ж напруженню. Отже, для незворотних процесів визначення границі стійкості повинно бути переглянуто. Необхідність цього була інтуїтивно визнана Шенлі, що, як я вважаю, і є великою заслугою його роботи».

Те, що розв'язок Шенлі є вірним, якщо одночасно із згином відбувається зростання стискаючого навантаження (концепція триваючого навантаження), також підтверджувалося Ю.М. Работновим [Работнов, 1952]. Фактично Шенлі вказав нижню межу для стискаючої сили, починаючи з якої, можуть виникати нові форми рівноваги стояка. З цієї точки зору дотично-модульну силу можна вважати критичною.

Використання дотично-модульного критичного навантаження є привабливим з практичної точки зору, а його відносно невелика відмінність від приведено-модульного критичного навантаження (рис. 3.6) знімає багато сумнівів.

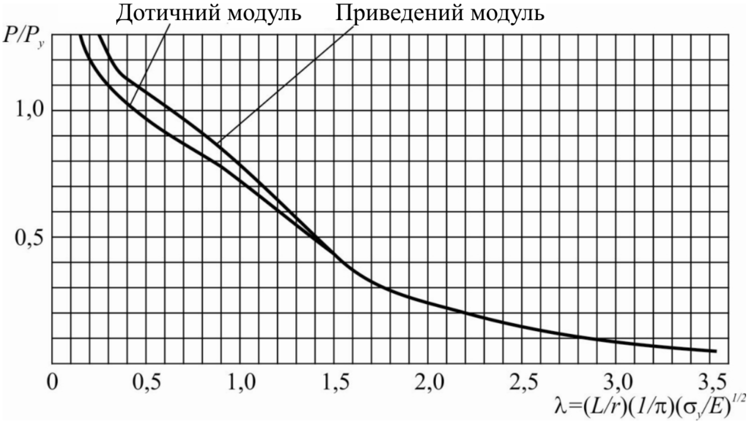


Рис. 3.6. Залежність значення відносної критичної сили від гнучкості

Ідея Шенлі про вплив історії навантаження на величину критичного навантаження привела О.А. Ільюшина [Ильюшин, 1960] і В.Г. Зубчанінова [Зубчанинов, 1965] до створення теорії стійкості стержнів, що враховує взаємодію останніх з конструкцією при випучуванні. О.А.Ільюшин показав, що випучування стиснутого стержня, який працює в складі конструкції малої жорсткості, може супроводжуватися як зменшенням навантаження на стержень (розвантажуюча конструкція), так і збільшенням (довантажуюча конструкція). В.Г.Зубчанінов провів аналіз процесу післябіфуркаційного випучування стержнів в розвантажуючих і довантажуючих системах довільної жорсткості і показав, що є цілий спектр навантажень біфуркації зі стійким і нестійким післябіфуркаційним випучуванням.

3.3. Позацентрово стиснуті стержні

Розрахункова модель у вигляді абсолютно прямого центрально стиснутого стержня є абстракцією. Це зрозуміли вже давно, і цілком природним було прагнення оцінити таку абстракцію. Мабуть, першим тут, як і в багатьох задачах механіки, був Томас Юнг.

Томас Юнг
(1773-1829)
англ. Thomas Young

У другому томі виданого в 1807 році курсу лекцій Т. Юнга [Young, 2002] розглянута задача про згин стиснутої колони, яка має первісну кривизну в формі синусоїди $f_0 \sin(\pi x / l)$. Прогин вільного кінця консолі, викликаний стискаючою силою *P*, виявляється рівним

$$f = \frac{f_0}{1-\left(4Pl^2/EI\pi^2\right)}. \qquad (3.16)$$

Звідси зроблено висновок, що при $P = \pi^2 EI/4l^2$ прогин набуває нескінченно великого значення, якою не була б величина f_0. Це було перше дослідження стійки за наявності початкового викривлення.

Пізніше, в 1819 році цю задачу розв’язав Нав'є. Аналогічні результати були отримані і для інших випадків роботи стержня на стиск із згином. Так, наприклад, в роботі 1913 року С.П. Тимошенко приводить наближений розв’язок для обчислення прогину стиснуто-зігнутого пружного стержня у формі

$$f = \frac{f_0}{1-S/S_e}, \qquad (3.17)$$

де f_0 – прогин від одного лише поперечного навантаження, *S* – стискаюча сила, S_e - ейлерова критична сила. Відзначимо, що це окремий випадок проблеми взаємодії активного і параметричного навантажень, в загальному вигляді розглянутої П.Ф. Папковичем.

З цієї формули видно, що при наближенні стискаючої сили до критичної ейлерової силі прогини починають прямувати до нескінченності, що інтерпретувалося як втрата стійкості. І був зроблений висновок про те, що поперечне навантаження не змінює критичну силу згинального випучування стиснутого (центрально чи позацентрово) прямолінійного стержня.

Співвідношення такого типу потім широко використовувалося при побудові різноманітних наближених розв’язків задачі стійкості і стійкої міцності. Зокрема, Р. Саусвелл на основі цієї залежності побудував свій спосіб експериментального визначення критичного навантаження, що враховує можливу неідеальність випробуваного зразка [Southwell, 1932].

Корисно помітити, що перевірка міцності пов'язана з формулою

$$\sigma = \sigma_N + \frac{Nf_0}{W}\cdot\frac{1}{1-\sigma_e/\sigma_N} + \frac{M}{W} = \sigma_N\left(1+\sigma_M\frac{cl^2}{h\rho}\cdot\frac{1}{1-\sigma_N/\sigma_e}\right) + \sigma_M = \sigma_N(1+\nu)+\sigma_M, \qquad (3.18)$$

де $\sigma_N = N/A$ — напруження від стиску, $\sigma_M = M/W$ — напруження від згину, ρ — ядрова відстань, *c* — коефіцієнт у виразі для визначення стріли прогину $f_0 = cMl^2/(Wh)$.

І якщо ототожнити величину $1/(1+\nu)$ із коефіцієнтом поздовжнього згину φ, то отримаємо відому формулу Ясинського

$$\sigma = \sigma_N / \varphi + \sigma_M = \frac{N}{\varphi A} + \frac{M}{W}. \tag{3.19}$$

Взагалі, значення коефіцієнта φ і величини $1/(1+\nu)$ відрізняються на 5-7%, але головна вада формули Ясинського полягає в тому, що реальні напруження σ_M складаються із фіктивними напруженнями σ_N / φ. Незважаючи на це, формула Ясинського іноді використовується і сьогодні.

Перші дослідники питання, пов'язаного з позацентровим стиском непружних стержнів, зіткнулися з труднощами, пов'язаними з необхідністю розгляду різних випадків розташування пружної і пластичної області в поперечному перерізі, внаслідок чого розв’язок ставав залежним від форми цього перерізу. Задачу про визначення критичної сили позацентрово навантажених стержнів, як задачу про стійкість, вперше досліджував Т. Карман. При цьому випучування стержнів передбачалося в площині, що проходить через одну з головних осей симетрії поперечного перерізу. На основі його теорії Е. Хвалла в ряді статей, опублікованих в період з 1928 по 1937 рр., наприклад [Chwalla, 1934], ретельно досліджував стійкість позацентрово стиснутих стержнів і отримані результати для різних форм перерізів узагальнив у вигляді таблиць і діаграм.

Розв’язок Хвалли залежить від прийнятої їм діаграми стиску матеріалу $\sigma - \varepsilon$, і використана їм діаграма мала коротку площадку текучості, при якій швидко наступала стадія самозміцнення. Ця обставина, а також той факт, що розв’язок Е. Хвалли відрізнявся громіздкістю обчислень і погано осяжною графоаналітичною формою розрахунку, не давало можливості застосовувати цей метод в практичних розрахунках. Але, ймовірно, правильно вважати, що цією роботою було дано поштовх для створення більш простих методів розрахунку. І, починаючи з 30-х років, саме цей напрямок привернуло до себе найбільшу кількість дослідників у багатьох країнах.

Так, Єжек [Jezek, 1937] вніс цінний внесок у розв’язок цієї задачі. Він розв'язав аналітично задачу стійкості за межами пружності шарнірно опертого позацентрово стиснутого стержня, використовуючи модель ідеального пластичного матеріалу (діаграма Прандтля). Застосування однієї діаграми позбавило від необхідності розглядати різні діаграми для кожного з матеріалів і дозволило розробляти загальні методи для розрахунку конструкцій. Цією діаграмою чітко розмежовувалися пружна і пластична стадії роботи конструкції. Завдяки цьому було обґрунтовано поняття пластичного шарніра, що мало велике значення для розуміння випадків, які спостерігаються досить часто і стосуються значних пластичних деформації конструкції при збереженні її несучої здатності.

Ще одним припущенням було те, що зігнута лінія стержня приймалася як півхвиля синусоїди. Це припущення виявилося цілком виправданим, і наближені методи розрахунку на стійкість стиснуто-зігнутих стержнів, побудовані на цьому допущенні, досить точні з практичної точки зору.

У працях радянських учених підхід Хвалли і Єжека також отримав велику популярність. Так О.Р. Ржаніцин, приймаючи гіпотезу плоских перерізів, виклав аналогічний метод визначення критичних станів позацентрово стиснутого стержня на кривій довжина - прогин при заданій стискаючій силі [Ржаницын, 1955]. Ґрунтуючись на тих самих підходах, в різній мірі спрощені методи розрахунку на стійкість для стиснуто-зігнутих стержнів пропонували і інші дослідники. Зрештою, приймаючи допущення про викривлення осі стержня за півхвилею синусоїди, про матеріал, що підкоряється діаграмі Прандтля, а також розглядаючи рівняння рівноваги для центрального перерізу відносно стискаючої сили і моменту, можна отримати вираз для екстремального значення середнього за перерізом напруження для основних перерізів в залежності від гнучкості та ексцентриситету. На основі цього отримані наближені формули і таблиці коефіцієнтів для визначення критичної сили за границею пружності позацентрово стиснутих стержнів, які широко застосовуються в сучасних будівельних нормах.

3.4. Стійкість плоскої форми згину, згинно-крутильна форма випучування

Задача про бічне випучування балок вузького прямокутного поперечного перерізу була вперше розглянута Прандтлем [Prandtl, 1899] і Мічеллом [Michell, 1899]. Незалежно один від одного вони опублікували в одному і тому ж 1899 році теорію бокового випучування балок під дією поперечного навантаження, і обидва прийшли, по суті, до однакового результату – до диференціального рівняння задачі, яке являє собою однорідне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Нетривіальний розв’язок цього рівняння дав критичне значення поперечного навантаження, яке згинає смугу.

Подальший розвиток цієї проблеми належить С.П. Тимошенку, який в 1905-1906 роках отримав основне диференціальне рівняння кручення симетричних двотаврових балок і на цій основі досліджував бічне випучування поперечно навантажених високих двотаврових балок [Тимошенко, 1905-06]. Пізніше в Київському політехнічному інституті дослідження С.П. Тимошенка було представлене до захисту на здобуття наукового ступеня ад'юнкта з прикладної механіки (опонентами були В.Л. Кирпичов, А.А. Радциг і М.Б. Делоне). Але, головне, це дослідження перетворило академічну задачу Прандтля в задачу, що має велике значення для практики мостобудування.

Робота [Тимошенко, 1905-06] дала поштовх до численних досліджень інших авторів. Так, докладне дослідження впливу підвищення і пониження точки прикладання навантаження на величину $P_{\text{кр}}$ зроблено А. Коробовим [Коробов, 1911]. Двотаврові балки з неоднаковими полицями під одночасною дією осьового стиснення і рівних кінцевих моментів в площині стінки були вперше розглянуті Фрідріхом Блейхом [Bleich, 1933]. Ця теорія була також застосована до задачі про розрахунок двотаврових балок, розтягнуті полки яких були закріплені проти бокового зміщення, тобто до задачі випучування з фіксованою віссю обертання.

У 1941 р. Вінтер [Winter, 1941] дав наближені формули для задачі про бічне випучування несиметричних двотаврових балок, які він отримав на основі застосування енергетичного методу Релея. Велике дослідження задачі про бічне випучування проведено Гудьєром [Goodier, 1942], який отримав розв’язок загальної задачі стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю при одночасній дії стиску, згину і крутіння. Гудьєр в своєму дослідженні не вводить яких-небудь обмежень, пов'язаних із симетрією поперечного перерізу, але розглядає тільки вплив поздовжніх сил і кінцевих моментів. Робота не торкається питань щодо балок, які знаходяться під дією поперечного навантаження.

У зв'язку з тільки що згаданою проблемою набуло практичної важливості і питання про кручення тонкостінних елементів відкритих профілів. Найпростіший випадок втрати стійкості крутильної форми кутикового профілю був розглянутий С.П. Тимошенком [Тимошенко, 1905-06]. Загальне дослідження втрати стійкості крутильної форми тонкостінних елементів, подібних до тих, що застосовуються в конструкціях літаків, було виконано Г. Вагнером [Wagner, 1929]. Більш строге обґрунтування цієї теорії дав Р. Каппус [Kappus, 1937]. За час, минувший після опублікування цих робіт, чимало інженерів працювало над вивченням поперечного випучування балок і крутильної форми втрати стійкості стиснутих тонкостінних елементів; результати цих досліджень знайшли широке використання не тільки в літакобудуванні, але також і в будівництві мостів.

Тут слід зазначити роботи Гудьєра [Goodier, 1942], який досліджував стійкість не тільки окремого стиснутого стержня при різних умовах, але також і стержня, жорстко з'єднаного з пружними пластинками. Користуючись теорією великих деформацій, він дав строге підтвердження фактичної правильності тієї передумови, на якій Г. Вагнер побудував свою теорію втрати стійкості в крутильній формі. Г. Ніландер [Nylander, 1943] поповнив теорію поперечного випучування двотаврових балок і провів велике експериментальне дослідження з цієї проблеми. Е. Хвалла [Chwalla, 1941] досліджував поперечне випучування балок несиметричного профілю і дав загальний вигляд рівнянь, окремим випадком яких є рівняння для двотаврової балки.

С.П. Тимошенко виклав загальну теорію згину, крутіння і стійкості тонкостінних елементів відкритого профілю [Timoshenko, 1945]. В. З. Власов розвинув у своїй книзі [Власов, 1949] інший, більш загальний підхід до теорії тонкостінних стержнів, для яких характерна згинно-крутильна форма втрати стійкості. Для таких стержнів кожному елементу переміщень поперечного перерізу (двом зміщенням і закручуванню) відповідає своя критична сила. При прикладенні поздовжньої сили в центрі згину ці сили стають незалежними і найменша з них стає вирішальною. Виконаний В.З. Власовим аналіз показав, що критична сила набуває найбільшого значення, якщо вона прикладена в центрі згину. В разі прикладення стискаючої сили в інших точках перерізу, в тому числі і в центрі ваги, критична сила зменшується. В.З. Власов розкрив роль депланації перерізу, особливо характерної для перерізів відкритого профілю. Він показав, що при обмеженні депланації критична сила зростає.

3.5. Стійкість криволінійних стержнів

Вперше задачу такого типу розглянув Моріс Леві [Levy, 1884], який для нестисливого кільця знайшов критичне значення навантаження, рівномірно розподіленого по всій довжині його окружності.

Слідом за Леві переважна більшість розв’язаних задач із стійкості рівноваги криволінійних стержнів спирається на умову нестисливості осі стержня (умова Буссінеска). Прийняття умови Буссінеска дозволяє істотно спростити математичну постановку задачі. Аналізувалися різні варіанти поведінки навантаження.

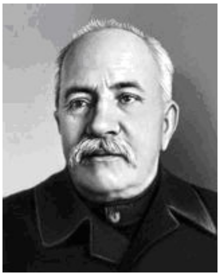
Євген Леопольдович Ніколаї *(1880 — 1950) рос. Евгений Леопольдович Николаи*

М. Леві знайшов критичне значення навантаження $q_{cr} = 3EI/R^3$, а більш строгий аналіз цього розв’язку показав, що він є точним, якщо вважати, що навантаження є гідростатичним, тобто стежить своїм напрямком за нормаллю до деформованої поверхні криволінійного стержня. Для кільця, стиснутого мертвим радіальним навантаженням, яке і після втрати стійкості лишається паралельним початковому напрямку, розв’язок має вигляд $q_{cr} = 4EI/R^3$. Для полярного навантаження (такий випадок виникає при охолодженні обода колеса з багатьма спицями) Є.Л. Ніколаї [Николаи, 1918] отримав $q_{cr} = 4{,}5EI/R^3$.

С.П. Тимошенко в роботі [Тимошенко, 1923] досліджував стійкість опертого і незатисненого по кінцях кругового стержня при рівномірному радіальному тиску і отримав точний розв’язок цієї задачі. Особливо був розібраний випадок, коли навантаження, і після втрати стійкості лишаючись паралельним початковій площині кола, було спрямовано до центру кільця.

Багато робіт було присвячено задачі про стійкість арок. Тут помітним ускладненням було питання про прийнятність гіпотези щодо нестисливості осі арки. Цю спрощуючу умову припустимо використовувати тільки для досить підйомистих арок. У разі ж пологих арок припущення про нестисливість осі арки здатне привести до помітних похибок розрахунку, зростаючих разом із падінням відношення стріли арки до її прольоту. Але справа не тільки в тому, що при визначенні поздовжньої сили в пологій арці можна нехтувати осьовою деформацією. Є і другий аспект проблеми в задачах стійкості рівноваги пологих арок. У цих задачах під сумнів повинна бути поставлена вже і допустимість лінеаризації задачі, особливо сильної лінеаризації, при якій початковий стан системи вважається напруженим, але не деформованим.

Але відмова від лінеаризації означає, що задача математично з самого початку повинна розглядатися в нелінійній постановці, що, зрозуміло, сильно ускладнює як математичну постановку задачі, так і її розв’язок. Проте, наближений розв’язок таких задач може бути отриманий. Так, наприклад, поведінка пологої синусоїдальної арки під дією вертикального навантаження розглянута С.П. Тимошенком [Timoschenko, 1935].



Олександр Миколайович Дінник
(1876-1950)
рос. Александр Николаевич Динник

Це дослідження С.П. Тимошенка пізніше було продовжено О.М. Дінником, який опублікував великий цикл робіт зі стійкості арок, виконаних 1930–40-х роках [Динник, 1946]. Він, зокрема, звернув увагу на одну суттєву обставину, яка вислизнула від уваги С.П. Тимошенка. Справа в тому, що в певному діапазоні параметрів положистої арки втрата стійкості її рівноваги відбувається не після досягнення граничної точки на кривій рівноважних станів, а дещо раніше і за біфуркаційним критерієм. Хоча важливий висновок був зроблений Дінником правильно, саме значення критичного біфуркаційного навантаження для положистої арки, визначено їм невірно.

3.6. Стійкість пластин

Історія розвитку теорії стійкості пластин під дією крайових стискаючих сил починається у 1891 році, коли Брайан [Bryan, 1891] опублікував своє дослідження про прямокутну пластину, вільно оперту на всіх краях, під дією рівномірно розподіленого на протилежних краях стискаючого навантаження, розташованого в площині пластинки.

Через понад п'ятнадцять років задача про випучування знову привернула до себе пильну увагу. На додаток до результатів Брайана, який отримав розв’язок для шарнірно опертої пластини, рівномірно стиснутої в одному напрямку, або стиснутої в двох перпендикулярних напрямках, почалися дослідження стійкості прямокутних пластин з різними граничними умовами і при різних схемах навантаження. С.П. Тимошенко розглянув задачу про випучування прямокутних пластин, при різних умовах опирання країв, паралельних діючим стискаючим силам, в тому числі і варіант пластини, одна з ненавантажених сторін якої є вільною [Тимошенко, 1907].

Незалежно від Тимошенка Рейсснер опублікував розв’язок задачі про прямокутну пластину з двома затисненими краями, а також з одним затисненим і одним вільним краєм під дією стискаючих крайових сил [Reissner, 1909]. Такий варіант навантаження дозволяє досліджувати місцеву стійкість тонкостінного стержня з кутиковим поперечним перерізом.

Стійкість шарнірно опертої по поздовжніх краях нескінченної смуги, стиснутої двома протилежно спрямованими зосередженими силами P, в 1907 році досліджував Зоммерфельд [Sommerfeld, 1907], який отримав точний розв’язок цієї задачі. Пізніше до цієї задачі, що стала в деякому сенсі контрольною, неодноразово поверталися різні автори.

У своєму курсі будівельної механіки корабля І.Г. Бубнов, мабуть, вперше розв’язав задачу про стійкість прямокутної пластини, у якій пара протилежних

Іван Григорович Бубнов *(1872-1919)*
рос. Иван Григорьевич Бубнов

сторін навантажена стискаючими і розтягуючими силами, які лінійно змінюються уздовж цих сторін [Бубнов, 1912]. Цей розв'язок дає можливість розглянути стійкість стінки профільних балок, які згинаються. Там же була розглянута задача про стійкість прямокутної шарнірно опертої пластини під дією зсувних напружень, розподілених рівномірно уздовж контуру пластини.

У 1915 році С.П. Тимошенко знову звернувся до проблеми стійкості пластин, на цей раз він досліджував вплив підкріплення пластини ребрами [Тимошенко, 1915].

У 1924 році Фрідріх Блейх зробив спробу поширити теорію стійкості плоских пластинок на непружні задачі, розглядаючи пластинку як анізотропне тіло і ввівши змінний модуль пружності в головне диференціальне рівняння, на якому ґрунтувався розв'язок, що відповідало пружному випучуванню [B1eich, 1924].

Рош і Ейхінгер [Ros, Elch1nger, 1932], Бейлард [Bij1aard, 1940] і Ільюшин [Ильюшин, 1944]) спробували сформулювати раціональну теорію стійкості пластинок за межею пружності на базі теорії пластичності, але їх результати не дали точного збігу з результатами експериментів. І лише Стоуеллу вдалося, використовуючи загальні співвідношення Ільюшина, розробити раціональну теорію непружного випучування, результати якої, мабуть, добре відповідають лабораторним спостереженням [Stowe11, 1952],

У порівнянні з теорією стійкості стиснутих стержнів задача стійкості пластинок ускладнена тією обставиною, що значення критичного навантаження може відрізнятися від значення граничного навантаження, яку може нести пластинка. На відміну від стержня настання критичного стану пластини не завжди еквівалентно вичерпанню її несучої здатності, оскільки в закритичному стані при переміщеннях, порівнюваних з товщиною пластини, відбувається сприятливий для роботи пластини перерозподіл ланцюгових зусиль. Слід зауважити, що ці ефекти реалізуються не за всяких граничних умов. Як і для стиснутого стержня, для пластини можливі два основних якісно різних випадки закритичної поведінки. Якщо закріплення контуру пластини не перешкоджають її загальній чисто згинальній деформації, тобто можлива деформація без подовжень і зсувів серединної площини (рис. 7, а), то після втрати стійкості поведінка пластини буде такою самою, як і поведінка стержня з незакріпленими відносно поздовжніх переміщень торцями.

Гнучкі плоскі пластини відрізняються від багатьох інших елементів конструктивного комплексу тим, що для них втрата стійкості часто може не ототожнюватися з граничним станом. Можливість використання їх роботи в закритичній стадії різко виділяє пластинчасті елементи з ряду інших, а оцінка допустимого ступеня заходу в закритичну область є важливою науково-технічною проблемою, вирішенню якої присвячено багато досліджень.

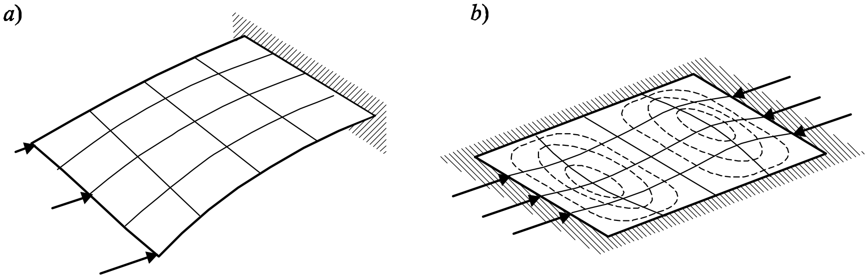


Рис. 3.7. Два випадки закритичної поведінки.

Практична важливість дослідження закритичної роботи пластини, скріпленої по краях із жорсткими ребрами і стиснутій в одному напрямку, привела до необхідності створення спрощеної інженерної методики розрахунку, яка заснована на понятті редукційного коефіцієнта.

Поняття редукційного коефіцієнта, як відношення критичного напруження до напруження в жорстких в'язях, введено І.Г. Бубновим стосовно розрахунку корпусу судна і було розвинене в роботах П.Ф. Папковича, П.А. Соколова, Т. Кармана, К. Маргера і ряду інших дослідників.

Проста наближена формула для редукційного коефіцієнта, що не претендує на врахування всіх обставин закритичної деформації пластинки, отримана в роботі Т. Кармана [Karman et al., 1932], $\eta = \sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_{\mathrm{p}}} = \sqrt{1/n}$, де через $n = \sigma_{\mathrm{p}}/\sigma_{cr}$ позначене відношення напруження в граничному волокні до критичного напруження.

При роботі пластини на зсув втрата стійкості пов'язана з появою гофрування у напрямі головного стискаючого напруження. При цьому волокна пластини, паралельні утвореним складкам, можуть витримувати значні розтяжні зусилля, які передаються на контурні ребра. Таким чином утворюється система похилих розтягуючих зусиль, які врівноважуються реакціями стиску в поперечних ребрах, які виконують роль стійок в фермі. Така модель, запропонована Г. Вагнером [Wagner, 1929], отримала назву діагонально-розтягнутого поля.

3.7. Стійкість оболонок

Перші фундаментальні результати з проблеми стійкості оболонок були отримані на початку XX століття ([Lorenz, 1908, 1911], [Тимошенко, 1914], [Southwell, 1913-1915]) в лінійній постановці на основі статичного критерію Л. Ейлера. У цих роботах використовувалася ідеалізована розрахункова схема. Оболонка вважалася геометрично досконалою і ідеально пружною, з безмоментним початковим станом. Така постановка згодом широко використовувалася і стала класичною. Величина критичного навантаження, отримана в цих роботах, не підтвердилася першими експериментами. Критичні навантаження, що спостерігались в експериментах, як правило, були значно нижче теоретичних. Весь подальший розвиток теорії стійкості оболонок було спрямовано на виявлення причин цієї розбіжності.

Пізніше Доннелл [Donnell, 1934] звернув увагу на важливість урахування нелінійних членів в геометричних співвідношеннях, хоча ідейні питання цієї проблеми були обговорені ще раніше в роботах І.Г. Бубнова, С.П. Тимошенка та Біцено, які стосувалися втрати стійкості стержнів і сферичного купола за рахунок хлопка, а в чудовій статті С.П. Тимошенка [Timoshenko, 1925] про стійкість біметалевих термостатів були введені поняття верхнього та нижнього критичних навантажень, які почали застосовуватися особливо широко після роботи Карамана і Цзяна [Karman, Tsien, 1939]

Важливий результат був отриманий в роботі Кармана і Цзяна [Karman, Tsien, 1941], коли було встановлено, що в закритичній стадії навантаження падає з ростом деформації. Це було досить несподівано і суперечило всім результатам, отриманим при розв’язанні аналогічних задач для стержнів і пластин, де навантаження з ростом деформації безперервно зростало. Різке падіння навантаження після зміни вихідної невзбуреної форми рівноваги свідчить про наявність несуміжних згинних форм рівноваги при малих рівнях навантаження і надзвичайну чутливість оболонки до всякого роду збурень. Величина верхнього критичного навантаження виявилася залежною від виду та міри збурень (головним чином від недосконалості форми серединної поверхні). Нижнє критичне навантаження, що визначає рівень напружень в оболонці, нижче якого не можуть існувати інші рівноважні форми, крім вихідної, почало використовуватися для оцінки стійкості оболонок.

Функцію прогину апроксимували тригонометричним рядом, при цьому утримували малу кількість членів ряду. Стан дещо змінився в зв'язку з залученням до досліджень ЕЦОМ. З'явилася можливість уточнювати розв’язок, збільшуючи число ступенів свободи оболонки. В результаті було виявлено, що нижнє критичне навантаження зменшується зі збільшенням числа членів, утримуваних в розкладанні шуканих функцій. Більш того, в деяких роботах отримані від’ємні значення нижнього критичного навантаження. Це, а також деякі експериментальні роботи змінили точку зору на нижнє критичне навантаження як на характеристику стійкості оболонок.

Теорія стійкості на тому етапі в основному розвивалася вшир за рахунок дослідження різних класів оболонок і різних видів навантажень. Одним з основних напрямків досліджень стало детальне вивчення особливостей поведінки оболонок під навантаженням. Характерним результатом цього напрямку робіт став опис поведінки сферичних куполів [Bushnell, 1981], в залежності від параметра положистості $\gamma = 2\left(3\left(1-\nu^2\right)^{1/4} H/t\right)^{1/2}$, де H – стріла підйому, t – товщина оболонки).

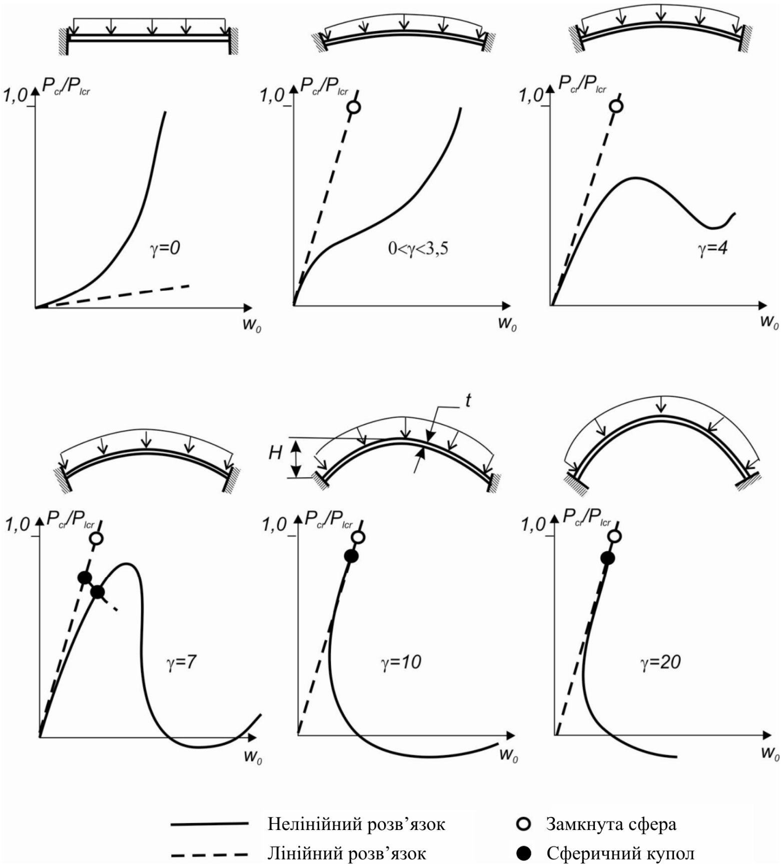


Рис. 3.8. Вплив параметру положистості

При $\gamma = 0$ (плоска кругла пластинка) крива «навантаження – прогин» характеризується безперервно зростаючою жорсткістю, пов'язаною з появою розтягування в центрі пластинки. При $\gamma \leq 3{,}5$ крива «навантаження – прогин» ніде не має горизонтальної дотичної і втрата стійкості не реалізується. При $\gamma \leq 6$ виявляється можливим хлопок у граничній точці, але біфуркаційної втрати стійкості не виникає. При $\gamma > 6$ з'являється біфуркаційних перехід до несиметричної форми втрати стійкості, що виникає раніше симетричного хлопка в граничній точці, а при $\gamma > 7$ біфуркація настає раніше не тільки симетричного хлопка, а й класичного критичного навантаження замкнутої сфери.

Великий інтерес викликав напрямок, пов'язаний з дослідженнями впливу початкових недосконалостей оболонки на величину верхнього критичного навантаження. Вперше про вплив початкових недосконалостей форми оболонки йшлося в роботі Флюгге [Flügge, 1932], в якій дано пояснення фізичної сутності явища і постановка лінійної задачі. У лінійні рівняння стійкості були введені додаткові члени, що характеризують зміну кривизни за рахунок початкового прогину.

У 1945 р. Койтер [Koiter, 1945] детально дослідив поведінку різних пружних систем поблизу точки біфуркації. Для найпростішої осесиметричної форми початкового прогину з довжиною хвилі, що дорівнює довжині хвилі при втраті стійкості досконалої оболонки, була отримана залежність для критичних напружень згідно з якою навіть невелика осесиметрична неправильність призводить до значного зниження критичного зусилля. У 1950 р. Доннелл і Ван [Donnell, Wan, 1950] сформулювали остаточно метод урахування недосконалостей оболонки, який згодом широко застосовувався. Відповідно до цього методу всі початкові недосконалості (геометричні, фізичні та ін.) враховуються введенням деякого еквівалентного початкового прогину, подібного до прогину втрати стійкості.

Метод початкових недосконалостей якісно вловлює явища, які спостерігаються в експерименті, і в принципі дозволяє шляхом підбору відповідної амплітуди початкового прогину отримати експериментальне критичне навантаження. Однак у виборі амплітуди початкового прогину є відома невизначеність, оскільки величина і форма початкових недосконалостей носять випадковий характер. Для використання такого підходу на практиці необхідний статистичний аналіз результатів експериментів з вивчення початкових недосконалостей.

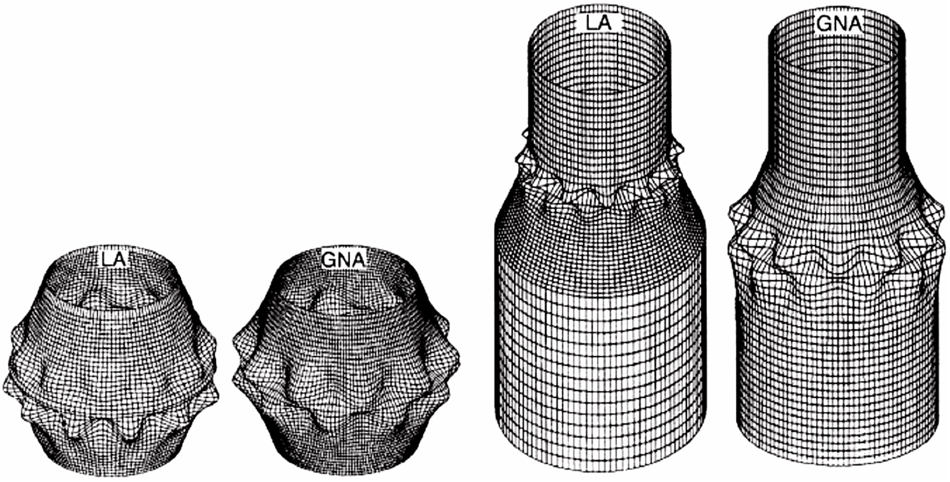
Мабуть, вперше така постановка задачі була чітко сформульована в роботі В.В. Болотіна [Болотин, 1958], де статистична теорія стійкості оболонок ґрунтувалася на припущенні, що відомою є спільна щільність ймовірностей випадкових параметрів задачі (в тому числі і тих, які описують початкові недосконалості). Майже одночасно з цією публікацією з'явилася робота І.І. Воровича [Ворович, 1959], яка, на відміну від підходу Болотіна, ґрунтувалася на теорії марковських процесів та припущенні, що узагальнені координати задачі мають марковські властивості. Надалі такий підхід розвивався в роботах В.М. Гончаренка [Гончаренко, 1962] і М.Ф. Діментберга [Диментберг, 1962].

Що стосується аналізу впливу початкових недосконалостей, то тут першу спробу реалізації методології Болотіна здійснив його аспірант Б.П. Макаров, який за експериментальними даними про розподіл критичних навантажень відшукував закон розподілу параметрів, що характеризують початкові недосконалості [Макаров, 1962]. Методологія Болотіна також використовувалася і уточнювалася в роботах Томпсона [Thompson, 1967] і Роорди [Roorda, 1971]. Пізніше імовірнісний аналіз оболонок, чутливих до малих випадкових дефектів, інтенсивно розвивався в роботах Дельфтського технологічного університету [Elishakoff, 1979], [Elishakoff, Arbocz, 1982].

Йохан Арбоч
англ. Johann Arbocz

Протягом останніх десятиліть переважно проводились чисельні дослідженнями стійкості оболонок за допомогою методу скінченних елементів. Ці роботи характеризуються спробами все більш «реалістичного» моделювання поведінки конструкції під навантаженням, в тому числі і детального нелінійного аналізу. При цьому іноді виявляється принципова відмінність лінійної та нелінійної поведінки оболонок.

Рисунок 3.9, запозичений у [Schmidt, Swadro, 1997], ілюструє це. Для подвійного конуса (рис. 9, *а*) нелінійне навантаження випучування становить тільки 40% лінійного, хоча картини деформування виглядають досить подібними. Для системи циліндр-конус-циліндр (рис. 9, *б*) відповідне відношення становить 65%, в цьому випадку істотно відрізняються і форми втрати стійкості.



а *б*

Рис. 3.9. Співставлення результатів лінійного (LA) і нелінійного (GNA) розрахунків.

3.8. Стійкість багатоелементних пружних систем

Стержень (в тому числі і тонкостінний) або пластина найчастіше є частиною більш складної конструктивної системи. Тому такі питання, як поведінка стиснутого стержня, що є частиною ферми, або стійкість всієї системи жорсткої рами для інженера-будівельника є найважливішими. Жорсткі з'єднання елементів стержневої системи є причиною того, що згин одного елемента в стані випучування викликає деформацію інших елементів конструкції. Кожен елемент пов'язаний пружним затисненням з іншими, і ступінь затиснення якого-небудь одного елемента залежить від згинної жорсткості і осьового навантаження всіх інших. Звідси ясно, що для отримання справжньої умови випучування всієї системи або для задовільного аналізу реальної поведінки стиснутого елемента або деякої групи таких елементів, що входять в стержневу систему, необхідно дослідження її стійкості.

Аналогічні зауваження можна було б привести і щодо багатоелементних систем, до складу яких входять не тільки стержні, а й пластини або оболонки. Але у всіх випадках тут і далі ми будемо говорити про системи, що складаються з заздалегідь вивчених окремих елементів, незалежно від того, чи є вони стержнями деякого стержневого каркаса, або системою скінченних елементів, якими представлена нестержнева частина конструкції.

Стержневі системи

Найпростішою системою, більш складною, ніж окремий стержень, є прямий стержень з проміжними жорсткими або пружними опорами. Задача про випучування такої системи вперше була досліджена Енгессером, який встановив наближену формулу для будь-якого заданого значення жорсткості пружних опор [Engesser, 1884]. Енгессер вважав стискаючу силу постійною по довжині, а ефект пружного обпирання в дискретних точках замінив дією безперервної пружної основи. Згодом Ясинський аналогічним способом розглянув випадок змінного по довжині стержня навантаження [Jasinski, 1894].

Задача розрахунку стійкості стержневої системи була розглянута Циммерманном [Zimmermann, 1909, 1910], який розглянув стійкість стиснутого багатопрогонового стержня з жорсткими або пружними опорами. Він отримав розв’язок цієї задачі в формі детермінанта. Аналогічний розв’язок був знайдений Мюллером-Бреслау [Müller-Breslau, 1908], який досліджував стійкість верхнього пояса відкритого моста. Розв’язок цієї задачі був раніше знайдений Ф.С. Ясинським, але за допомогою наближеного подання розрахункової схеми як балки на пружній основі, тобто шляхом «розмазування» пружного опору поперечних рам. Однак використані в цих роботах методи орієнтувалися на прямий багатопрогоновий стержень і не мали необхідної універсальності.

Важливий результат був отриманий в 1912 році І.Г. Бубновим [Бубнов, 1913], який уважно проаналізував задачу про стійкість нерозрізного стержня на пружних опорах і встановив, що починаючи з деякого значення збільшення жорсткості опор не позначається на величині критичного навантаження. При цьому пружні опори стають рівнозначними абсолютно жорстким. Тоді ж була сформульована і вирішена задача про стійкість системи паралельних стержнів, стиснутих однаковими силами і підкріпленими в прольоті перехресно розташованими пружними стержнями. Ця задача, що отримала назву задачі Бубнова (Bubnov problem) дала поштовх багатьом іншим дослідженням. Вирішуючи задачу про нерозрізний стержень, І.Г. Бубнов в якості основних невідомих використовував реакції пружних опор, мабуть вперше застосувавши таким чином в дослідженні стійкості метод сил.

У 1919 році Фрідріх Блейх опублікував систематичне дослідження стійкості плоских стержневих систем з жорсткими вузлами, проведене стосовно загального розв’язку задачі для всіх типів рамних конструкцій [Bleich, 1919].

Міркування Блейха зводилося до того, що якщо поряд з досліджуваним станом рівноваги розглянути деякий близький до нього новий стан, то зовнішнє навантаження і осьові сили в елементах, що знаходяться в рівновазі безпосередньо перед переходом від стійкого до нестійкого становища, більше не утворюють врівноважену групу сил, так як зовнішні сили за рахунок деформації всієї системи змінюють своє положення (але не напрямок). Тому в системі утворюються додаткові внутрішні зусилля, а співвідношення між цими додатковими силами і моментами і переміщеннями вузлів утворюють основні рівняння, з яких витікають умови стійкості. Фізичний зміст цих рівнянь полягає в умовах сумісності деформацій.

Невідомими в цих рівняннях є додаткові поздовжні сили і кінцеві моменти в стержнях, переміщення вузлів і перекоси стержнів, а коефіцієнти при цих невідомих є функціями розмірів конструкції і осьових сил *P*, обумовлених навантаженнями, що діють на конструкції. Метод ґрунтується на ідеї встановлення системи лінійних співвідношень між моментами у вузлах і кутами повороту стержнів. Цих двох груп параметрів достатньо, щоб єдиним чином описати будь-яку форму нестійкого стану рами.

Перша група рівнянь стійкості, виражає умову неперервності у вузлі, де з'єднуються два або більше елементів. Якщо розглядається вузол, в який входить *n* стержнів, то по черзі розглядається $n-1$ пара стержнів (рис. 3.10), для кожної з яких виконується умова $\varphi_i + \alpha_i = \varphi_j + \alpha_j$.

Використовуючи залежність між кутами повороту, моментами на кінцях стержня і поздовжньою силою, цим рівнянням, наприклад, для пари 1-2 можна надати такий вигляд

$$M_1^s \frac{l_1 s_1}{I_1} + M_1^s \frac{l_1 s_1}{I_1} + M_1^k \frac{l_1 c_1}{I_1} + M_2^k \frac{l_2 c_2}{I_2} + M_2^r \frac{l_2 s_2}{I_2} - E\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) = 0\,, \tag{3.20}$$

де $s_i = \frac{1}{\nu_i^2}\left(\frac{\nu_i}{\sin\nu_i} - 1\right), \quad c_i = \frac{1}{\nu_i^2}\left(1 - \nu_i \mathrm{ctg}\nu_i\right), \quad \nu_i = \sqrt{\frac{P_i}{EI_i}}.$

Представляючи раму як набір *m* замкнутих контурів, Ф. Блейх записує умову збереження замкнутості кожного контуру

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i\in j} \frac{P_i l_i}{EA_i} \cos\gamma_i + \sum_{i\in j} \alpha_i l_i \sin\gamma_i = 0 \\ \sum_{i\in j} \frac{P_i l_i}{EA_i} \sin\gamma_i + \sum_{i\in j} \alpha_i l_i \cos\gamma_i = 0 \end{aligned}\right\} \quad j = 1,\ldots,m, \tag{3.21}$$

де γ_i — кут нахилу *i*–го стержня до горизонту.

Нарешті, для кожного стержня можна записати рівняння рівноваги, що зв'язує момент на початку $M_{\text{л}}$, момент на кінці $M_{\text{п}}$ і поперечну силу *Q*

$$M_{i,\text{н}} = M_{i,\text{к}} + \left(Q_j \cos\gamma_i + H_j \sin\gamma\right) l_i\ . \tag{3.22}$$

Тут $Q_{j,} H_j \quad \left(j = 1,\ldots,m\right)$ – поперечна і поздовжня сили в перерізі контуру.

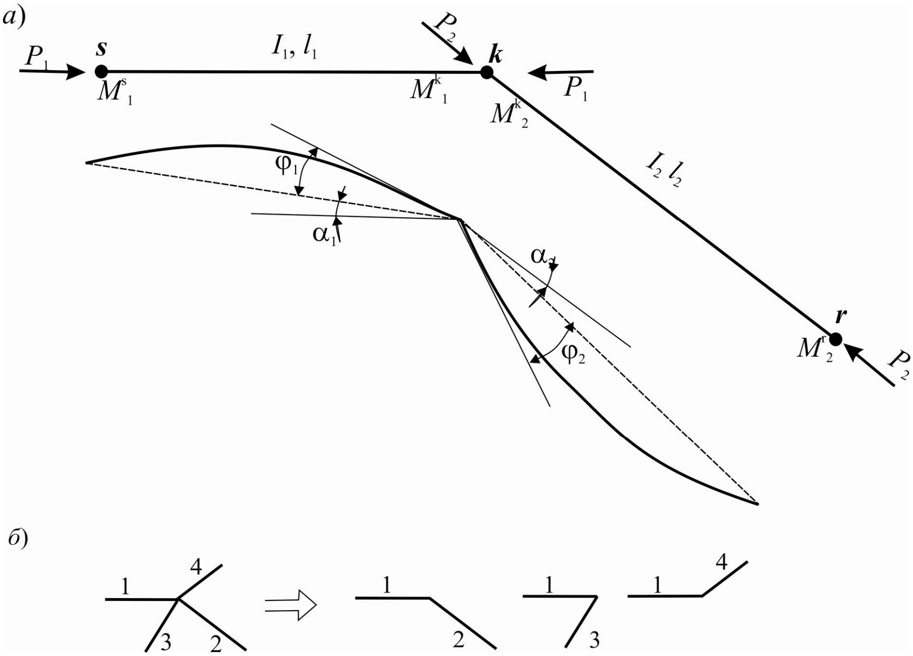


Рис. 3.10. До виведення рівнянь стійкості

Система рівнянь (3.20), (3.21), (3.22) відносно невідомих M_i, α_i, Q_j, H_j є однорідною, оскільки зовнішні сили не змінюються. В силу однорідності і лінійності рівнянь стійкості вони задовольняються нульовими значеннями переміщень вузлів, а ненульова форма відхилення можлива лише в разі, коли детермінант згаданої системи Δ дорівнює нулю. Детермінант Δ є функцією навантаження, яке може бути охарактеризоване параметром інтенсивності λ, який є невідомою величиною в умовах стійкості $\Delta = 0$.

Завдяки введенню поняття приведеного модуля виявилося можливим застосувати теорію в пружною і пластичної областях випучування. У роботі 1926 року [Bleich F., Bleich H., 1926] Ф. Блейх і Г. Блейх поширили цей же підхід на задачу стійкості просторових стержневих систем.

Питання про загальну стійкість шарнірних стержневих систем, випучування яких реалізується при прямих стержнях, в загальному вигляді була розглянута Мізесом і Ратцерсдорфером [Von Mises, Ratzersdorfer, 1923]. В іншій роботі Мізес і Ратцерсдорфер [Von Mises, Ratzersdorfer, 1925] надали детальне викладення задачі про стержневі системи з жорсткими вузлами, поширюючи дослідження також на системи, в яких зміна довжин елементів, що обумовлена осьовими силами, впливає на умову стійкості. Математично це дослідження ідентично роботі [Von Mises, Ratzersdorfer, 1923] і відрізняється від останньої лише вибором типу основних моментних співвідношень, на яких воно базується.

Розв’язок Мізеса і Ратцерсдорфера для ферм було суттєво покращено Я.Л. Нудельманом в 1942 році [Нудельман, 1942]. Він зауважив, що якщо розкласти вузлове навантаження на складові, орієнтовані уздовж стержнів, то в збуреному стані рівноваги дві сили, що діють по кінцях будь-якого стержня, утворюють пару, момент якої пропорційний куту повороту стержня. Рівняння рівноваги цих моментів є однорідними, а прирівнюючи їх визначник нулю, можна знайти критичне навантаження.

Роботи [Bleich, 1919], [Bleich F., Bleich H., 1926] ґрунтувалися на тому, що рівняння стійкості складається стосовно даної задачі виходячи з її особливостей. Але в 1936 р В. Праґер розробив метод дослідження стійкості стержневих систем, відштовхуючись від аналітичного умови стійкості стиснутого стержня з вузлами, які пружно обертаються і переміщуються [Prager, 1936]. Ця робота була прямим попередником ідеї застосування методу переміщень до задачі стійкості стержневих систем - ідеї, яка була запропонована в 1937 році одночасно і незалежно А.А. Білоусом [Білоус, 1937], Н.В. Корноуховим [Корноухов, 1937] і С.Д. Лейтесом [Лейтес, 1937], і яку незалежно від них у 1941 році використовували Хвалла і Йокіш [Chwa11a, Jokisch, 1941]. Мабуть, ідея літала в повітрі, і сенс її полягав в тому, що коефіцієнти канонічних рівнянь методу переміщень обчислювалися за формулами, які відображали залежність реакцій від значення поздовжньої сили в розглядуваному стержні.

Менш ефективним виявилося використання підходу, що ґрунтується на методі сил і який було запропоновано в роботах В.Г. Чудновського [Чудновский, 1952] і С.Д. Лейтеса [Лейтес, 1949].

Для методу переміщень, зокрема, матриця жорсткості стиснутого стержня

$$\boldsymbol{R}(\nu)=\left\|\begin{bmatrix} \frac{EI}{l^3}\gamma(\nu) & \frac{EI}{l^2}\delta(\nu) & -\frac{EI}{l^3}\gamma(\nu) & \frac{EI}{l^2}\delta(\nu) \\ \frac{EI}{l^2}\delta(\nu) & \frac{EI}{l}\alpha(\nu) & -\frac{EI}{l^2}\delta(\nu) & \frac{EI}{l}\beta(\nu) \\ -\frac{EI}{l^3}\gamma(\nu) & -\frac{EI}{l^2}\delta(\nu) & \frac{EI}{l^3}\gamma(\nu) & -\frac{EI}{l^2}\delta(\nu) \\ \frac{EI}{l^2}\delta(\nu) & \frac{EI}{l}\beta(\nu) & -\frac{EI}{l^2}\delta(\nu) & \frac{EI}{l}\alpha(\nu) \end{bmatrix}\right\| \tag{3.23}$$

залежить від безрозмірного параметра стиснення

$$\nu^2=\frac{Nl^2}{EI\left(1-\frac{N}{GF}\right)} \tag{3.24}$$

через функції М.В. Корноухова

$$\alpha=\frac{c\nu^2\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}}{2\left(2\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}-c\nu\right)}+\frac{\nu}{2\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}},\quad \beta=\frac{c\nu^2\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}}{2\left(2\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}-c\nu\right)}-\frac{\nu}{2\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}},\quad \gamma=\frac{c^2\nu^3}{2\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}-c\nu},\quad \delta=\frac{c\nu^2\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}-c\nu}. \quad (3.25)$$

В рамках методу переміщень сама стержнева система розглядається як сукупність її вузлів, з'єднаних між собою пружними стержнями. При цьому всі ступені свободи виявляються сконцентрованими саме у вузлах і система канонічних рівнянь методу переміщень має вигляд

$$\boldsymbol{R}_0(\nu)\boldsymbol{Z}=0\,. \quad (3.26)$$

Умова існування ненульового розв’язку цієї системи рівнянь, яка формулюється відомою алгебраїчною вимогою

$$\det\left[\boldsymbol{R}_0(\nu)\right]=0 \quad (3.27)$$

власне і є аналітичним критерієм настання критичного стану системи.

3.9. Пошук критичного навантаження

Всі згадані підходи ґрунтувалися на тому, що критичне значення навантаження визначається з умови рівності нулю детермінанта системи розв’язних рівнянь, і найменшому кореню детермінантного рівняння відповідає форма втрати стійкості. Таким чином, з точки зору математики задача про стійкість рівноваги звелася до задачі на власні значення.

Пошуку зручного способу розв’язання цієї математичної задачі були присвячені численні дослідження, навіть у тих випадках, коли автори використовували «чисто механічні» міркування. При цьому дуже корисною виявилася добре розроблена теорія лінійних однорідних диференціальних рівнянь, які відіграють вирішальну роль в теорії малих коливань. Між теорією малих коливань і теорією пружної стійкості є повна аналогія, яка пояснюється наявністю загальної математичної основи для обох задач.

Подальші дослідження можна уявити собі у вигляді двох паралельних потоків. В рамках першого напряму розвивалися способи знаходження власних значень (критичних сил), у другому напрямку розглядалися, так звані якісні методи, які не потребують визначення критичних сил, але для кожного рівня навантаження дозволяють оцінити якість рівноваги (стійка або нестійка).

Розглядаючи різні методи розв'язання задач стійкості, можна чітко побачити три істотно різних підходи:

- Прямий аналітичний розгляд питання шляхом складання і розв’язання системи лінійних однорідних рівнянь, що зв'язують осьові сили, переміщення і обертання жорстких вузлів і моменти, що діють в них. Критерій стійкості виражається рівністю нулю деякого детермінанта.

- Енергетичний метод, заснований на енергетичному критерії стійкості, також призводить до системи лінійних рівнянь. Критерій стійкості знову набуває вигляду рівності нулю відповідного детермінанта.
- Якісний метод, заснований на оцінці розташування пробного значення параметра інтенсивності навантаження в спектрі критичних сил досліджуваної системи.

Особливо популярними були два останніх підходи. С.П. Тимошенко перетворив енергетичний метод в потужний засіб для дослідження різноманітних дуже складних задач про випучування. Приблизно в той же час В.Рітц [Ritz, 1909] опублікував класичну статтю, в якій на широкій математичній основі розробив загальний метод для безпосереднього розв’язання задач про мінімуми в математичній фізиці. Він застосував цей метод до дослідження рівноваги і коливань прямокутних пластинок, затиснених по чотирьох краях. Використання обох методів Рітца і Тимошенко при розв’язанні задач стійкості призводить, по суті, до одних і тих самих математичних перетворень і до однакових за математичною формою результатів.

Скільки-небудь істотних змін в розв’язання цієї задачі не вносилося аж до 1935 р., коли Треффц на додаток до методу Рітца розробив спосіб для визначення нижньої границі критичної сили [Trefftz, 1930]. Метод Рітца в його первісній формі дає наближені значення критичної сили більші, ніж точне значення, і, таким чином, визначає верхню межу критичної сили. Отже, метод Треффца дає можливість обмежити розв’язання задачі верхньою і нижньою границями, що дуже важливо при оцінці точності розв’язку.

Що стосується визначення інтенсивності навантаження, при якому обертається на нуль детермінант системи розв’язувальних рівнянь, то виявилося, що ця проблема зводиться до задачі на власні значення. А для визначення власних значень використовувалися випливаючі з механічного сенсу задачі методи А.М. Крилова [Крилов, 1931], П.Ф. Папковича [Папкович, 1933], С.А. Бернштейна [Бернштейн, 1940] та інші. У багатьох випадках ефективними були ітераційні методи Мізеса і Поллачека-Гайрінгера [Von Mises, Pollaczek-Geiringer, 1929], Лунквіста [Lundquist, 1939] та ін.

3.9.1. Якісні методи

Засновником якісного підходу до проблеми стійкості, мабуть, можна вважати А. Пуанкаре, який запропонував при дії заданого навантаження розрізняти якість рівноваги (стійка, нестійка) за знаками коефіцієнтів в канонічному поданні (3.2) для потенціальної енергії системи. Але цей підхід був точним тільки для систем зі скінченною кількістю ступенів вільності. Обґрунтування його перенесення на стержневі системи, що мають, взагалі кажучи, нескінченне число ступенів вільності, потребувало додаткових зусиль.

Використання методу переміщень (так само як і інших методів будівельної механіки) створювало ілюзію переходу до системи зі скінченним числом ступенів свободи, оскільки розглядалося скінченне число невідомих переміщень або сил. А континуальна частина задачі виявлялася захованою в системі уточнюючих функцій типу (3.25), які використовуються для обчислення коефіцієнтів в матриці жорсткості або матриці податливості. Необхідно було ретельно вивчити записані в різних формах вирази потенціальної енергії системи, властивості коефіцієнтів, за допомогою яких ці вирази будуються, властивості власних чисел і власних векторів матриці жорсткості і матриці податливості.

Анатолій Пилипович Смирнов *(1909—1986)*
рос. Анатолий Филиппович Смирнов

Однією з перших робіт такого роду була згадана вище робота П.Ф. Папковича [Папкович, 1941], багато питань були вирішені А.Ф. Смирновим, в роботі якого [Смирнов, 1947], мабуть, вперше якісний аналіз був представлений в прямій формі. Цей метод практично отримав права громадянства, коли було вказано на те, що приведення квадратичної функції потенціальної енергії до суми квадратів (3.2) не є обов'язковою процедурою, а в якості коефіцієнтів стійкості замість a_i можна використовувати діагональні елементи матриці канонічних рівнянь, приведеної до верхньотрикутного вигляду.

Особливо чітко проблема переходу від аналізу континуальної системи до аналізу скінченновимірної матриці жорсткості або матриці податливості була розібрана в книзі Я.Л. Нудельмана [Нудельман, 1949], яка вийшла в 1949 році.

У цій роботі в загальному вигляді виконано дослідження виразу для енергії стержневої системи і показано, що цей вираз можна представити у формі суми двох доданків, перший з яких відноситься до системи зі скінченним числом ступенів свободи, а другий – до системи, отриманої із заданої при накладенні заборони на ті переміщення, через які виражена енергія першої системи. Виявилося, що якщо друга система (основна система) є стійкою, то для оцінки якості рівноваги можна використовувати тільки коефіцієнти стійкості системи зі скінченним числом ступенів свободи.

Яків Львович Нудельман *(1907 - 1998)*

Якщо ж гарантувати стійкість основної системи було неможливо (наприклад при завданні пробного значення параметра навантаження ν, що перевищує критичну величину), то, як з'ясувалося, при використанні цього детермінантного критерію (3.27) можливий пропуск критичного значення ν_{cr} параметра навантаження. Справа в тому, що детермінантний критерій за своїм змістом відстежує тільки такі форми втрати стійкості рівноваги, при яких вектор переміщень **Z** відрізняється від нульового вектора. Але може трапитися, що серед форм втрати стійкості основної системи (підкреслимо, що не вихідної, а саме основної!) знайдуться такі форми, які не породжують зусиль у всіх введених в'язях – ці зусилля виявляються просто рівними нулю. Це означає, що такі форми притаманні одночасно як заданій системі, так і основній системі методу переміщень. І тоді детермінантний критерій не зможе відловити ці, так звані, приховані форми [Ляхович, 2004]. Відповідна основна система методу переміщень називається помилковою [Смирнов, 1947]. Помилки, пов'язаної з використанням такої основної системи, можна уникнути, якщо разом з рядом стійкості розглядати ейлерові критичні сили окремих стержнів основної системи, які утворюють додатковий ряд стійкості.

Треба сказати також, що поняття хибних основних систем, а також прихованих і явних форм втрати стійкості, не є прерогативою єдино методу переміщень. І в методі сил, і в змішаному методі цілком можлива ситуація, аналогічна за своїм змістом хибній основній системі методу переміщень [Динкевич, 1977].

На існування прихованих форм в разі використання методу сил, мабуть, вперше звернув увагу С.П. Тимошенко, який, розглядаючи задачу про стійкість багатопрогонового стержня, вказав [Тимошенко, 1905-06]:

> *«Отримана таким чином система рівнянь може дати для опорних моментів розв'язки, відмінні від нуля, лише в тому випадку, якщо визначник цієї системи обертається на нуль. Рівність нулю визначника і дасть нам потрібне рівняння для знаходження критичного навантаження. ... Рівність нулю всіх опорних моментів відповідає або прямій формі рівноваги стержня, або тому випадку, коли всі прольоти при викривленні згинаються незалежно один від одного, тобто коли стискаюче зусилля в кожному прольоті дорівнює критичній силі для цього прольоту».*

Інший корисний результат, який випливає з якісного аналізу, пов'язаний з тим, що часто «винуватцем» втрати стійкості всієї конструкції є один елемент або невелика група елементів. У зв'язку з цим ще в сорокових роках в роботах М.В. Корноухова [Корноухов, 1949] і А.Ф. Смирнова [Смирнов, 1947] були введені поняття про стани обмеженої і вимушеної втрати стійкості окремих частин конструкції, в якій відбувається загальна втрата стійкості. Але лише зовсім недавно практично одночасно і незалежно в роботах А.В. Перельмутера і В.І. Слівкера [Perelmuter, Slivker, 2001] і О.В. Александрова [Александров, 2001] було вказано критерій визначення виду біфуркації стержня (обмеженої або вимушеної) або будь-якої частини конструкції.

3.9.2. Чисельні методи в задачах стійкості

Поява ефективних чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів, викликало прорив в чисельних дослідженнях проблем стійкості. З одного боку, були розроблені скінченно-елементні формулювання теорій конструктивних елементів, а з іншого - запропоновані ефективні алгоритми чисельного дослідження стійкості несучих конструкцій.

Точки нестійкості в рамках МСЕ найчастіше визначаються з розв’язку лінеаризованої проблеми власних значень при повному нехтуванні деформаціями і напруженнями в докритичному стані. Для врахування існуючих напружень, як правило, виконується розв’язання тієї ж лінеаризованої задачі, але при напружено-деформованому стані конструкції, визначеному в результаті лінійного розрахунку. Методи такого роду включені в багато скінченно-елементних програми з функціями аналізу стійкості.

Для конструкцій, що працюють нелінійно, необхідне врахування всієї попередньої нелінійної історії навантаження. Це стало можливим після появи досить точних методів нелінійного деформаційного аналізу, наприклад таких, як кроково-ітераційні методи продовження по довжині дуги кривої рівноважних станів.

Інженерний підхід до визначення критичних точок нелінійних задач полягає в доповненні кроково-ітераційних методів розв'язання так званими «супроводжуючими діями», спрямованими на дослідження стійкості поведінки конструкції [Brendel, 1979]. Наприклад, відстежується значення визначника матриці жорсткості, або число його негативних діагональних елементів [Krdtzig, Qian, 1991], [Wagner, 1991]. Поблизу критичної точки може виконуватися розв’язання проблеми власних значень. Однак всі ці алгоритми не дозволяють отримати точне значення критичної точки. Як правило, при переході через критичну точку для уточнення розв’язку залучається так званий «метод бісекції», заснований на лінійній інтерполяції дотичних матриць сусідніх конфігурацій. Одна з модифікацій даного методу описана в роботі [Belytscko et al., 2000].

Метод скінченних елементів в поєднанні з кроково-ітераційними алгоритмами використовується і для визначення закритичної поведінки конструкції. Для цього необхідно не тільки точно обчислити критичні точки, а й визначити їх тип, який відповідає класифікації Койтера [Koiter, 1967]: гранична точка, несиметрична точка розгалуження, симетрична стійка і симетрична нестійка точки розгалуження. В рамках скінченно-елементного підходу для класифікації сингулярних точок автори спираються, як правило, на супроводжуючі операції [Wagner, Wriggers, 1988].

Для дослідження поведінки конструкції після настання критичного стану розроблені надійні методи продовження розв’язку для випадків переходу через граничну точку. А продовження розв’язку в точках біфуркації являє істотні обчислювальні труднощі. Тут для дослідження переходу на вторинну траєкторію використовується збурення стану рівноваги, коли в околиці точки розгалуження нелінійного рівняння воно замінюється певною кількістю членів розкладання в ряд Тейлора [Гуляев и др., 1982], [Eckstein, 1983].

Література

Александров А.В. Роль отдельных элементов стержневой системы при потере устойчивости // Вестник МИИТ. 2001, Выпуск 5. — С. 46-51.

Белоус А.А. Устойчивость овальных и рамных шпангоутов // Труды ЦАГИ, вып 334 —М.: 1937.

Болотин В.В. Статистические методы в нелинейной теории упругих оболочек // Известия АН СССР. ОТН. №3 — С. 33-41.

Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961.

Ворович И.И. Статистический метод в теории устойчивости оболочек // Прикладная математика и механика, 1959, Т. 23, №5 С. 885-892.

Броуде Б.М. Свойства граничных поверхностей в линейных и нелинейных задачах с собственными значениями. // Строительная механика и расчст сооружений, 1964, №5. — С. 5-9.

Бубнов И.Г. Строительная механика корабля. Часть 1 — СПб.: Издание морского министерства, 1913 — 330 с.

Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем — М.: Стройиздат, 1949.

Гончаренко В.М. Применение марковских процессов в статистической теории устойчивости оболочек // Украинский математический журнал, 1962, №2 — С. 198-202.

Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. Устойчивость нелинейных механических систем — Львов: Вища школа, 1982 — 255 с.

Диментберг М.Ф. Нелинейные колебания упругих панелей при случайных нагрузках // Известия *АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, №5 — С. 102-110.*

Динкевич С.З. Расчет циклических конструкций. Спектральный метод. — М.: Стройиздат, 1977 — 128 с.

Динник А.Н. Устойчивость арок — М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1946 — 128 с

Зубчанинов В. Г. Об упругопластической устойчивости пластин // Инженерный журнал. АН СССР. 1965. Т. 5, № 2. —С. 299-305.

Ильюшин А.А. Упруго-пластическая устойчивость пластин // Прикл. матем. и механ., 1944, т. 9, № 5.

Ильюшин А.А. Об упругопластической устойчивости конструкции, включающей стержневые элементы // Инженерный сборник. Ин-т механики АН СССР 1960.1982 Т. 27. — С. 87-91.

Клюшников В.Д. Бифуркация процесса деформирования и концепция продолжающегося нагружения // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 5. — С. 16-20.

Клюшников В.Д. Неустойчивость пластических конструкций // Проблемы теории пластичности. — М. 1976. — С. 127-132.

Клюшников В.Д. Устойчивость упругопластических систем. — М.: Наука, 1980. — 240 с.

Койтер В.Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика. Периодический сборник переводов иностранной литературы. Вып. 5 — М.: ИЛ, 1980.— С. 99-110.

Корноухов Н.В. Точный метод проверки устойчивости плоских рам // Вестник инженеров и техников, 1937, №3

Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем —М.: Стройиздат, 1949 — 378 с.

Корноухов Н.В., Варвак П.М.. Раковицан П.М., Стрельбицкая А.И., Чудновский В.Г. Исследование устойчивости пространственного каркаса по типу высотной части Дворца Советов СССР — К.: Изд-во АН УССР, 1938 — 243 с.

Коробов А.П. Устойчивость плоской формы изгиба полосы // Известия Киевского политехнического института. Отдел инженерной механики, кн. 4, 1911 — С. 247—264.

Лейтес С.Д. Общий метод определения эйлеровой критической силы для сжатых стержней рамных конструкций // Проект и стандарт, 1937, №8-9.

Лейтес С.Д. О применении методы сил к исследованию устойчивости статически неопределимых систем // Исследования по теории сооружений, вып. 4 — М.: Стройиздат, 1949 — С. 29-39.

Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения: [Докт. дис.]. – Харьков: 1892. — 250 с. [Переиздание: Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — Л.-М.: ОГИЗ, 1935 — 278 с].

Ляхович Л.С. Разделение критических сил и собственных частот упругих систем. — Томск: Изд-во Томского ГАСУ, 2004. — 140 с.

Макаров Б.П. Применение статистических методов для анализа экспериментальных данных об устойчивости оболочек // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, №1 — С.127-138

Моисеев Н.Д. Очерки развития теории устойчивости – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949 – 663 с.

Николаи Е.Л. Об устойчивости кругового кольца и круговой арки // Известия Петроградского политехнического института — Петроград: Военная типография, 1918 — С. 323-364

Николаи Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня. — Известия Ленингр. политехн. ин-та, 31, 1928.

Николаи Е.Л. К вопросу об устойчивости скрученного стержня. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня. — Вестник прикл. матем. мех. 1, 1929.

Нудельман Я.Л. К теории устойчивости идеальных ферм // Прикладная математика и механика, 1942, т.6, вып. 1

Нудельман Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем —М.:ГИТТЛ, 1949 — 176 с.

Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Ч.2. Сложный изгиб и устойчивость стержней, изгиб и устойчивость пластин — Л.: Изд-во судостроительной промышленности, 1941 — 960 с.

Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.— М.: Мир, 1980.— 608 с.

Работнов Ю.Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инженерный сборник. 1952. Т. XI. — С. 123-126.

Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. – 476 с.

Ржаницын А.Р. О некоторых свойствах галузи устойчивости состояния равновесия. // Строительная механика и расчет сооружений, 1964, №1.— С. 1-8

Смирнов А.Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. — М.: Трансжелдориздат, 1947 — 308 с.

Тимошенко С.П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости // Известия СПб Политехнического института, т. IV, вып. 3-4, 1905 — С. 151-219; т. V, вып. 1-2, 1906 — С. 3-34; т. V, вып. 3-4, 1906 — С. 263-292.

Тимошенко С.П. К вопросу об устойчивости сжатых пластинок // Известия Киевского политехнического института. Год 7, книга 2, 1907 — С.35-94.

Тимошенко С.П. О продольном изгибе стержней в упругой среде // Известия С.Петербургского политехнического института, Том 7, 1907— С. 145-157.

Тимошенко С. П. К вопросу о продольном изгибе // Известия Киевского политехиического института, Отдел инженерной механики, Книга 2, 1908— С. 181-212.

Тимошенко С.П. Об устойчивости упругих систем. Применение новой методы к исследованию устойчивости некоторых мостовых конструкций. // Изв. Киевского политехнического института. Отдел инженерной механики, кн. 4, 1910 — С. 375-560.

Тимошенко С.П. К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки // Вестн. о-ва технологов, 1914, т. 21 — С. 785—792

Тимошенко С.П. Об устойчивости пластинок, подкрепленных упругими ребрами СПб.: Издание Института путей сообщения, 1915

Хилл Р. Общая теория единственности и устойчивости для упруго-пластических тел // Механика (сборник переводов), 1958, № 3(49) — С. 53-65.

Чудновский В.Г. Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем — К.: Издательство АН УССР, 1952

Ясинский Ф.С. К вопросу о сопротивлении решетчатых ферм выпучиванию // Протоколы XI совещания съезда инженеров службы пути 1893 г. — М.: 1894 — С. 191-196.

Ясинский Ф.С. О сопротивлении продольному изгибу // Сборник Института инженеров путей сообщения, Вып. XXVI — СПб.; 1894 — С. 1-129.

Bauschinger J. Zerknickungs Verzuche. München: Mittheilungen aus dem mechanish technichen Laboratorium der Technichen Hochschule in Munchen, Th. Ackermann, 1887. Heft 15. — S. 11-57.

Beck M. Die Knicklast des einseitig eigenspannten, tangential gedrűckten Stabes // ZAMP, 1952, vol. 4.— S. 225-288, 476-477

Belytscko T., Liu W., Moron B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. J Wiley & Sons, 2000. ISBN 0-948-749-261.

Bijlaard P.P. Theory of the Plastic Stability of Thin Plates // Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. VI, стр. 45, 1940—1941.

Bleich F. Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Der Eisenbau, т. 10, стр. 27, 1919

Bleich F. Stahlhochbauten, т. II, стр. 925, Julus Springer, Berlin, 1933.

Bleich F. Theorie und Berechnung der eisernen Brücken Berlin: Julius Springer, 1924.

Bleich F., Bleich H. Die Stabilität räumlicher Stabverbindungen // Zeitschrift des Osterreichischen Ingenieur- und Architektenvereinung. 1926 — 345 s.

Brendel B. Zur geometrisch nichtlinearen Elastostatik. Bericht Nr. 79-1, Inst. f. Baustatik, Universitat Stuttgart 1979.

Brendel B., Ramm E. Nichtlineare Stabilitatsuntersuchungen mit der Methode der finiten Elemente // Ing. Archiv 51 (1982), 337-362.

Bryan G. H. On the stability of elastic systems. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (mathematical and phisical sciences), 1888, vol. 6, — P. 199-210.

Bryan G.H. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane with application on the "Buckling" of the sides of a ship. // Proc. London Math. Soc., 1891, p.59.

Bushnell D. Buckling of Shells – Pitfall for Designer // AIAA Journal, 1981, Vol. 19, No 9 — P. 1183-1226 [Перевод: Бушнел Д. Потеря устойчивости и выпучивание оболочек – ловушка для проектировщиков // Ракетная техника и космонавтика, 1981, т. 9, № 10 — С. 93-184]

Chwalla E. Theorie der aubermitting gedruckten Stabes aus Baustahl // Stahlbau, 1934. № 21-23.

Chwalla E., Jokisch F. Über das ebene Knickproblem des Stock werkrahmens // Der Stahlbau, 1941, Heft 14 — S. 33

Donnell L.H.A. New theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. Trans. ASME, Ser. E, 1934, vol. 56, pp. 795—S06.

Donnell L.H, Wan C.C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. J. Appl. Mech., 1950, vol. 17, No. 1, 73—83; Discussion on the paper: J. Appl. Mech., 1950, vol. 17, No. 3, pp. 340—342; русск. перевод: Доннелл Л., Уан К. Влияние неправильностей в форме на устойчивость стержней и тонкостенных цилиндров при осевом сжатии. Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период, лит-ры, 1951, № 4, (8), стр. 91—107.

Duleau A. Essai the orique et experimential sur la resistance du fer forge. — Paris: 1820.

Dunkerley S. On the whirling and vibration of shafts // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1894, vol. 185, Part 1 — P. 279-360.

Eckstein U. Nichtlineare Stabilitatsberechnung elastischer Schalentragwerke // Tech. Rep. No. 83-3, hist. KIB, Ruhr Universitat Bochum. 1983.

Elishakoff I. Buckling of stochastically imperfect finite column on nonlinear elastic foundations: a reliability study // *Journal of Applied Mechanics, 1979, Vol. 46, No 2 — P. 411-416*

Elishakoff I., Arbocz J. Reliability of compressed cylindrical shells with random axisymmetric imperfection. International // Journal of Solids and Structures, 1982, Vol.18, No 7 — P. 563-585.

Engesser F. Die Sicherung offener Brücken gegen Ausknicken // Zentralblatt der Bauverwaltung, 1884. — S. 415

Engesser F. Ueber Knick Flagen // Schweizerishe Bauzetung. 1885. Bd. 26. — P. 24.

Engesser F. Ueber Knickfestigkeit gerader Staebe // Zeitschrift des Architekten und Ingeniuer Verein zu Hannover. 1889. Bd. 35. — P. 456-468.

Euler L. Methodus idvenienti lineas curvas maximi minimive propreietate gaudentes sive solution problematis isoperimentrici latissimo sensu accepti. Additamentum 1: De curves elastics — Lausanna, Geneva: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, 1744 — 267 p.

Euler L. Scientia Navalis seu Tractatus de Construendis ac Dirigendis Navibus.St. Petersburg: Typis Academiae Scientiarum, 1749.

Euler L. Sur la force des colonnes // Histoire de L'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, 1757, published in Memoires of the Academie, Vol. 13, Berlin, 1759, — P. 252–282.

Flügge W. Die stabilität der Kreiszylinderschale // Ing.-Archiv, 1932, Bd. 3. No 5 — S. 463-506.

Föppl A. Drang und Zwang: Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure München, Berlin: R. Oldenbourg Verlag, 1920 — 344 p.

Föppl L. Über das Ausknicken von Gittermasten, insbesondere von hohen Funktürmen // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1933, Band 13, Heft 1 — S. 1–10

Goodier J.N. Flexural-Torsional Buckling of Bars of Open Sections, under Bending, Eccentric Thrust or Torsional Loads // Cornell Univ. Eng. Exp. Sta. Bull. 28, Ithaca, N, Y., 1942.

Huseyin K. Nonlinear Theory of Elastic Stability — Leyden: Noordhoff International Publishing, 1975 — 242 p.

Huseyin K. Multiple Parameter Stability Theory and Its Applications: Bifurcations, Catastrophes, Instabilities //. Oxford Engineering Science Series 18.— Oxford: Clarendon Press, 1986. . — 283 p.

Jasinski F.S. La flexion des pieces comprimees // Annales des ponts et chausses, 1894, Part 2 – — P. 233

Jasinski F.S. Zu den Knickfragen // Schweizerische Bauzeitung . 1895. Vol. 25. — P. 172.

Jezek K. Die Festigkeit von Druckstaben aus Stahl. Wien. 1937.

Kappus R. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung, 1937; Luftfahrt—Forsch., т. 14, стр. 444, 1938.

Karman T. Untersuchungen uber Knickfestigkelt // Mittelhungen uber Forschungsarbelten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. 1910. № 81.

Karman Th., Seeler E.E., Donnell L.H. The strength of thin plates in compression // Trans. ASME, Vol. 54, 1932 — P. 53-57.

Karman T.L., Tsien H. S. The buckling pf spherical shells external pressure // Journal of the Aeronautical Sciences, 1939, Vol. 7, No 1 — P. 43-50.

Karman T.L., Tsien H. S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. J. Aeronaut. Sci., 1941, vol. 8, No. 8, pp. 303— 312

Koiter W.T. Over de stabilities van het elastisvh evetwicht. PhD Thesis, Delft University of Technology—Amsterdam: H. J. Paris, 1945.

Koiter W.T. On the Stability of Elastic Equilibrium, Translation of 'Over de Stabiliteit von het Elastisch Evenwicht1. Polytechnic Institute Delft, H. J. Paris Publisher. Amsterdam 1945, NASA TT F-10,833, 1967.

Koiter W. Unrealistic follower forces. // Journal of Sound and Vibration, 1996, 194.— P. 636.

Krdtzig W.B., Qian, Y. On Stability Conditions of Nonlinear Static and Dynamic Buckling Responses of Arbitrary Structures // in Wriggers, P., Wagner, W., eds.: Nonlinear Computational Mechanics. Springer Verlag, 1991.

Lagrange J.-L. Sur la figure des colonnes // Ouvres de Lagrange. — Paris: Gauthier-Villars, 1868. — P. 125-170.

Lagrange J.-L. Mécanique analytique. Tome premier — Paris: 1788. — 497 p. [Русский перевод: Лагранж Ж. Аналитическая механика. Том I. Статика. Динамика. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950].

Lamarle E. Memjire sur la flexion du bous // Annuales des travaux publiés de Belgique, Series 1 Bruxelles, 1845, Vol. 3 P. 5-64; 1846, Vol. 4 — P. 5-36.

Lejeune Dirichlet. Sur la stabilitě de l'ěquilibre // J. fũr reine und angev. Math., 1846, vol 32

Levy M. Mémoire sur un nouvean cas intégrable du probleme da l'élastique et l'une de ses applications // Journal de mathematiques pures et applications (Liouville Journal), 1884, Séries 3, Vol. 10 ─ S. 5-42

Lorenz R. Achsensymmetrische Verzerrungen in dunnwandigen Hohlzylindern // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Vol. 52, 1908, p. 1707.

Lorenz R. Die nicht achsensymmetrische Knickung dunnwandiger Hohlzylinder. Physikal. Zeitschrift, 1911, Bd 12, Nr. 7, SS. 241—260.

Lundquist E.E. Method for Estimating the Critical Buckling Load for Structural Members, NACA Tech. Note 717, 1939;

Michell A. G. M. On the elastic stability of long beams under transverse forces // Philosophical Magazine and Journal of Sciences, Series 5, 1899, vol. 48, No 292 — P. 298—309.

Von Mises R. Riemann-Webers Differentialglaichung der Phisik // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik., 1924, Bd. 4, — S. 435-461.

Von *Mises R., Pollaczek-Geiringer H.* Verfahren zur Gleichungsauflösung // ZAMM, 1929, Band 9 S. 152-164

Mül1er-Breslau H. Die graphische Statik der Bau-Konstructionen, т. II-2, — Berlin: A. Kröner, 1908.

Nissbaum F. Die genau ue Sãulen Knicklast // Zeitschrift fur Mathematik und Phisik, 1907, Band 55, Heft 1-2 S. — 134-138.

Nylander H. Drechungsvorgãnge und gebaundene Kipping bei geraden . doppelsymmetrischen I-Trager // Ingeniors Vetenskaps Academien Handlingar. № 174, 1943.

Perelmuter A.V., Slivker V.I. The Problem of Interpretations of the Stability Analysis Results // ECCM-2001. 2nd European Conference on Computational Mechanics. Solid, Structures and Coupler Problems in Engineering. Cracow, Poland, June 26-29, 2001.—

Abstracts, Vol. 2. — Kraków: Vesalius, 2001. — P. 998–999. (Full paper on enclosed CD-ROM).

Poincare A. Sur le Equilibre d'une Masse Fluide Animée d'un Mouvement de Rotation // Acta Mathematica, T. 7, 1885. — P. 259-380

Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. Deuxième partie // Journal de Mathém. Pures et app. 1882. T.8, — 251 p. [Русский перевод: Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947 — 392 с].

Prager W. Elastic Stability of Plane Frameworks // Journal of the Aeronautical Sciences, 1936, Vol. 3, №11 — P. 388-392.

Prandtl L. Kipperscheinungen. Ein Fall von instabilem elastischem Gleihcgewcht / Inagural Dissertation d. Phil. — Mūnchen: Ludwigs-Maximilians-Universität, 1899 — S. 1-75.

Ratzersdorfer J. Die Knicksicherheit von Stäben und Stabwerken — Vienna: Julius Springer, 1936.

Reissner H. Über die Knicksicherheit ebener Bleche // Zentralblatt der Bau Verwaltung, 1909, стр. 93.

Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik, 1909, стр. 1.

Roorda J. Buckling of shells: an old idea with a new twist // Journal of Engineering Mechanics, 1971; Vol. 98 — P. 531-538.

Ros M., Elch1nger A., Final Rept. 1st Congr., Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., Paris, 1932, стр. 144.

Saalschulz L. Der belastete Stab — Leipzig: 1880

Schneider A. // Zeitschrift der Osterr. Ing. und Arch/ Ver. 1901.

Shanley F. The column paradox. // Journal of tne Aeronautical Science, 1946, vol. 13, No 12 – P. 678.

Shanley F. R. Inelastic column theory // Journal of tne Aeronautical Science. 1947. vol. 14, No 5 — P. 261–267.

Schmidt H., Swadlo P. Strength and stability design of unstiffened cylinder-cone-cylinder and cone-cone shell assemblies under axial compression // Proceeding International Conference. Brno, October, 1997 — P. 361-367.

Stowe11 E.Z. A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates, NACA Tech. Note 1556, 1948; русский перевод: см. сб. «Механика», 1952, № 2.

Sommerfeld A. Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. Zeitschriht für Mathematik und Ohysik, 1907, Bd. 54, Heft 2 — S. 113-153

Southwell R.V. On the general theory of elastic stability // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1913, Vol. 213, N. 501 — P. 187—244.

Southwell R. On the collapse of tubes by external pressure. Parts I, II, III. Philos. Mag., Ser. 6, 1913, vol. 25, No. 149, pp. 687—697; vol. 26, No. 153, pp. 502—510; 1915, vol. 29, No. 169, pp. 67—76.

Southwell R.A. On the Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability // Proceedings of the Royal Society. Vol. 135, Series A, 1932. — p. 601-616.

Sugiyama Y., Langthjem M.A., Ryu S.-U. Realistic follower forces. // Journal of Sound and Vibration, 1999, 225(4).— P. 779-782

Sugiyama Y., Ryu S.-U., Langthjem M.A. Beck’s column as the ugly duckling. // Journal of Sound and Vibration, 2002, 254(2).— P. 407-410

Thompson J.M.T. Towards a general statistical theory of imperfection—sensitivity in elastic post-buckling // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967, Vol.15 — P. 413-7.

Tetmajer L. Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzte Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe // Mittheilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialen in Zürich. Heft IV, 1890.

Tetmajer L. Die Gesetze der Knickungs und zusammengesetzten Festigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe. — Leipzig: 1907.

Thielemann W. F. On the post-buckling behaviour of thin cylindrical shells. NASA, Tech. Note, 1962, № D-1510, pp. 203—216.

Thom R. Structural Stability and Morphogenesis — Reading: Benjamin, 1975

Thompson J.M.T, Hunt G.W. A General Theory of Elastic Stability. — London: John Wiley & Sons Ltd., 1973.

Timoshenko S.P. Einige Stabilitatsproblem der Elastizitatstheprie // Zeitschrift fur Mathematik and Phisik, 1910, Bd. 58, Heft 4— S. 347-385.

Timoschenko S.P. Kippsicherheit der gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Mittellinie // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1923, Bd. 3, Heft 5 — S. 358-362.

Timoshenko S. Analysis of bi-metal thermostats // Journal of the Optical Society of America and Review of Scientific Instruments, 1925, Vol.11, No 3 — P. 233-255.

Timoschenko S.P. Buckling of flat curved bars and slightly curved plates // Journal of Applied Mechanics. Proc. ASME, 1935, Vol. 2 — P.17-20l

Timoshenko S.P. Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled member of open cross-sections // Journal of the Franklin Institute, 1945, Vol. 239, No 3 — P. 201-219; No 4 — P. 249-268; No 5 — P. 343-361.

Trefftz E. Über die Ableitung des Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts. // Verhandl. III Intern. Kongr. Techn., 1930, Bd. 3.

Van Musschenbroek P. Introducto ad cohaerentiam corporum firmorum — Lugduni, 1729

Von Mises R., Ratzersdorfer J. Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1923, Band 6, — P. 181-194.

Von Mises R. Ratzersdorfer J. Die Knicksicherheit von Fachwerken // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1925, Band 5 — P. 218-231.

Wagner H. Festschrift Fünfundzwanzig Jahre technische Hochschule, Danzig, стр. 320, 1929.

Wagner H. Flat sheet metal girders with very thin metal web // Zeitschrift für Flugtechnik Motorluftschiffahrt, 1929, vol. 20.— S. 200-207.

Wagner W. Zur Behandlung von Stabilitatsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente. // Foschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universitat Hannover. 1991. F91/1

Wagner W., Wriggers P. A simple method for the calculation of postcritical branches //Engineering Computations. 1988. Vol. 5 — P.103-110.

Wagner W., Wriggers P. Calculation of Bifurcation Points via Fold Curves // Wriggers P., Wagner W., eds. Nonlinear Computational Mechanics. Springer Verlag, 1991. ISBN 3-540-54254-X.

Winter G. Lateral Stability of Unsymmetrical I-Beams and Trusses in Bending // Proceedings ASCE. 1941, Vol. 67 — P. 1851–1864

Young T. A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts (Reprinted by Bristol: Thoemmes Press, 2002)

Ziegler H. Die Stabilitatskriterien der Elastomechanik // Ingenieur-Archiv, 1952, v.20, №1.— P. *49–56*

Zimmermann H. Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1909 — S. 180

Zimmermann H. Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken — Berlin: W. Ernst und Sohn, 1910

Нарис 4

ВИНИКНЕННЯ І СТАНОВЛЕННЯ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Числення варіацій – якісно нове, відмінне від диференціального числення…

Л. Ейлер

4.1. Перші варіаційні задачі

Остання чверть XVII ст. і початок XVIII ст. характеризуються швидким розвитком числення нескінченно малих. Після того, як Г. Лейбніц поклав йому початок у європейській науці, а І. Ньютон незалежно заклав основи числення нескінченно малих в Англії, своїм подальшим розвитком воно зобов'язане працям членів математичної сім'ї Бернуллі [Виппер, 1875, Fleckenstein, 1949, Spiess, 1948], головним чином Якобу і Йоганну Бернуллі.

Серед представників сімейства Бернуллі четверо: Йоганн (1667-1748), його сини Даніель (1700-1782), Микола (молодший, 1695-1726) і племінник Даніель – Якоб молодший (1759-1789), до речі, одружений на онуці Л. Ейлера – були почесними членами і професорами математики і механіки Петербурзької Академії наук.

Якобом І Бернуллі (1655-1705) була розглянута задача про форму кривої згину пружного стержня. Якщо Галілей і Маріотт досліджували міцність балок, то Бернуллі розв'язував задачу обчислення їх прогинів[1].

Йоганн І Бернуллі (1667-1748), молодший брат Якоба вважався видатним математиком свого часу. Результатом його викладацької діяльності стала перша книга з числення нескінченно малих, написана маркізом де Лопіталем [De l'Hospital, 1696][2] у 1696 р. Йоганн Бернуллі (у листі до Варіньона[3]) навів перше строге формулювання принципу віртуальних переміщень. Був учителем Л. Ейлера. Поставив і розв'язав задачу про брахістохрону, спільно з Я. І Бернуллі заклав основи варіаційного числення, основоположник математичної фізики.

Даніель Бернуллі (1700-1782) відомий як автор книги «Гідродинаміка», але він сприяв також і розвитку досліджень з теорії пружних кривих.

Й. І Бернуллі – швейцарський математик, найбільш знаний представник сім'ї Бернуллі, молодший брат і учень Якоба Бернуллі, провідний математик Європи XVIII ст., учитель Г.Ф.А. Лопіталя і Л. Ейлера. Поставив і розв'язав задачу про брахістохрону, спільно з Я. І Бернуллі заклав основи варіаційного числення, основоположник математичної фізики. Оспорював у Якоба пріоритет у постановці варіаційної проблеми. Його наукова кореспонденція складала близько 2500 листів.

Ще у Галілея ми знаходимо задачу, яка передує задачі про брахістохрону. Він вперше поставив питання про криву спуску в книзі «Бесіди і математичні доведення, які стосуються двох нових галузей науки, що відносяться до механіки і місцевого руху» в 1638 р. «*Теорема XXII, пропозиція XXXVI: якщо з нижньої точки кола, що піднімається над горизонтом, провести площину, яка відсікає дугу, меншу квадранта, і із кінцевої точки цієї дуги дві будь-які площини, то час падіння по цих двох останніх площинах буде меншим, ніж по одній первинній площині, і меншим, ніж по нижній з двох останніх*

---

[1] Перший начерк підходу до цієї задачі був надрукований у журналі Лейбніца «Acta eruditorum Lipsiae» в 1694 р.; остаточне ж її трактування було поміщено автором в Histoire de l'Académie des sciences de Paris в 1705 р.

[2] Існує російський переклад [Лопиталь, 1935].

[3] Див.: [Varignon, 1725, стор. 174].

площин», тобто Теорема Галілея означає лише те, що рух по дузі кола відбувається швидше, ніж по відповідній хорді або будь якій вписаній ломаній лінії.

У 1696 р. в червневій книзі лейпцизького журналу «Acta Eruditorum» (стор. 269) Й.І Бернуллі опублікував примітку «Нова задача, до розв'язання якої запрошуються математики». Це була задача про брахістохрону. Розв'язання цієї за словами Г. Лейбніца «*такої прекрасної досі нечуваної задачі*» був наданий самим Й. Бернуллі, Г. Лейбніцем, І. Ньютоном, Я. Бернуллі і Г. Лопіталем. Цікаво, що на її розв'язання Й. Бернуллі дав піврічний термін, але за цей час розв'язок прислав тільки Г. Лейбніц. Тому за його пропозицією Й. І Бернуллі подовжив строк до Великодня 1697 р. У цей термін задачу було розв'язано І. Ньютоном, Я. Бернуллі і Г. Лопіталем.

Зазначимо, що у розв'язку задачі про брахістохрону Й.І Бернуллі (1697 р.) мова йде одночасно про оптику і механіку, тобто про рух променя і важкої матеріальної точки. Вказавши на те, що П. Ферма отримав закон переломлення світла з принципу найкоротшого часу (при $v = \text{const}$ принцип найкоротшого часу П. Ферма переходить в принцип найкоротшого шляху), Й. І Бернуллі розглядає задачу про кривизну променя у неоднорідних прозорих середовищах. Й. І Бернуллі відзначає: «*Я, таким чином, одночасно розв'язав дві задачі – одну оптичну, іншу механічну, тобто я зробив більше того, що вимагав від інших... Раніше ніж закінчити, я не можу утриматись від того, щоб ще раз не виразити свого подиву з приводу відміченої несподіваної тотожності між таутохроною Х. Гюйгенса і нашою брахістохроною. Більше того, я вважаю за необхідне відмітити, що ця тотожність витікає із основного положення Г. Галілея; вже з цього можна було б зробити висновок, що це положення знаходиться у погодженні із природою. Природа завжди діє найпростішим чином, як і у даному випадку вона за допомогою однієї і тієї ж лінії надає дві різні послуги*». Й. Бернуллі у даному випадку має на увазі те, що як показав Х. Гюйгенс, циклоїда, яка знаходиться у вертикальній площині так, щоб лінія її основи була горизонтальною і лежала вище діючого кола, має ту властивість, що з якої б точки на цій кривій тіло не почало спускатись, воно прийде у найнижче положення за один і той же час (таутохрона).

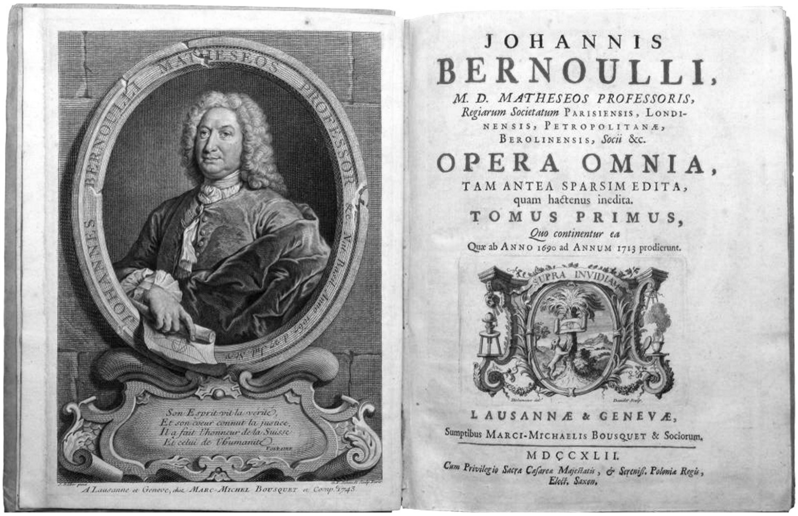
Якоб Бернуллі
(1655 - 1705)
нім. Jakob Bernoulli

Йоганн Бернуллі
(1667 - 1748)
нім. Johann Bernoulli

Даніель Бернуллі
(1700–1782)
нім. Daniel Bernoulli

Незабаром після роботи Й. Бернуллі про брахістохрону почали з'являтися (і розв'язуватися) багато задач того ж типу.

В 1697 р. Й. Бернуллі надіслав в «Journal des savanta» ще одну екстремальну задачу: провести найкоротшу лінію між двома заданими точками на довільній поверхні. Перші дослідження були виконані Лейбніцем і Я. Бернуллі, але найбільш важливий результат знайдений самим Й. Бернуллі. Він встановив, що у будь-якій точці найкоротшої лінії співдотична площина, перепендикулярна до дотичної площини поверхні, що, як відомо, є основна властивість геодезичних ліній. Про це Й. Бернуллі повідомив Г. Лейбніца у листі 26 серпня 1698 р. Як він прийшов до цього висновку невідомо. Вивчення геодезичних ліній розширило клас варіаційних задач і одночасно сприяло розвитку аналітичної геометрії.

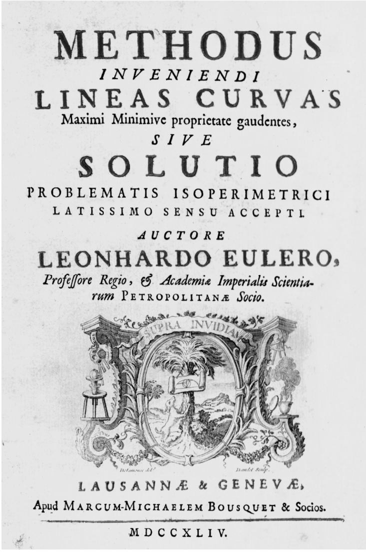


JOHANNIS
BERNOULLI,
M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ,
BEROLINENSIS, *Socii* &c.
OPERA OMNIA,
TAM ANTEA SPARSIM EDITA,
quam hactenus inedita.
TOMUS PRIMUS,
Quo continentur ea
Quæ ab ANNO 1690 ad ANNUM 1713 prodierunt.

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.
MDÇCXLII.
Cum Privilegio Sacræ Cæsareæ Majestatis, & Sereniss. Poloniæ Regis, Elect. Saxon.

Перше видання книги Й. Бернуллі «Opera omnia, tam antea sparsim edita». 1742 р.

Й. Бернуллі поставив перед своїм учнем Леонардом Ейлером (1707-1783) проблему знайти загальний підхід до їх вирішення. У 1744 р. вийшла праця Л. Ейлера «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti» («Метод знаходження кривих ліній, що мають властивості максимуму або мінімуму, або розв'язання ізопериметричної задачі, розглядуваної в найширшому сенсі») [Euler, 1744], в якому були закладені теоретичні основи нового розділу математичного аналізу. Зокрема, апроксимуючи криві ламаними, Л. Ейлер вивів диференціальне рівняння другого порядку, яке мають задовольняти екстремалі. Згодом Жозеф-Луї Лаґранж (1736-1813) назвав його рівнянням Ейлера. У 1759 р. з'являється перша робота Ж.-Л. Лаґранжа і з нею нові методи дослідження. Ж.-Л. Лаґранж «варіює» криву, підозрювану на екстремум, виділяє з приростів функціоналів головні лінійні частини, які називає варіаціями, і користується тим, що в точці екстремуму варіація має дорівнювати нулю. Метод Лаґранжа стає згодом загальноприйнятим.



METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

Перша книга з варіаційного числення. Л. Ейлер

Відзначимо, що після робіт Ж.-Л. Лаґранжа за пропозицією Л. Ейлера весь розділ математики, до якого застосовувався метод Лаґранжа, почали називати варіаційним численням.

Вважається, що коли (біля 1700 р.) І. Ньютон, Я.І Бернуллі, Й. І Бернуллі, Г.Ф.А. Лопіталь і Г.В. Лейбніц розв'язали задачу про брахістохрону, сформульовану в 1696 р. Й. І Бернуллі, тим самим було закладено початок розвитку варіаційного числення (теорії екстремумів функціоналів). Цікаво, що символ варіації був введений ще Лаґранжем, хоча сам термін «варіація» був введений Л. Ейлером набагато пізніше, а термін «функціонал» - Ж. Адамаром лише у 1903 р.

У 1742 р. в листі від 22 жовтня Даніель Бернуллі подав Л. Ейлеру, учню Й. Бернуллі, ідею використати варіаційне числення для отримання рівнянь пружних кривих: «Оскільки ніхто не оволодів такою досконалою майстерністю ізопериметричного методу (варіаційного числення) як Ви, Вам легко буде розв'язати задачу, у якій треба, щоб $\int_0^l \frac{ds}{\rho^2}$ набув найменшого значення»[4]. Це була перша в історії теорії пружності постановка варіаційної задачі. Очевидно, що наведений функціонал з точністю до множника $\frac{1}{2}EI$ - потенціальна енергія пружної деформації. Доведення цього положення Л. Ейлер опублікував в 1744 р.

Даніель Бернуллі першим отримав диференціальне рівняння поперечних коливань призматичного брусу, вивчав частинні випадки коливань, провів велику кількість експериментів.

В своїй книзі «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti», до речі, це була перша книжка з варіаційного числення, Ейлер підходить до вирішення задач з точки зору варіаційного числення. Він відмічає «Оскільки будова всього світу досконала і зведена мудрим (творцем), то у світі не відбувається нічого, у чому не був би помітний сенс будь-якого максимуму або мінімуму, тому нема ніякого сумніву, що усі явища світу з таким же самим успіхом можна визначити з причин кінцевих за допомогою методу максимумів і мінімумів, як і із самих причин… Тобто, відкрито два шляхи для розуміння явищ природи: один – через обумовлюючі причини, який називається прямим методом, інший – через кінцеві причини і

---

[4] Див.: Fuss P.H. «Correspondence mathematique et physique» («Переписка по математике и физике») [Fuss, 1843].

математика з рівним успіхом користується обома. Але перш за все треба додати зусиль, щоб відкрити доступ до розв'язання обома шляхами; адже тільки тоді не тільки один розв'язок підтверджується іншим, але від відповідності обох ми отримуємо найвищу насолоду»[5].

Для ілюстрації цих підходів Л. Ейлер розглядав задачу про ланцюгову лінію.

Для ланцюга (рис. 4.1) можна отримати криву, що відображає стан рівноваги «прямим методом». При цьому розглядаються сили, які діють на його нескінченно малий елемент mn і складаються рівняння рівноваги цих сил. З отриманих рівнянь виводиться диференціальне рівняння ланцюгової лінії. Цієї ж мети можна досягнути і «методом кінцевих причин» (за термінологією Л. Ейлера), якщо підійти до задачі із міркувань потенціальної енергії: сил ваги. З усіх можливих кривих провисання шукана повинна бути такою, для якої її потенціальна енергія становить найменше значення, або, що те ж саме, кривою рівноваги буде та, для якої центр ваги ланцюга займе найнижче положення. Таким чином задача зводиться до пошуку екстремуму функціоналу $\int_{\partial}^{s} w\cdot y\,ds$, де s - задана довжина кривої, w - вага одиниці довжини ланцюга. Застосовуючи правила варіаційного числення ми приходимо до диференціального рівняння.

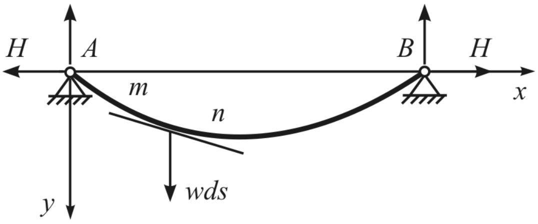


Рис. 4.1

Переходячи до випадку пружного стержня, Л. Ейлер зауважує, що «прямий метод» був застосований Я. І Бернуллі. Для застосування «методу кінцевих причин» Л. Ейлер користується даними Д.І Бернуллі з листа від 22 жовтня 1742 р. Він пише: «Достославний і найдотепніший у цій високій царині природи Даніель Бернуллі повідомив мене, що він може представити всю силу, яка міститься у зігнутій пружній пластинці, однією формулою, яку він називає «потенціальною силою», і що цей вираз для пружної кривої повинен бути найменшим», а потім продовжує (згідно з Бернуллі): «... якщо тільки пластинка буде усюди однаково товста, широка і пружна і у природному стані буде витягнута прямолінійно», то для цього випадку «значення виразу $\int_{\partial}^{s}(1/R^{2})ds$ буде найменшим». Користуючись своїм варіаційним численням, Ейлер отримує диференціальне

---

[5] Англійський переклад додатка до цієї книги, присвяченого дослідженню пружних ліній згину був виконаний Олдфазером (W.A. Oldfalher), Еллісом (C.A. Ellis) і Броуном (D.M. Brown). Див.: [Isis, 1933, стор. 1]. Див. також німецький переклад в серії «Ostwald's Klassikei» («Класика Оствальда»), № 175). Російський переклад: «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера» [Эйлер, 1934, стор. 447-572].

рівняння Якоба Бернуллі для пружної лінії, для консолі, завантаженої силою P на кінці, у вигляді:

$$\frac{C\,y^4}{(1+y'^2)^{3/2}}=Px. \tag{4.1}$$

Л. Ейлер не обмежується розглядом лише малих прогинів, інтегрує це рівняння шляхом розкладу в ряд.

Л. Ейлер – математик, механік, фізик і астроном. Один із фундаторів варіаційного числення (праці 1727-1741 рр.). У 1744 р. вийшла його праця «Метод нахождения кривых линий» – перша книга з варіаційного числення. Написав видатні мемуари майже по усіх галузях математики і механіки. Список його праць налічує 850 назв, серед яких ряд багатотомних монографій. З 1909 р. у Швейцарії видається повне зібрання його творів, розраховане на 72 томи. Крім того, лише частково опублікована його наукова переписка, що нараховує 3000 листів. Подейкували, що Л. Ейлер не любив театр і, якщо потрапляв туди, піддавшись умовлянням дружини, то, щоб не нудьгувати, подумки виконував складні обчислення, підбираючи їх обсяг так, щоб вистачило якраз до кінця вистави. Одного разу два студенти, виконуючи незалежно складні астрономічні обчислення, отримали результати, що трохи різнились між собою в 50-му знаку, і звернулися до Л. Ейлера за допомогою. Л. Ейлер проробив ті ж обчислення подумки і вказав правильний результат.

У 1739 р. вийшла робота Л. Ейлера «Tentamen novae theoriae musicae» з математичної теорії музики. З приводу цієї роботи ходив жарт, що в ній занадто багато музики для математиків і занадто багато математики для музикантів.

Двадцятирічний Л. Ейлер вже в 1730-х роках займався дослідженням ізопериметричних задач. Присвятивши декілька робіт вирішенню питань подібного роду, Л. Ейлер в 1744 р. опублікував трактат, де були зібрані всі колишні результати Л. Ейлера, що відносяться до ізопериметричних задач, і подано так званий прямий метод знаходження кривих, що забезпечують екстремум невизначеного інтеграла деякого вигляду.

12 серпня 1755 р. він несподівано отримав листа від 19-річного туринця Ж.-Л. Лаґранжа, який тут же, в листі, заповнив основні пропуски в міркуваннях Л. Ейлера. Ж.-Л. Лаґранж ввів відмінність двох видів «диференціалів» чіткіше, закріплюючи символ d для позначення головної частини зміни функції за рахунок зміни аргументу і пропонуючи новий символ δ для змін, обумовлених переходом від однієї кривої $y(x)$ до іншої, порівняльної. Замість того, щоб вгадувати співвідношення між величинами $d\delta y$ і δdy, як робив це Ейлер, допускаючи змішання двох видів «диференціалів», Лаґранж вивів це співвідношення, спираючись на можливість перестановки символів d і δ (правда, не обґрунтувавши цю властивість). Таким чином, по-перше, Лаґранж ввів новий символ – символ варіації (без назви) і довів можливість перестановки операцій диференціювання і варіювання:

$$\begin{aligned} &\delta dF(y)=d\delta F(y), \\ &\delta d^2F(y)=d^2\delta F(y) \text{ і т.д.} \end{aligned} \tag{4.2}$$

і, по-друге, Лаґранж запропонував, по аналогії із звичайним диференціальним численням, прирівнювати нулю першу варіацію функціоналу J, вважаючи це необхідною умовою його екстремуму

$$\delta\int Zdx=0, \text{ або } \int\delta Z=0, \tag{4.3}$$

$$\delta Z=N\delta y+P\delta dy+Q\delta d^2y+R\delta d^3y+\ldots, \tag{4.4}$$

де

$$N=Z'_y,\ P=Z'_{dy},\ Q=Z'_{d^2y},\ R=Z'_{d^3y},$$

$$\int N\delta y+\int P\delta dy+\int Q\delta d^2y+\int R\delta d^3y+\ldots=0. \tag{4.5}$$

Інтегрування частинами дає:

$$\delta\int Z=\int(N-dP+d^2Q-d^3R+\ldots)\delta y+(P-dQ+d^2R-\ldots)d\delta y+(Q-dR+\ldots)d^2\delta y+\ldots=0.$$

Оскільки усі криві починалися і закінчувалися в одних і тих точках, то усі позаінтегральні члени Лаґранж прирівняв нулю і отримав відоме рівняння Ейлера

$$N-dP+d^2Q-d^3R+\ldots=0. \tag{4.6}$$

Л. Ейлер був вражений глибиною думки туринського початківця. Розробляючи основи варіаційного числення, він залишив одну проблему, не довівши співвідношення

$$Pdp+pdP=0.$$

З цього приводу він сам висловлював незадоволеність: «… Необхідний ще один метод, вільний від геометричних засобів знаходження максимуму або мінімуму, треба замість Pdp писати - pdP» [Эйлер, 1958, стор. 116].

Ж. Д'Аламбер у зв'язку з цим пише: «Для того, щоб зробити більш помітними мотиви, які викликали захоплення Л. Ейлера, яке він висловлював із благородною сумлінністю, було б корисно звернутись до джерел різноманітних досліджень Ж.-Л. Лаґранжа, на які він вказав нам за два дні до смерті. Перші спроби визначення максимумів або мінімумів усіх невизначених інтегралів були зроблені у зв'язку з кривою найшвидшого скочування та ізопериметрами Бернуллі. Ці дослідження переробив Л. Ейлер, який надав загальний метод у оригінальній роботі, де усюди виблискує глибина володіння аналізом. Але, яким би геніальним не був цей метод, він не мав тієї ж простоти, якої можна було б бажати у роботі з чистого аналізу. Автор і сам це розумів, він вважав за необхідне знайти доведення, незалежне від «Геометрії і Аналітики» [D'Alembert, 1867].

Саме це і зробив Ж.-Л. Лаґранж. У листі до Л. Ейлера від 20 листопада 1755 р. Ж.-Л. Лаґранж розглянув задачу про брахістохрону з рухомим кінцем, коли кінцева точка екстремалі була не фіксованою, а могла належати деякій лінії, характер якої задавався граничними умовами (у сучасній термінології це так звані природні граничні умови).

Перший мемуар Ж.-Л. Лаґранжа по варіаційному численню «Essai d'une nouvelle mdthode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies» («Досвід нового методу для визначення максимумів і мінімумів невизначених інтегралів»), з'явився в «Туринських записках» у 1760-1761 рр.

Л. Ейлер зробив дуже багато для того, щоб підкреслити істотні заслуги Ж.-Л. Лаґранжа у створенні нової галузі математики - варіаційного аналізу. Надавши молодому ученому можливість опублікувати свої досягнення, Л. Ейлер затримав на декілька років публікацію своїх результатів в тій же галузі, а коли опублікував свій перероблений метод, виклавши його, як і Ж.-Л. Лаґранж, в аналітичній формі, він у вступі знову вказав на заслуги Ж.-Л. Лаґранжа: «*Після того, як я довго і безплідно працював над вирішенням цього питання, я із здивуванням побачив, що в «Туринських записках» ця задача розв'язана так само легко, як і щасливо. Це прекрасне відкриття викликало у мене тим більше захоплення, адже воно значно відрізняється від даних мною методів і значно їх перевершує по своїй простоті*».

Дії Л. Ейлера були вельми своєчасні: мемуари Ж.-Л. Лаґранжа викликали сумніви і нерозуміння, про що писали Фонтен і Борда. Трохи згодом про це ж писав А. Крель в примітках до німецького перекладу курсу лекцій Ж.-Л. Лаґранжа «Лекції про числення функцій».

Основні неясності виникали через твердження Ж.-Л. Лаґранжа, що функція $y(x)$, яка забезпечує екстремум інтегралу *I*, змінюється за правилами звичайного диференціювання, хоча цю зміну слід виділити особливим символом δ замість звичайного *d*.

Л. Ейлер дав відповідь на всі ці питання і сумніви, роз'яснив суть нового варіаційного числення, дав йому назву і розробив багато додатків методу.

«*Числення варіацій*, - писав Л. Ейлер, - *якісно нове, відмінне від диференціального числення...*». І далі: «*А криві, що нескінченно мало відрізняються від шуканої, найзручніше розглядати як ті, що виходять при збільшенні або зменшенні ординат окремих точок шуканої кривої на нескінченно малі значення, тобто при варіації ординат. Звичайно досить здійснити таку варіацію для однієї єдиної ординати, але ніщо не заважає приписати такі варіації декільком або всім ординатам, оскільки завжди повинні прийти до одного і того ж рішення. Але при цьому не тільки більшою мірою виявляється сила методу, але виходять також повніші вирішення питань такого роду...*».

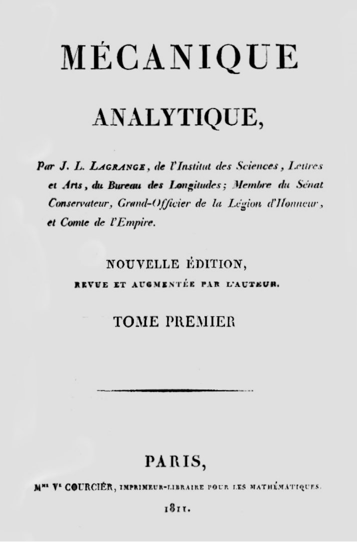
Порядок оперування варіаціями дуже близький до правил диференціювання; у них багато спільного, а найголовніша аналогія в тому, що в обох випадках до змінних додаються нескінченно малі прирости. Але не можна забувати й істотну різницю між обома численнями: «*... коли мова йде про криву, яка порівнюється з дуже близькою до неї, то за допомогою диференціалів ми переходимо від однієї точки кривої до інших точок тієї ж кривої, тоді як, якщо перейти від цієї кривої до іншої, їй дуже близької і якщо цей перехід є нескінченно малим, то він здійснюється за допомогою варіацій...*».

Таким чином, Л. Ейлер роз'яснив незрозумілі твердження «диференціального числення» Ж.-Л. Лаґранжа, що оперує символом δ. Варіації величин — δy

позначають не що інше, як нескінченно малі прирости величин y за рахунок переходу від однієї кривої до іншої, нескінченно близької.

В роботі «Mécanique analytique» («Аналітична механіка», 1788) [Lagrange, 1788] Ж.-Л. Лаґранж підвів підсумок усьому, що було зроблено у механіці протягом XVIII ст.

В основу статики Лаґранж поклав принцип можливих переміщень, а в основу динаміки – поєднання принципу можливих переміщень з принципом Ж. Д’Аламбера. У роботах «Теорія аналітичних функцій» (1797) і «Лекції по численню функцій» (1801) він зробив спробу обґрунтувати аналіз, зводячи його до алгебри. Запропонував аналітичне викладення варіаційного числення. Виходячи із результатів Л. Ейлера розробив основні поняття варіаційного числення. Ввів поняття інтеграла. В теорії аналітичних функцій побудував ряд, що носить його ім’я і довів декілька теорем, сформульованих П. Ферма.



MÉCANIQUE

ANALYTIQUE,

Par J. L. Lagrange, de l’Institut des Sciences, Lettres et Arts, du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat Conservateur, Grand-Officier de la Légion d’Honneur, et Comte de l’Empire.

NOUVELLE ÉDITION,
REVUE ET AUGMENTÉE PAR L’AUTEUR.

TOME PREMIER

PARIS,
Mme Ve COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES.
1811.

Титульний лист першого тому «Аналітичної механіки» Лаґранжа

Інший, цілком новий і абсолютно оригінальний внесок Лаґранжа у розвиток механіки – це його знаний метод невизначених множників, введений їм спочатку в статиці, а потім і в динаміці. Для задач варіаційного числення з обмеженнями правило невизначених множників Лаґранж сформулював в «Аналітичній механіці» у 1788 р., а в «Теорії аналітичних функцій» у 1797 р. він застосував його до скінченновимірних задач.

Ж.-Л. Лаґранж розглядає сукупність довільних сил, які прикладені до точок механічної системи, що підпорядкована деякій умові

$$L \equiv f(x_i) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.7}$$

Таких умовних рівнянь може бути декілька. «Вони витікають із природи системи», - зазначає Ж.-Л. Лаґранж.

Перша варіація лівої частини рівняння (4.7) δL також дорівнює нулю, отже отримуємо співвідношення між варіаціями координат (віртуальними переміщеннями)

$$\delta L = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0. \tag{4.8}$$

Якщо помножити рівняння (4.8) на невизначений множник λ і додати отриманий добуток $\lambda\delta L$ до лівої частини загальної формули статики, записаної у проекціях на декартові осі координат, то рівність нулю отриманої таким чином суми не порушується:

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i + \lambda \delta L = 0,$$

або

$$\sum_{i=1}^{3n}\left(X_i+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\delta x_i=0,$$

де до сил X_i додаються додаткові сили $\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Про ці сили Ж.-Л. Лаґранж зазначав: «Взагалі член $\lambda\delta L$ можна розглядати як момент деякої сили λ, яка викликає зміни функції L. Звідси витікає, що кожне умовне рівняння еквівалентне одній або декільком силам, які прикладені до системи у заданих напрямках, або взагалі намагаються викликати зміни значень заданих функцій … І, навпаки, ці сили можуть зайняти місце умовних рівнянь, які витікають із природи заданої системи; таким чином, застосовуючи ці сили, можна розглядати тіла, як абсолютно вільні, які не пов’язані будь-якими в’язями … У цьому і полягає ідея методу».

У цих рядках трактату Ж.-Л. Лаґранжа міститься мабуть перше в історії механіки чітке формулювання принципу звільнення системи від в’язей.

На початок XIX ст. ще не було вирішене питання про те, як відрізняти тип екстремуму, як з’ясувати, чи досягає функціонал максимуму або мінімуму на кривій, отриманій із рівняння Ейлера. Ж.-Л. Лаґранж продовжив аналогію із диференціальним численням і дослідив другу варіацію функціоналу. А.М. Лежандр і Ж.-Л. Лаґранж накреслили шляхи дослідження достатніх умов максимуму (або мінімуму) функціоналу, але загальний метод створити не могли. Це зробив К.Г.Я. Якобі у 1837 р. Але і при цьому існував ряд проблем. Головним було недостатнє обґрунтування методу Ейлера-Лаґранжа. «У варіаційному численні рівняння Ейлера і умови трансверсальності належать до так званих необхідних умов. Вони отримані шляхом точно таких же міркувань, як у парадоксі Перрона, який полягає у наступному. Нехай N – найбільше додатне число. Тоді для $N \neq 1$ ми маємо $N^2>N$, що суперечить визначенню N як найбільшого. Таким чином N=1. Тобто припускається існування розв’язку. Ця основна передумова робиться явно, а потім використовується для пошуку розв’язків, існування яких було постульовано. Для класів задач, у яких ця передумова виконується, такі міркування цілком правильні.. Але що це за клас? Як з’ясувати, чи належить конкретна задача цьому класу? Так звані необхідні умови не відповідають на подібні питання. Дивно, що така очевидна логічна помилка так довго була непоміченою. Вперше метод Ейлера-Лаґранжа був розкритикований майже через сто років К. Вейєрштрассом. Навіть Г.Ф.Б. Ріман робив таке ж невиправдане припущення у своєму відомому «принципі Діріхле» [Янг, 1974].

К. Вейєрштрасс розглянув сукупність усіх екстремалей даної задачі, тобто інтегральних кривих відповідного диференціального рівняння, створивши тим самим передумови для теорії так званого поля екстремалей, побудованої ним. За допомогою цієї теорії Вейєрштрасс знайшов необхідні і достатні умови для екстремумів загального виду, відмінність між якими була виявлена в середині століття - ці два види екстремумів отримали назву слабкий і сильний екстремуми.

На початку XIX ст. Й.К.Ф. Ґауссом і С.-Д. Пуассоном було знайдена необхідна умова екстремуму для подвійного інтеграла, а в 1861 р М.В. Остроградський знайшов такі ж умови для інтегралів будь-якої кратності.

В кінці XIX ст. результати К. Вейєрштрасса були застосовані до більш загальних варіаційних задач.

В аналітичній механіці широко використовується функція, яка має назву «кінетичний потенціал», або «функція Лаґранжа» (лаґранжіан)[6] – різниця кінетичної і потенціальної енергій консервативної системи

$$L = T - \Pi. \qquad (4.9)$$

Мабуть на честь Ж.-Л. Лаґранжа її позначають через L - першу літеру його прізвища.

Рівняння Лаґранжа, які зараз мають назву рівнянь другого роду, із введенням цієї функції L мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \qquad (4.10)$$

Якщо ввести узагальнені імпульси $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, рівняння набере вигляду:

$$dp_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (4.11)$$

де i - число ступенів свободи системи.

Якщо систему таких рівнянь проінтегрувати, то узагальнені координати $q_1, q_2, q_3, \ldots$ - будуть функціями часу t і $2m$ довільних сталих $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2m}$.

Ж.-Л. Лаґранж подає такі віртуальні переміщення системи, які відповідають варіації довільних сталих $\delta\gamma_s$ ($s = 1, 2, \ldots, 2m$). Потім він задає іншу сукупність варіацій координат, яким відповідають варіації довільних сталих $\Delta\gamma_s$. Відповідні зміни узагальнених координат і узагальнених імпульсів можна позначити тими ж символами $\delta q_i, \delta p_i$ і $\Delta q_i, \Delta p_i$. За правилами варіаційного числення, а саме перестановки операцій $\delta(\Delta)$ і d, можна записати

$$d\,\delta p_i = \delta \frac{\partial L}{\partial q_i} dt,$$

$$\Delta\,dp_i = d\Delta\,p_i = \Delta \frac{\partial L}{\partial q_i} dt.$$

Ж.-Л. Лаґранж домножує верхню строку на $\Delta\,p_i$, а нижню на $\delta\,p_i$, і віднімає нижній рядок від верхнього. Обчислюючи суму по усіх координатах, він отримує

---

[6] Термін «кінетичний потенціал» був введений Г. Гельмгольцем.

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\delta p_i \Delta q_i - \delta q_i \Delta p_i\right) = \text{const}.$$

Таким чином, в результаті варіювання узагальнених координат і узагальнених імпульсів час t виключається, і сума, яка стоїть у лівій частині рівності, зберігає свою величину під час руху. Цей результат в теорії варіацій довільних сталих називають лемою Лаґранжа [Идельсон, 1975, стор. 273]. Ж.-Л. Лаґранж подає його в наступному вигляді:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \gamma_k}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial \gamma_s}-\frac{\partial q_i}{\partial \gamma_s}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k}\right)=0. \qquad (4.12)$$

Суму, що стоїть під знаком похідної, називають дужками Лаґранжа і позначають $[\gamma_k, \gamma_s]$. Його основна лема стверджує незмінність усіх таких «дужок» під час руху (якщо підставити туди замість q_i і p_i їх вирази через t і довільні сталі $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2m}$). Ж.-Л. Лаґранж сам підкреслював важливість отриманого результату. Він писав: «Тут ми маємо нову дуже важливу властивість функції T, що виражає живу силу усієї системи, яка може дати загальний критерій для міркування про точність розв’язку, знайденого за допомогою будь-якого методу». Важливе застосування ця формула має для варіювання довільних сталих у механіці [Лагранж, 1950, стор. 418].

У подальшому багато корисних результатів із цієї формули отримали: С.Д. Пуассон, Р. Гамільтон, К.Г.Я. Якобі, М.В. Остроградський, Ж. Ліувілль, А. Пуанкаре та інші.

Таким чином була реалізована ідея Ж.-Л. Лаґранжа розглядати довільні сталі інтегрування рівнянь руху не як сталі, а як шукані функції часу, при підстановці яких у вирази для q_i і p_i, а потім у рівняння руху останні перетворюються у тотожність.

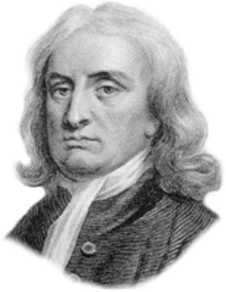
Р. Гамільтон у роботі «Second essay on a general method of dynamics» («Друге есе про загальний метод в динаміці») [Hamilton, 1835] розробив алгоритм, за яким при використанні так званих дужок Пуассона можна знайти усі γ_k в залежності від часу. Це складає основу сучасного методу довільних сталих.

К.Г.Я. Якобі розвинув метод Гамільтона далі в теорії збурень (небесна механіка) для інтегрування рівнянь збурень елементів орбіт планет [Якоби, 1936]. Фактично К.Г.Я. Якобі продовжив розвиток ідей Ж.-Л. Лаґранжа і С.-Д. Пуассона стосовно варіацій елементів еліптичних орбіт небесних тіл. Лему Лаґранжа про важливість дужок Пуассона (різновиду дужок Лаґранжа). Якобі переробив і оцінив як важливий результат для аналітичної механіки і для теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Великий вплив ідей Лаґранжа відчувається і у роботах М.В. Остроградського. У своїй роботі «Заметка о вариации произвольных постоянных» [Остроградский, 1959-1961, т. 2] М.В. Остроградський розвинув ідею Лаґранжа про варіацію довільних сталих для отримання інтегралів збереження енергії, руху центру мас системи і площин. В іншій своїй роботі – «О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики» [Остроградский, 1968, стор. 280-297], він продовжує розробляти метод Гамільтона-Якобі, використовуючи дужки Пуассона при інтегруванні канонічних рівнянь Гамільтона.

В подальшому ідеї Ж.-Л. Лаґранжа, викладені в його лемі (дужки Лаґранжа), розвивали Ж. Ліувілль [Liouville, 1849] і А. Пуанкаре [Poincare, 1892].

В механіці і математиці Лаґранж виконав роботу із систематизації отриманих результатів і їх обґрунтуванню.



Ісаак Ньютон
(1643 - 1727)
англ. Sir Isaac Newton

Гійом Франсуа Лопіталь
(1661- 1704)
фр. Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital

Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646 – 1716)
нім. Gottfried Wilhelm Leibniz

Жозеф Луї Лагранж
(1736 - 1813)
фр. Joseph Louis Lagrange

Видатний сучасник Ж.-Л. Лаґранжа В. Гете, який добре розумів характер цієї людини, писав про нього: «*Математик є бездоганним лише настільки, наскільки він є бездоганною людиною, наскільки він відчуває у собі прекрасне, притаманне істині, тільки тоді його творчість стає фундаментальною, чистою, ясною, натхненною, дійсно витонченою*» і далі «*Лаґранж був ідеальною людиною і саме тому великою. Якщо ідеальній людині надані таланти, то вона завжди стає благом людства, носієм щастя і шляхетності, будь вона художником, дослідником природи, поетом або кимось іншим*».

Навесні 1813 р. Ж.-Л. Лаґранж захворів. Три члени Інституту Франції, його друзі Г. Монж, Ласепед і Шапталь відвідали його 8 квітня. На цей час Ж.-Л. Лаґранж вже більше тижня знаходився у ліжку. Бесіда продовжувалась декілька годин. Ж.-Л. Лаґранж розповідав про найцікавіші моменти свого життя. Після цього візиту вчений втратив свідомість, а вранці, за день, 10 квітня він помер.

Під час свого останнього спілкування Ж.-Л. Лаґранж сказав колегам: «… *я відчув, що помираю, моє тіло потроху слабшає, мої духовні і фізичні здібності непомітно згасають: я з цікавістю спостерігаю поступовий прогрес втрати сил і я досягну кінця без жалю, без засмучення, тому що спуск дуже пологий … Я завершив свій шлях, я став досить відомим в математиці. Я не відчував ні до кого злоби, я нікому не зробив поганого і я хочу завершити свій шлях …*» [Delambre, 1867, стор. XLIV]. У таких лаконічних, стриманих, скромних словах Лаґранж дав оцінку свого життя.

«*Лаґранж – найвеличніша піраміда математичних наук*», – так оцінив Наполеон Бонапарт видатного вченого і найскромнішого математика XVIII ст. Жозефа-Луї Лаґранжа, якого він зробив сенатором, графом імперії і командором ордена Почесного Легіону.

4.2. Перетворення Лежандра. Нерівність Юнга. Теорема Ейлера про однорідні функції

Французький математик Адрієн Марі Лежандр (1752 – 1833) у своїх роботах з вивчення диференціальних рівнянь виявив одне важливе перетворення, яке має чудові властивості, що зумовили його застосування для розв’язання багатьох проблем аналізу, - так зване дуальне перетворення Лежандра. Це перетворення є фундаментальним у варіаційних основах будівельної механіки. Він також встановив достатню ознаку існування екстремуму у варіаційному численні. І хоча перетворення було відкрите і використане Л. Ейлером в 1779 р., широко відомим воно стало після того, як А.М. Лежандр використав його в 1787 р., саме у зв’язку з цим перетворення отримало ім’я А.М. Лежандра. Історично, справедливіше, мабуть було б, називати його перетворенням Ейлера або перетворенням Ейлера-Лежандра. Разом з тим, перший приклад цього перетворення знайдений у дослідженнях Г. Лейбніца. Узагальненням цього перетворення є перетворення Юнга-Фенхеля, а також відома нерівність Юнга, двоїсті за Юнгом функції.

Нагадаємо, що перетворенням Лежандра функції $f(\xi)$ називається нова функція

$$H(p) = -f(\xi) + p\xi,$$

де ξ є функцією від p: $p = f'(\xi)$.

Перетворення Лежандра є інволютивним, тобто його квадрат дорівнює тотожному перетворенню: якщо f при перетворенні Лежандра переходить у H, то перетворення Лежандра від H буде знову f.

Сутність перетворення Лежандра полягає у можливості двоїстого завдання кривої – як множини точок і як обвідної сімейства дотичних.

За означенням перетворення Лежандра, $F(p,\xi) = p\xi - f(\xi) \le H(p)$ для довільних ξ і p. Звідси випливає

$$p\xi \le f(\xi) + H(p). \qquad (4.13)$$

Отримана нерівність називається *нерівністю Юнга*.

Аналогічні міркування справедливі і для функцій декількох незалежних змінних. Припустимо, що $f(\xi)$ – опукла функція векторної змінної $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, тобто квадратична форма $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} d\xi, d\xi\right)$ додатно визначена. Тоді перетворенням Лежандра називається функція $H(\mathbf{p})$ векторної змінної $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, визначена рівностями, аналогічними попереднім:

$$H(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p},\xi(\mathbf{p})) = \max_{\xi} F(\mathbf{p},\xi)\,, \quad F(\mathbf{p},\xi) = (\mathbf{p},\xi) - f(\xi)\,, \tag{4.14}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\,. \tag{4.15}$$

Всі попередні міркування без змін переносяться і на цей випадок. Для функцій декількох змінних також має місце нерівність Юнга

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i \le H(p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n) + f(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_n)\,, \tag{4.16}$$

де $p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n$ і $H(p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n)$ визначаються формулами (4.15) і (4.14).

Нагадаємо, що функція однієї або декількох змінних називається *однорідною*, якщо вона задовольняє таку умову: при одночасному множенні всіх аргументів функції на один і той самий довільний множник значення функції множиться на деякий степінь цього множника. Тобто для однорідної функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при всіх значеннях $x_1,x_2,\ldots,x_n$ і довільному t має виконуватися рівність

$$f(tx_1,tx_2,\ldots,tx_n) = t^k f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,. \tag{4.17}$$

Показник k називається *степенем однорідності* функції.

В інших позначеннях: однорідна функція k-го степеня – це є числова функція $f: R_n \to R$, така що для довільного $\mathbf{x} \in R_n$ і довільного $t \in R$ справедлива рівність

$$f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})\,.$$

Згідно із теоремою Ейлера, якщо у виразі повного диференціала однорідної функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ степеня k

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

замінити диференціал кожної незалежної змінної на цю змінну, дістанемо функцію $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, помножену на степінь однорідності k:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n = k \cdot f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,. \tag{4.18}$$

Теорема Л. Ейлера про однорідні функції має широке застосування у різних галузях математики, механіки, фізики. Однорідні функції також застосовуються у економіці для моделювання «масштабованих» явищ.

Рівність (4.18) має назву *формули Ейлера*. Наведена теорема стверджує, що цю рівність задовольняє довільна однорідна функція степеня *k*, яка має неперервні частинні похідні. Покажемо обернене: будь-яка функція, що є неперервною разом зі своїми частинними похідними і задовольняє рівність Ейлера (4.18), необхідно є однорідною функцією степеня *k*.

Наведена теорема Ейлера по суті стверджує справедливість рівності Юнга для однорідних функцій. Дійсно, якщо позначити

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{4.19}$$

то подання (4.18) набере вигляду

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (k - 1) \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.20}$$

За умови, що детермінант, утворений із похідних

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

не дорівнює нулю виразимо із (4.19) x_i через p_i, підставимо у другий доданок правої частини (4.20) і отримаємо функцію $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Отже,

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

− рівність Юнга.

Якщо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ − квадратична форма, рівність (6.11) набирає вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

або

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Запишемо квадратичну форму у вигляді $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, де $\mathbf{A}$ – матриця квадратичної форми. Оскільки $\mathbf{A}$ – симетрична матриця, то $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. За теоремою Ейлера $\mathbf{p}^T \mathbf{x} = 2 f(\mathbf{x})$, або $\mathbf{p}^T \mathbf{x} = 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. Звідки $\mathbf{p}^T = 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{x}^T = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}$. Тоді $H(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}$. Отже $H(\mathbf{p}) = \frac{1}{4} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}$.

Зауважимо, якщо квадратична форма має вигляд $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, то $H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}$.

Значення квадратичної форми $f(\mathbf{x})$ і її перетворення Лежандра $H(\mathbf{p})$ у відповідних точках співпадають: $f(\mathbf{x}) = H(\mathbf{p})$.

4.3. Двоїстість варіаційних принципів

Відомо, що одна й та сама система рівнянь може бути системою рівнянь Ейлера для різних функціоналів. Наприклад, рівняння аналітичної механіки систем із скінченним числом ступенів свободи можна отримати виходячи із двох різних варіаційних принципів: принципу Гамільтона-Остроградського і принципу Гамільтона-Пуанкаре. В інших розділах механіки також пропонувалися різні варіаційні принципи для одних і тих самих систем рівнянь: принцип Діріхле і принцип Томсона у механіці нестисливої рідини і в електростатиці, принцип Лаґранжа, принцип Кастільяно в теорії пружності, принцип максимуму Понтрягіна у варіаційних задачах з обмеженнями тощо. Пізніше стало зрозуміло, що всі такі принципи ґрунтуються на одній простій загальній ідеї – ідеї двоїстості.

Для найпростішої задачі про центральний розтяг стержня із жорсткістю *EF* силою *N* на правому кінці отримаємо таку постановку двоїстих за Лаґранжем задач.

Пряма задача

$$\Pi^{\text{Л}}(u)=\frac{1}{2}\int_a^b EF(u')^2\,dx-\int_a^b q_x u\,dx-$$

$$-N_b u_b\to\min.$$

$$u_a=0.$$

функціонал має мінімум, який дорівнює

$$\Pi^{\text{Л}}_{\min}(u)=-\frac{N_b^2 l}{2EF}.$$

Двоїста задача

$$\Pi^{\text{К}}(N)=-\frac{1}{2}\int_a^b \frac{N^2}{EF}\,dx\to\max.$$

$$\frac{dN}{dx}+q_x=0;\ N=N_b.$$

функціонал має максимум, який дорівнює

$$\Pi^{\text{К}}_{\max}(N)=-\frac{N_b^2 l}{2EF}.$$

Функції $\Pi^{\text{Л}}(u)=\frac{EF}{2l}u_b^2$ і $\Pi^{\text{К}}(N)=-\frac{1}{2}\frac{N_b^2}{EF}$ є двоїстими за Юнгом, і нерівність Юнга може бути записана у вигляді рівності:

$$\frac{EF}{2l}u_b^2+\frac{1}{2}\frac{N_b^2 l}{EF}=N_b u_b,$$

яка являє собою принцип збереження енергії, тобто рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил.

Перетворення Лежандра у випадку функції зусиль і переміщень скінченного числа змінних

$$\mathbf{N}^T=\{N_1,N_2,\ \dots\ ,N_n\},\ \boldsymbol{\Delta}^T=\{\Delta_1,\Delta_2,\dots\ ,\Delta_n\}$$

будується наступним чином [Баженов, 2014]:

Потенціальна енергія пружної деформації

$$U(\boldsymbol{\Delta})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Delta}.$$

Доповнювальна потенціальна енергія

$$U^{\text{доп}}(\mathbf{N})=\frac{1}{2}\mathbf{N}^T\mathbf{B}\mathbf{N}.$$

Перетворення Лежандра

$$\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K\Delta}+\frac{1}{2}\mathbf{N}^T\mathbf{BN}=\mathbf{N}^T\mathbf{\Delta}\,.$$

При цьому повинні бути виконані умови рівноваги, сумісності деформацій, граничні умови.

Умова, що перетворює нерівність Юнга у рівність

$$\mathbf{N}=\mathbf{K\Delta},\ \text{або}\ \mathbf{\Delta}=\mathbf{BN}\,,$$

при цьому матриці $\mathbf{K}$ і $\mathbf{B}$, які являють собою відповідно матриці жорсткості і піддатливості є взаємно оберненими $\mathbf{KD}=\mathbf{E}$. Ці матриці є матрицями других похідних (матрицями Гессе) від потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії, їх коефіцієнти дорівнюють:

$$k_{ij}=\frac{\partial^2 U(\mathbf{\Delta})}{\partial\Delta_i\partial\Delta_j};\quad \delta_{ij}=\frac{\partial^2 U^{\text{доп}}(\mathbf{N})}{\partial N_i\partial N_j}.$$

Згідно з теоремою Донкіна, якщо дві двоїсті за Юнгом функції потенціальної енергії $U(\mathbf{\Delta})$ і $U^{\text{доп}}(\mathbf{N})$ залежать від одного і того ж параметра або групи параметрів, які не є активними, тобто не беруть участі у перетворенні Лежандра (η), то має місце залежність:

$$\frac{\partial U(\mathbf{\Delta})}{\partial\eta}=-\frac{\partial U^{\text{доп}}(\mathbf{N})}{\partial\eta},$$

$$U(\Delta)=\frac{1}{2}k\Delta^2,\qquad U^{\text{доп}}(N)=\frac{1}{2}\frac{N^2}{k},$$

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial k}=\frac{1}{2}\Delta^2,\qquad \frac{\partial U^{\text{доп}}(N)}{\partial k}=-\frac{1}{2}\frac{N^2}{k^2}=-\frac{1}{2}\Delta^2.$$

Відповідні екстремальні задачі у перетворенні Лежандра дають двоїсті за Лаґранжем постановки екстремальних задач.

Пряма задача	*Двоїста задача*
$\left\{\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K\Delta}-\bar{\mathbf{N}}^T\mathbf{\Delta}\right\}\to\min$,	$\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{N}^T\mathbf{BN}+\mathbf{N}^T\bar{\mathbf{\Delta}}\right\}\to\max$,
за умови	за умови
$\mathbf{\Delta}=\bar{\mathbf{\Delta}}$.	$\mathbf{N}=\bar{\mathbf{N}}$.

Зазначимо, що *спряженою функцією* до функції $f:X\to R$, визначеної на векторному просторі *X,* що знаходиться у двоїстості (відносно білінійної форми

$\langle x,y\rangle$) з векторним простором Y називається функція на Y, що задається співвідношенням [Математическая энциклопедия. Т. 5, 1985, стор. 82-83]

$$f^*(y)=\sup_{x\in X}\left(\langle x,y\rangle - f(x)\right). \tag{4.21}$$

Для функції, заданої на Y, спряжена функція визначається аналогічно.

Якщо $f(x)$ – гладка, зростаюча на нескінченності швидше лінійної функція, то $f^*(y)$ є перетворенням Лежандра функції $f(x)$.

Адрієн Марі Лежандр *(1752–1833)*
фр. Adrien-Marie Legendre

Вільям Генрі Юнг (Янг) *(1863–1942)*
англ. William Henry Young

Леонард Ейлер *(1707–1783)*
нім. Leonhard Euler

Вільям Фішберн Донкін *(1814–1869)*
англ. William Fishburn Donkin

Для одновимірних строго опуклих функцій означення, рівносильне (4.21), було дано В. Юнгом у інших термінах. В. Юнг визначив спряжену функцію до функції

$$f(x)=\int_0^x \varphi(t)dt,$$

де $\varphi(t)$ неперервна і строго зростає, співвідношенням

$$f^*(y)=\int_0^y \psi(t)dt,$$

де $\psi(t)$ - функція, обернена до $\varphi(t)$.

Для опуклої функції і спряженої до неї виконується нерівність **Юнга**

$$\langle x,y\rangle \le f(x)+f^*(y).$$

Спряжена функція – опукла замкнена функція. Оператор спряження ${}^*: f\to f^*$ однозначно відображає сукупність власних опуклих функцій на X на сукупність власних опуклих функцій на Y.

Література

Аппель П. Руководство теоретической (рациональной) механики, том 1. – М., 1911.

Аппель П. Теоретическая механика. Т. I. Перевод с 5-го французского издания И.Г. Малкина. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.

Баженов В.А. Варіаційні основи будівельної механіки. Підручник. - К.: Каравела, 2014. – 877 с.

Баженов В.А. Варіаційні принципи будівельної механіки. Історія становлення та розвитку / В.А. Баженов, В.О. Геращенко, М.В. Гончаренко; під загал. ред. проф. В.А. Баженова. - К.: Каравела, 2015. – 762 с.

Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 2005, ISBN 978-5-9221-0576-7

Боголюбов А.Н. Математики и механики. Биографический справочник. – К.: Наук. думка, 1983. - 639 с.

Виппер Ю.Ф. Семейство математиков Бернулли. - М., 1875.

Галилео Галилей. Сочинения, т. I, «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Русский перевод С.Н. Долгова. Серия «Классики естествознания». - М.-Л.: Гос. тех.-теор. изд., 1934. – 695 с.

Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М., 1966. - 300 с.

Гельфанд И.М., Фомин СВ. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. – М.: АН СССР, 1959. – 386 с.

Гнеденко Б.В. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: ГИТТЛ, 1952.

Гнеденко Б.В., Погребысский И.Б. Михаил Васильевич Остроградский. 1801—1961. - М.: изд-во АН СССР, 1963.

Голдстейн Г. Классическая механика. - М.: Гостехиздат, 1957.

Григорьян А.Т. Очерки истории механики в России. — М.: Издательство Академии наук СССР, 1961. — 291 с.

Григорьян А.Т. Михаил Васильевич Остроградский. - М.: изд-во АН СССР, 1964.

Григорьян А.Т. Механика от античности до наших дней. - М.: Наука, 1974. - 479 с.

Григорьян А.Т., Ковалев Б.Д. Даниил Бернулли. — М.: Наука 1981. — 318 с.

Дорофеева А.В. Развитие варационного исчисления, как исчисления вариаций. – «Историко-матем. иссл.», вып. XIV, М. – Физматгиз, 1961. – С. 101-181.

Дюэм П. Развитие механики. 1903.

Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. – М., Наука, 1975.

История механики в России / Под ред. А. Н. Боголюбова, И. З. Штокало. — Киев: Наукова думка, 1987. – 391 с.

История механики с древнейших времен до конца XVIII века. / Под редакцией А.Т. Григорьяна, И.Б. Погребысского. – М.: Наука, 1971. – 298 с.

История механики с конца XVIII века до середины XX века. / Под редакцией А.Т. Григорьяна, И.Б. Погребысского. – М.: Наука, 1972. – 414 с.

Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. – М.-Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1935.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.

Коперник. Галилей. Кеплер. Лаплас и Эйлер. Кетле: Биографические повествования / Сост. Н.Ф. Болдырева. — Челябинск: Урал, 1997. — 452 с. — (Жизнь замечательных людей. Биографическая библиотека Ф. Павленкова). — ISBN 5-88294-071-0.

Космодемьянский А.А. Очерки по истории механики. – М.: Наука, 1982. – 295 с.

Котек В.В. Леонард Эйлер. — М.: Учпедгиз, 1961. — 106 с.

Крылов А.Н. Леонард Эйлер // Леонард Эйлер. 1707 — 1783. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. — М.-Л.: Издательство Академии наук СССР, 1935. — С. 1 — 28.

Крылов А.Н. Жозеф Луи Лагранж. - В сб.: Ж.Л. Лагранж (1736-1936). Сб. статей к 200-летию со дня рождения. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1937.

Крылов А.Н. Ньютон и его значение в мировой науке (1643 – 1943). – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1943. – 40 с.

Кудрявцев П.С. Исаак Ньютон, 1643—1943: к 300-летию со дня рождения / А. Тимирязев. — Учпедгиз, 1943. — 143 с.

Кудрявцев П.С. История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1948. — Т. 1. От античной физики до Менделеева.

Кудрявцев П.С. Исаак Ньютон. — Учпедгиз, 1955. — 124 с.

Кудрявцев П.С. Курс истории физики. — М.: Просвещение, 1974.

Лаврентьев М., Люстерник Л. Основы вариационного исчисления. Т. 1, ч. II. – М.-Л.: ОНТИ, НКТП, 1935. – 399 с.

Лаврентьєв М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. Издание 2-е переработанное. – М.: Гостехиздат, 1950. - 296 с.

Лагранж Ж. Аналитическая механика, том 1. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950. — 594 с.

Лагранж Ж. Аналитическая механика, том 2. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950. — 440 с.

Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики, ч. 1. – М.: ОНТИ, 1934.

Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. – Т.1, ч. 2. – М., 1962.

Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х т. Т. 1. - М.: 1982. - С. 235-284.

Лопиталь Г.Ф. Анализ бесконечно малых. Серия «Классики естествознания, Гостехиздат, - М.-Л., ГТТИ, 1935.

Математическая энциклопедия. Т. 1, М., 1977. Т. 2, М., 1979. Т. 3, М., 1982. Т. 4, М., 1984. Т. 5, М., 1985.

Мах Э. Механика. – С.-Пб., 1909. – 448 с.

Мах Э. Механика. Историко-критический очерк её развития. - Ижевск: РХД, 2000. - 456 с.

Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Моисеев Н.Д. Очерки по истории механики. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 478 с.

Національна. Академія наук України. – К.: "Фенікс", 1998.

Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Пер. рос. з лат. А.Н. Крилова, Изд. АН СССР, М.-Л., 1936.

Остроградский М.В. Лекции по аналитической механике, Собр. соч., т. 1, ч. 2, М.-Л., 1946.

Остроградский М.В. Полное собрание трудов в двух томах. – К.: Изд-во АН УССР, 1959-1961.

Остроградский М.В. Избранные труды. – М.: АН СССР, 1968. – 583 с.

Полак Л.С. (ред.) Вариационные принципы механики. Сборник статей классиков науки. М.: Физматгиз, 1959

Полак Л.С. Вариационные принципы механики. Изд. 2-е, испр. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. - 600 с.

Прудников В.Е. М.В. Остроградский. — В кн.: Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. - М.: Учпедгиз, 1956.

Пуанкаре А. Наука и метод. – С.-Пб., 1910.

Пуанкаре А. Избранные труды: В 3 т.– М.: Наука, 1974.– 584 с.

Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – 561 с.

Тюлина И.А. История и методология механики. – М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 282 с.

Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник. — Киев: Наукова думка, 1977. - 512 с.

Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник / Под ред. А. И. Ахиезера. — Изд. 2-е, испр. и дополн. — М.: Наука, 1983. — 400 с.

Чернов С.Н. Леонард Эйлер и Академия наук // Леонард Эйлер (1707 — 1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. — М. — Л.: Издательство Академии наук СССР, 1935. — С. 163-238.

Шмутцер Э., Шютц В. Галилео Галилей. — М.: Мир, 1987. -142 с.

Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М. — Л.: ГТТИ, 1934.

Эйлер Л. Диссертация о принципе наименьшего действия, с разбором возражений славнейшего проф. Кёнига, выдвинутых против этого принципа (1753). В сб. Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С.Полака. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 96 – 108.

Эйлер Л. Интегральное исчисление, т. III. - М.: Физматгиз, 1958.

Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 163 с.

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

Юшкевич А.П. Леонард Эйлер. Жизнь и творчество // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сборник статей. — М.: Наука, 1988. — С. 15-46.

Якоби К. Лекции по динамике. - М.-Л., ОНТИ, 1936.

Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974.– 488 с.

Courtivron O. de. Recherches de Statique et de Dynamique ou l'on donne un nouveau principe general pour la consideration des corps animes par des forces variables, suivant une loi quelconque, Memoires de l'Academie des Sciences de Paris, 1749.

D'Alembert J.R. Traité de dynamique, dans lequel les lois de l'equilibre & du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible. - Paris: David L'aîné, 1743.

D'Alembert J.R. Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange - Œuvres de Lagrange, V.1, Paris, 1867, p. XVI.

Delambre J.B.J. Oeuvres de Lagrange. I. - Paris, 1867.

De l'Hospital G.F. Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes. - Paris, 1696.

Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. — Marc Michel Bousquet, 1744.

Fleckenstein J.O. Johann und Jakob Bernoulli. – Basel, 1949.

Fuss P.H. Correspondence mathematique et physique, лист 26, том II. - С.-Петербург, 1843.

Galileo Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. In Leida, MDCXXXVIII. – 1638.

Gauss C.F. (1829). Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. Crelle's Journal 4: 232-235.

Goldstine H. A history of the calculus of variations from the 17th through 19th century. – N.Y.: Springer, 1980. – 410 p.

Hamilton W.R. Second essay on a general method of dynamics, I. - Philos. Trans. Roy. Soc., 1835. pp. 95-144.

Helmholtz H. Dynamik continuerlich verbreiteten Massen. — Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius Barth. — 1902. — 247.

Hertz H. Über die Induktion rotierender Kugeln. – Berlin: 1880.

Hilbert D. The Foundations of Geometry. The open court publishing company, La Salle, Illinois, 1950.

Hilbert D. Uber das Dirichlet'sche Prinzip. In: Festschrift zur Feier des 150jahrigen Bestehens der Kgl. Ges. der Wiss. Zu Gottingen. Berlin: Weidenhammer. - 1901.

Isis. XX. - Brugge, Belgique, 1933

Lagrange J.L. Mécanique analytique, 1re éd. – Paris. – 1788.

Leibniz G.W. Demonstrationes novae de Resistentis solidorum // Acte Eruditorum Lipsiae 1684. — P. 319 — 325.

Lejeune-Dirichlet P.G. Vorlesungen uber Zahlentheorie. – Braunschweig, 1863.

Leonardo da Vinci. Codices Madrid (Codex Madrid I), ed. L. Reti, German facs. ed. Frankfurt a.M.: S. Fischer-Verlag, 1974.

Liouville J. Memoire sur l'mtegration des equations differentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points materieles. - «Journ. math.», 1849, XIV. 257-299.

Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-critisch dargestellt, Leipzig, 1883.

Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 7th, rev. ed. Leipzig: F.A. Brockhaus, 1912.

Ostrogradsky M. Sur les integrales des equations generales de la dynamique. Melanges de L'academie de St. Petersbourg, 6/18 oct 1848, изб. произв., изд. АН СССР, 1958.

Poincare H. Les methodes nouvelles de la Mécanique celeste, t. 1. Paris, 1892. pp. 167-193.

Spiess O. Die Mathematiker Bernoulli. – Basel, 1948.

Truesdell C. Six Lectures on Modern Natural Philosophy. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1966.

Truesdell C.A. Essays in the history of mechanics. - Berlin: Springer Verlag, 1968. - 384 p.

Truesdell C. Leonard Euler, supreme geometer (1707-1783) // Studies in XVIIIth Century Culture, *v. 2. Case Western Reserve Univ. Press, 1972, p. 51-95.*

Varignon P. Nouvelle mécanique, 2, Paris, 1725.

Нарис 5

ВАРІАЦІЙНІ І ЕКСТРЕМАЛЬНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ. ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ

Статика - це наука про рівновагу сил

Ж.-Л. Лагранж

Як відомо, принцип віртуальних швидкостей перетворює будь-яку проблему статики в питання чистої математики, а за допомогою принципу Даламбера динаміка, в свою чергу, зводиться до статики. Звідси випливає, що жоден основний принцип рівноваги і руху не може істотно відрізнятися від двох згаданих нами вище принципів, і що яким би не був цей принцип, його завжди можна розглядати як більш-менш безпосередній висновок з них.

Й.К.Ф. Гаусс

Вступ

Кожний варіаційний принцип стверджує, що для деякого класу задач, якщо задані умови задачі, то з усіх уявних станів, процесів тощо, у певному розумінні сумісних із цими умовами, в дійсності реалізується такий стан, такий процес, який надає деякому характерному для цього принципу функціоналу стаціонарне значення. Іноді говорять не про стаціонарне, а про екстремальне значення, що не завжди рівноцінно. Варіаційний принцип еквівалентний деякій системі диференціальних рівнянь. Тож варіаційний принцип характеризується класом задач, умов сумісності процесів, що порівнюються з умовами задачі і визначеним для цих процесів функціоналом, який повинен приймати стаціонарне або екстремальне значення.

Щодо термінології слід зазначити, що, строго кажучи, термін «варіаційний принцип» слід було б вживати тільки стосовно систем з нескінченним числом ступенів вільності, зберігаючи для систем зі скінченною кількістю ступенів вільності термін «екстремальний принцип». Але частіше усі екстремальні принципи називають варіаційними незалежно від скінченної чи нескінченної кількості ступенів вільності систем, до яких ці принципи застосовуються. Тим більше, що сутність принципу не змінюється в залежності від того, до якої системи він застосовується [Гольденблат, 1957].

Взагалі мають місце дві основні групи варіаційних принципів. До однієї з них, яка починається з принципів Ферма, Мопертюї, Лаґранжа, Кастільяно, Гамільтона та ін. і має справу із задачами фізики і механіки та інших дисциплін, у найбільшій мірі підходять наведені вище визначення. Тут йдеться про вивчення об’єктивно існуючих процесів. Такий принцип може бути виведений із локальної теорії процесу, з його диференціальних рівнянь Ейлера для функціонала, який характеризує принцип. У цьому випадку більше йдеться про стаціонарне значення функціонала, оскільки для локальних властивостей екстремальність цього значення неістотна. Разом з тим, можуть бути класи задач, для яких екстремальність несе додаткову інформацію, наприклад, про дійсність принципу. Слід зазначити, що, якщо варіаційний принцип є еквівалентним диференціальному рівнянню, цей принцип часто є кориснішим за рахунок його більшої універсальності, а також зручності застосування чисельних методів.

Друга основна група варіаційних принципів має справу із задачами теорії математичної економіки, оптимального управління. Тут йдеться про розробку у заданих умовах певної стратегії, яка забезпечувала б за цих умов максимальну користь. Значення цієї користі, функції цілі і являє собою функціонал, причому, як правило, цей функціонал необхідно максимізувати. Відповідна математична теорія була створена у середині п’ятидесятих років минулого століття і отримала назву теорії оптимального управління. Теорія оптимального управління являє собою синтез ідей і методів дослідження класичного варіаційного числення, а також сучасних.

Подібно математичному аналізу побудованому у XVIII ст. по аналогії з основними алгебраїчними операціями, варіаційне числення у той же час будувалось по аналогії з відомими операціями аналізу і покладене в основу найновіших математичних методів теорії оптимального управління. Як підкреслив відомий американський математик Лоуренс Янг [Янг, 1974]: «*Тепер видно, що задача Лаґранжа по суті не відрізняється від задачі оптимального управління: тільки остання являє собою більш сучасне формулювання першої. Інколи вказують на невеликі помітні розбіжності, але насправді вони є зовсім несуттєвими*».

Бурхливий розвиток теорії оптимального управління і його застосувань у практичних задачах, відомий принцип максимуму Понтрягіна – все це, з одного боку, стимулювало інтерес до варіаційних задач, але, з іншого, призвело до досить розповсюдженого ставлення до класичного варіаційного числення, як до деякого анахронізму. Насправді, як визначає Л. Янг [Янг, 1974], це не зовсім так. І справа тут не тільки у тому, що варіаційне числення за Л. Янгом є «*літописом математичних понять. А оскільки зараз прогрес у математиці багато у чому пов'язаний з появою нових понять, варіаційне числення являє собою актуальний напрям подальших досліджень, і в цьому відношенні жодна галузь математики не іде ні у яке порівняння з варіаційним численням*».

Дослідження частинних задач варіаційного числення, або, як ми будемо говорити, частинних варіаційних задач, почалося надзвичайно давно. Це пояснюється тим, що в багатьох ситуаціях людину влаштовує тільки кращий з можливих варіантів. Так ми приходимо до проблем оптимізації, тобто до проблем знаходження максимуму або мінімуму. Деякі з цих задач були розв'язані за допомогою елементарних засобів математичного аналізу, однак у більшості випадків для їх вирішення потрібні складніші методи.

Насправді ці задачі вимагають не тільки нових методів, але, що більш істотно, нових понять. За такі задачі не варто братися голіруч; спочатку слід подбати про хороше спорядження. Необхідні поняття вироблялися досить повільно, і хоча зараз вони пронизують всю сучасну математику, багато хто навіть не підозрює, що ці поняття виникли саме у варіаційному численні. Це частково пояснюється тим, що в варіаційному численні ще збереглася старомодна термінологія.

Вже сама назва предмета є чисто історичною; вона пов'язана з одним методом, висхідним до Л. Ейлера і заснованим на так званих варіаціях. Цей метод колись грав у варіаційному численні важливу роль, однак зараз він представляє лише другорядний інтерес. Варіаційне числення фактично стало одним з розділів функціонального аналізу і займає в ньому таке ж місце, як теорія максимумів і мінімумів у звичайному аналізі.

А якщо це так, то й не дивно, що поняття, які, як прийнято думати, відносяться до функціонального аналізу або випливають з нього, насправді вперше виникли (можливо у менш елегантній формі) у варіаційному численні. Так, ряд основних засобів сучасної математики, - наприклад, узагальнені функції («розподілу») Л. Шварца, нерівність Юнга, а також опуклі фігури і їх поляри - можна в зародковій формі виявити в класичних методах варіаційного числення.

Це означає, що варіаційне числення виступає не тільки як галузь математики, але і як літопис математичних понять. А оскільки зараз прогрес в математиці багато в чому пов'язаний саме з появою нових понять, досліджуваний тут предмет надає нам конче необхідне керівництво до подальших досліджень, і в цьому відношенні жодна галузь математики не може зрівнятись з варіаційним численням.

Що стосується безпосереднього зв'язку варіаційного числення з іншими розділами математики, то читач скоро зрозуміє, яку важливу роль відіграють у ньому фундаментальні питання чистої логіки, а в теорії Морса зможе почути звучання гомології, що ріднить її як з алгеброю, так і з топологією. Топологам, крім того, відомі важливі застосування теорії Морса або методів, заснованих на подібних до їх предмету ідеях. Однак основне застосування варіаційне числення знаходить в аналізі і геометрії або у зв'язку з отриманням певних нерівностей і оцінок (як в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними), або при розробці якісно нових методів і понять (як це було у Г.Рімана, який застосовував до конформних відображень, а також в теорії потенціалу «принцип мінімуму Діріхле» - принцип, що отримав згодом обґрунтування в знаменитій роботі Д. Гільберта).

З наведеного можна було б зробити висновок, що варіаційне числення - наука досить «чиста», що має віддалене відношення до прикладної математики. Насправді якраз навпаки. Не тільки конкретні задачі варіаційного числення відіграють основну роль в повсякденному житті і в таких галузях як економіка, техніка тощо (адже людство намагається діяти найкращим чином в межах наявних можливостей), але й сама ця теорія усім своїм розвитком зобов'язана потребам оптики, а пізніше потребам космічних наук та інших подібних питань.

До речі, серед відомих «проблем Д. Гільберта» деякі (зокрема, двадцята) присвячені варіаційному численню [Янг, 1974].

Існує навіть думка, що історія механіки і фізики – це історія спроб пояснити все те, що відбувається у світі, що нас оточує, за допомогою невеликої кількості універсальних законів і загальних принципів. Найбільш вдалі і плідні спроби пов'язані з ідеєю про те, що явищам, які ми спостерігаємо, притаманні деякі екстремальні властивості і загальні принципи мають варіаційний характер, тобто стверджують, що у реально існуючих процесах деякі величини досягають свого максимального або мінімального значення [Бердичевский, 2005].

Варіаційні принципи механіки мають велике теоретичне і прикладне значення, оскільки:

- виявляють загальну енергетичну природу досліджуваних явищ;
- дають змогу автоматично отримати рівняння рівноваги (руху), статичні граничні умови або рівняння сумісності деформацій і кінематичні граничні умови, які інколи не можуть бути строго отримані іншими методами;
- функціонал, який підлягає варіюванню, має цілком визначений фізичний зміст і інваріантний відносно перетворення координат. Тобто, якщо варіаційний принцип сформульований в одній системі координат, то можна отримати визначальні рівняння в іншій системі координат, а потім здійснити варіювання. Наприклад, якщо варіаційний принцип був сформульований у прямокутній

декартовій системі координат, то визначальні рівняння у циліндричній або сферичній системі координат можуть бути отримані за допомогою зазначеної процедури. Ця властивість робить варіаційні методи надзвичайно ефективними при дослідженні конструкцій;

- варіаційне формулювання є зручним для виконання звичайних математичних процедур, а саме перетворення даної задачі у еквівалентну, яка розв’язується простіше вихідної задачі. У варіаційному формулюванні з додатковими умовами це перетворення здійснюється за допомогою множників Лаґранжа. Таким чином можна отримати сімейство варіаційних принципів, еквівалентних один одному. До таких перетворень, зокрема, відноситься відоме перетворення Фрідріхса;
- суттєвим є те, що іноді варіаційні принципи приводять до формул для верхньої і нижньої оцінок задачі. Звичайно при оцінці точності отриманих таким чином розв’язків слід дотримуватись обережності;
- дають змогу знаходити розв’язки задач, оминаючи складання і розв’язок диференціальних рівнянь, за допомогою так званих прямих методів варіаційного числення, найзручніших для реалізації у сучасних чисельних процедурах.

Варіаційні принципи набули особливого значення лише у даний час у зв’язку із розвитком методу скінченних елементів, який отримав широке розповсюдження починаючи з піонерної роботи Дж. Тернера [Turner et al. 1956], робіт Р. Клафа [Clough, 1960], Дж. Аргіриса [Argyris, 1954, 1955, 1957], О. Зенкевича [Zienkiewicz & Cheung, 1967] та інших. За тим неодноразово було доведено, що варіаційні принципи є ефективним засобом у математичному формулюванні методу скінченних елементів і що, навпаки, прискорений розвиток методу скінченних елементів стимулював удосконалення варіаційних принципів.

У механіці суцільного середовища існує багато різних і на перший погляд не пов’язаних між собою варіаційних принципів. Варіаційні постановки задач можуть бути представлені або у формі інтегральних тотожностей, які в механіці розглядаються як варіаційні начала і носять назву варіаційних рівнянь, або у формі вимог стаціонарності відповідних функціоналів, що в механіці розглядаються як варіаційні принципи. Для систематизації за основу обирають варіаційне рівняння для суцільного середовища. При цьому варіаційні принципи можуть мати різний характер в залежності від того, які функції варіюються, а які використовуються як залежності обмежень. Подальші перетворення основані на ідеї двоїстості. Прямій задачі мінімізації функціонала Лаґранжа відповідає двоїста задача максимізації функціонала Кастільяно із протилежним знаком. При цьому екстремальні значення відповідних функціоналів співпадають. За такою схемою будуються і змішані функціонали.

5.1. Принцип можливих переміщень

Принцип можливих переміщень – диференціальний варіаційний принцип класичної механіки, що виражає найбільш загальні умови рівноваги механічних систем з ідеальними в'язями.

Згідно з цим принципом механічна система перебуває в рівновазі в деякому положенні тоді і тільки тоді, коли сума елементарних робіт заданих активних сил на будь-якому можливому переміщенні, що виводить систему з розглянутого положення, дорівнює нулю або є меншою за нуль:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu \leq 0 \qquad (5.1)$$

у будь-який момент часу.

Можливими переміщеннями системи називаються елементарні (нескінченно малі) переміщення $\delta\mathbf{r}_\nu$ точок системи, що допускаються в даний момент часу накладеними на систему в'язями. Проекції можливих переміщень на декартові координатні осі називаються варіаціями декартових координат [Математическая энциклопедия, 1977].

Якщо в'язі є утримуючими (двосторонніми), то можливі переміщення зворотні, і в умові (5.1) слід брати знак рівності; якщо ж в'язі є неутримуючими (односторонніми), то серед можливих переміщень є незворотні. При русі системи під дією активних сил в'язі діють на точки системи з деякими силами реакцій $\mathbf{R}_\nu$ (пасивні сили), у визначенні яких передбачається повністю врахованими механічна дія в'язей на систему (в тому сенсі, що в'язі можна замінювати викликаними ними реакціями) (аксіома звільнюваності). В'язі називаються ідеальними, якщо сума елементарних робіт їх реакцій $\sum \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \geq 0$, причому знак рівності має місце для зворотних можливих переміщень, а знаки рівності або більше нуля - для незворотних переміщень. Положення рівноваги системи - такі положення $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t_0)$, в яких система буде залишатися весь час, якщо вона поміщена в ці положення з нульовими початковими швидкостями $\mathbf{v}_\nu(t_0) = 0$; при цьому передбачається, що рівняння в'язей задовольняються при будь-якому t значеннями $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t_0)$ і $\mathbf{v}_\nu = 0$. Активні сили в загальному випадку вважаються заданими функціями $F_\nu(t, r_\mu, v_\mu) \in C^1$, а в умові (5.1) слід вважати $F_\nu(t, r_\mu(t_0), 0)$.

В умові (*) містяться всі рівняння і закони рівноваги системи з ідеальними в'язями, завдяки чому можна сказати, що вся статика зводиться до однієї загальної формули (5.1).

Слід зазначити, що в курсі аналітичної механіки формулюється принцип *віртуальних* переміщень. При цьому під *віртуальними* переміщеннями розуміють нескінченно малі переміщення, які припускаються в'язями, при "замороженому часі", а не при зафіксованому, як у випадку можливих переміщень. Тобто віртуальні переміщення відрізняються від можливих, тільки коли в'язі є реономними (явно залежать від часу).

Якщо, наприклад, на систему накладено l голономних реономних в'язей:

$$f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, l},$$

то можливі переміщення $\Delta\mathbf{r}$ - це ті, які задовольняють рівність

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}}\cdot\Delta\mathbf{r}+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\Delta t=0, \qquad \alpha=\overline{1,l},$$

а віртуальні $\delta\mathbf{r}$:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}}\cdot\delta\mathbf{r}=0, \qquad \alpha=\overline{1,l}.$$

Віртуальні переміщення, взагалі кажучи, не мають відношення до процесу руху системи - вони вводяться лише для того, щоб виявити існуючі в системі співвідношення сил і отримати умови рівноваги. Малість переміщень потрібна для того, щоб можна було вважати реакції ідеальних в'язей незмінними.

Зауважимо, що у формуліровки варіаційних принципів і методів можливі переміщення входять не самі по собі, а як множники в складі виразів можливої роботи. Можливою роботою сили $\mathbf{F}$, що відповідає можливому переміщенню $\Delta\mathbf{r}$, називається елементарна робота

$$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}=F\Delta r\cos(\mathbf{F},\Delta\mathbf{r}). \tag{5.2}$$

До цієї можливої роботи, як і до звичайної, можна застосувати два наступних правила [Аппель, 1960].

1. Для одного і того ж можливого переміщення $\Delta\mathbf{r}$ деякої точки М робота рівнодійної системи декількох сил, прикладених до цієї точки дорівнює сумі робіт сил, що входять до системи.

2. Якщо можливе переміщення $\Delta\mathbf{r}$ є геометричною сумою декількох переміщень, то робота однієї і тієї самої сили на переміщенні $\Delta\mathbf{r}$ дорівнює сумі робіт цієї сили на окремих компонентах переміщення.

Якщо позначити через δt нескінченно малий проміжок часу, продовж якого здійснюється можливе переміщення $\Delta\mathbf{r}$, то вектор $\mathbf{V}$, який дорівнює $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\delta t}$ і спрямований вздовж $\Delta\mathbf{r}$, називається можливою швидкістю, наданою точці М. Якщо замінити $\Delta\mathbf{r}$ виразом $\mathbf{V}\delta t$, можна записати можливу роботу у вигляді

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}\delta t=FV\cos(\mathbf{F},\mathbf{V})\delta t. \tag{5.3}$$

оскільки кут між силою $\mathbf{F}$ и вектором $\mathbf{V}$ дорівнює куту між цією силою і переміщенням $\Delta\mathbf{r}$.

Аналітично, в прямокутній системі, якщо проекції сили позначити через X, Y, Z, а проекції переміщення через δx, δy, δz, то можливу роботу можна подати у вигляді

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z.$$

В наш час можливу роботу, як правило, беруть в формі (5.2), хоча раніше її частіше брали в формі (5.3). При цьому, якщо застосовується форма (5.3) та якщо розглядаються можливі переміщення декількох різних точок, то вважають, що для всіх цих точок проміжок δt має одне і те саме значення.

5.2. Основи статики

Вважається, що принцип можливих переміщень (швидкостей) історично був першим варіаційним принципом. Його ідея в первісній формі містилася ще в «Фізиці» видатного давньогрецького філософа Аристотеля (384-322 до н.е.). Причому Аристотель, як зазначає Л. Ейлер [Эйлер, 1753], мабуть, запозичив цю думку у своїх попередників.

Тут, доречно згадати і перші інтегральні варіаційні принципи. Ймовірно, найдавнішою з відомих екстремальних задач є класична ізопериметрична задача. Важко сказати, коли вперше була висловлена думка про найбільшу «місткість» кола і сфери серед всіх замкнених кривих однакової довжини або поверхонь однакової площі. Один з останніх учнів афінської школи платоників Симплікій з Кілікії (VI ст. н.е.), що склав незадовго до остаточного краху античної цивілізації великий коментар до праць Аристотеля, пише: «доведено ще до Аристотеля, бо він користується цим як відомим, а потім більш повно - Архімедом і Зенодором, що серед ізопериметричних фігур найбільш містким є коло, а серед ізопіфанних - куля». У цих словах визначена постановка таких екстремальних задач: серед плоских замкнених кривих, що мають задану довжину, знайти криву, яка охоплює найбільшу площу, і серед просторових замкнених поверхонь, що мають задану площа, знайти поверхню, яка охоплює найбільший об’єм. Для філософа-платоніка така постановка задачі є природною і пов'язана з пошуком ідеальних форм. Недаремна коло і куля були в давнину символами геометричній досконалості.

Прозаїчніше мотивування ізопериметричної і близьких до неї задач можна знайти в дещо наївній, але достатньо виразній формі в легенді про **Дідону**. Нагадаємо її за «Енеїдою» римського поета Вергілія. Фінікійська царівна Дідона із невеликим загоном жителів міста Тіра, рятуючись від переслідувань тирана – брата Дідони, покинули рідне місто і відправилася на кораблях на захід уздовж берегів Середземного моря. Вибравши на африканському узбережжі зручне місце (нинішня Туніська затока), Дідона і її супутники вирішили заснувати тут поселення. Мабуть, ця ідея не сподобалася місцевим жителям, але Дідоні вдалося умовити їх ватажка Ярба, і він необережно погодився поступитися клаптиком землі, «який можна оточити бичачою шкурою». Ярб не відразу зрозумів хитрість і підступність фінікіянки. Розрізавши шкуру на тонкі смужки, Дідона зв’язала їх в один довгий ремінь і, оточивши їм значну територію, заклала на ній місто Карфаген (фінікійською Картадашт – «нове місто»). На згадку про цю історію цитадель Карфагена дістала назву Бірса (мовою пунійців, як римляни називали жителів Карфагена, – «шкура»). Всі ці події легенда відносить до 825 (або 814) р. до н. е.

У такій ситуації виникає та ж сама класична ізопериметрична задача: вказати оптимальну форму ділянки землі, яка при заданій довжині периметра L має найбільшу площу S.

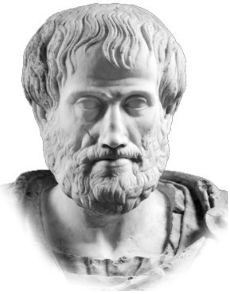
Розв’язання ізопериметричної задачі дається таким твердженням: якщо спрямлювана крива довжини L обмежує плоску фігуру, що має площу S, то

$$L^2 \geq 4\pi S \tag{5.4}$$

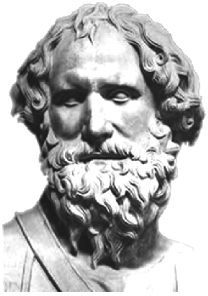
причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли крива – коло.

Інші постановки задачі можна отримати якщо, як це природно припустити, Дідона хотіла зберегти вихід до моря. На відміну від класичної ізопериметричної задачі, ці задачі часто називають задачами Дідони.

У зародковому стані знаходимо принцип можливих переміщень в механіці Леонардо да Вінчі - одного з небагатьох універсальних геніїв в історії людства.



Аристотель
(384-322 до н. е.)
дав.-гр. Ἀριστοτέλης



Архімед
(прибл. 287-212 до н. е.)
дав.-гр. Ἀρχιμήδης

Леонардо Да Вінчі
(1452–1519)
італ. Leonardo da Vinci

Перші знання в галузі механіки до початку VI ст. до н. е. стосувались (користуючись сучасною термінологією) таких розділів, як гідравліка, будівельна механіка, статика, динаміка і небесна механіка. Найпростіші пристосування або так звані «прості машини»: важелі, похилі площини застосовувалися в процесі будівництва ще з найдавніших часів. Зображення чашкових ваг на єгипетському папірусі - найкраще свідчення знайомства древніх єгиптян з рівноплечевим важелем. Єгипетський колодязний «журавель» (шадуф) - свідок знайомства з нерівноплечевим важелем. Знали ці машини і у стародавніх греків, доказом чому служать весла і кермо грецьких галер.

Ідея принципу віртуальних переміщень була висловлена С. Стевіном при розгляді умов рівноваги блоку. Наступний крок був зроблений Галілеєм при розгляді рівноваги тіла, що лежить на похилій площині. Він висловив відоме «золоте правило» механіки, згідно з яким «що виграється в силі, те втрачається в швидкості (переміщенні)»[1].

У найпростіших окремих випадках обґрунтування принципу не складає труднощів. Нехай на кінцях невагомого важеля або блоку (без тертя) знаходяться в рівновазі два вантажі $\mathbf{F}_1$ і $\mathbf{F}_2$. Тоді позначаючи через F_1' та F_2' дотичні (до можливих траєкторій) складові цих сил, а через δl_1 і δl_2 - величини відповідних елементарних можливих переміщень, у силу рівності (5.1) з точністю до знака матимемо

$$F_1'\delta l_1 = F_2'\delta l_2 \,,$$

тобто

---

[1] Галілей приписував Аристотелю обгрунтування «золотого правила механіки».

$$\frac{\delta l_1}{\delta l_2}=\frac{F_2'}{F_1'}$$

(виграш в силі компенсується програшем в переміщенні і навпаки).

Але як С. Стевін, так і Галілей розв'язували окремі задачі незагального характеру. Загальне формулювання принципу віртуальних переміщень для будь-якої системи прикладених сил дав Йоганн І Бернуллі в 1717 р, хоча доведення цього принципу він не навів. Ж.-Л. Лагранжа в своїй «Аналітичній механіці» сформулював цей принцип, назвав його «принципом віртуальних швидкостей» і дав його доведення (хоча і не строге) за допомогою системи вантажів, підвішених на нитках, що перекинуті через блоки. Андре-Марі Ампер (1775 1836) обґрунтував принцип віртуальних переміщень та ввів постулат ідеальних в'язей. М.В. Остроградський поширив принцип віртуальних переміщень на системи з нестаціонарними та неутримуючими в'язями.

Еванджеліста Торрічеллі (1608-1647) італійський фізик і математик. У 1641 р. був запрошений Кастеллі до Арчетрі, де став учнем і секретарем вже старого, сліпого і хворого Галілея, допомагаючи йому готувати до друку рукописи. Через три місяці Галілей помер, а Торрічеллі став його спадкоємцем на посаді математика герцога тосканського і наступником на кафедрі математики і філософії Флорентійського університету. Торрічеллі був крупним геометром, але відомий він нащадкам своїми відкриттями в механіці, серед яких відкриття атмосферного тиску, винахід барометра і формули витоку важкої рідини із сосуду через отвір. Ця формула міститься в мемуарах «De Motu Gravium Naturaliter Descen dentium» («Про рух важких тіл, які опускаються природним шляхом»).

Виведемо умови рівноваги довільної невільної системи твердих тіл, які перебувають під дією сили тяжіння. Позначимо через M суму мас всіх тіл і через z_c - вертикальну координату центру тяжіння системи тіл (вважаємо вісь z спрямованою вертикально вниз). Тоді, відповідно до рівності (5.1), отримаємо

$$Mg\delta z_c=0,$$

і, отже, умови рівноваги системи мають вигляд

$$\delta z_c=0.$$

Таким чином, положеннями рівноваги системи важких тіл будуть положення, в яких центр ваги займає найнижче, найвище або будь-яке інше стаціонарне положення по вертикалі («принцип Торрічеллі»).

Один з варіантів доказу принципу можливих переміщень (швидкостей) привів Лазар Карно (1753 - 1823). Першим науковим твором Карно був трактат «Досвід про машини взагалі», виданий анонімно в 1783. У третьому виданні трактат був розширений і перейменований в «Основні принципи рівноваги і руху». Головним змістом цього твору є отримання умов рівноваги машини за допомогою розрахунку приросту роботи сили на віртуальних переміщеннях точок прикладання сили (термін «робота» був введений пізніше, в XIX ст.). Карно приходить до системи вантажів або гир; рівновага отриманої таким чином системи трактується на основі принципу Торрічеллі про найнижче положення її центра ваги. Як і Торрічеллі, Карно замість умови мінімальності висоти центру ваги системи вантажів записує рівняння екстремальності вертикальної координати центру ваги:

$$\int F \cdot u \cos z = 0,$$

де $\int$ - символ суми. Ця рівність є, можливо, одним з перших аналітичних формулювань принципу віртуальних швидкостей.

Ідея ввести замінюючу систему в XVIII в. виявилася плідною, вона використовувалася в аналітичній механіці багатьма сучасниками Л. Карно - Ж.-Л. Лагранжем, Ж. Фур'є, А. Ампером та іншими. Замінюючі системи (блоків, важелів, поліспастів і т.п.) при виведенні начала можливих переміщень, зокрема, свідчать про тісний зв'язок цього начала з реальними машинами і механізмами.

Л. Карно увів поняття «геометричного руху», тобто такого, який допускається в'язями (ідеальними, утримуючими). У сучасній термінології геометричним рухам відповідають віртуальні переміщення точок системи.

У 1594 р. Галілео Галілеєм був написаний знаменитий трактат по механіці «Delia scienza meccanica» («Про науку механіку»). Різноманітні задачі статики розв’язувалися в ньому з використанням принципу віртуальних переміщень.

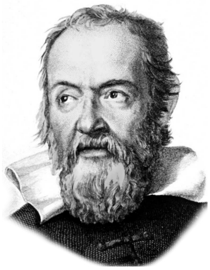
Цікаві висновки Галілея про пропорційність в органічному світі і техніці, а також накреслені ним шляхи до створення нової ньютонівської динаміки.

Ж.-Л. Лаґранж у своїй книзі «Аналітична механіка» писав: «*Динаміка - це наука про прискорюючі і сповільнюючі сили і про змінні рухи, які вони повинні викликати. Ця наука цілком зобов’язана своїм розвитком новітнім вченим, і Галілей є тією особою, яка заклала перші її основи. До нього сили, що діють на тіла, розглядали тільки в стані рівноваги, і хоча прискорене падіння твердих тіл і криволінійний рух кинутих тіл не могли приписати якій-небудь іншій причині, крім постійної дії тяжіння, проте нікому до Галілея не вдалося визначити законів цих повсякденних явищ - незважаючи на те, що причина їх настільки проста. Галілей перший зробив цей важливий крок і цим відкрив новий і неозорий шлях для прогресу механіки. Його відкриття було викладено і розвинене в роботі, названій «Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze», що з’явилася вперше в Лейдені в 1638 р. Однак у сучасників ця робота не дала Галілею стільки слави, скільки відкриття, зроблені ним на небі; нині ж вона складає найбільш надійну і істотну частину слави цієї великої людини*».

У 1586 році побачив світ трактат С. Стевіна «Начала статики», в якому викладається принцип неможливості вічного руху, дано оригінальне доведеня умови рівноваги тіла на похилій площині, відкритий закон додавання сил (паралелограм сил) і закон розкладання сили на дві складові, перпендикулярні одна одній, сформульовано для окремого випадку принцип можливих переміщень. У цій роботі статика стародавніх отримала своє завершення.

Гвідобальдо Дель Монте* *(Убальді) *(1545–1607)*
італ. Guidobaldo del Monte

Сімон Стевін
(1548–1620)
нід. Simon Stevin



Галілео Галілей
(1564–1642)
італ. Galileo di Vincenzo Bonaiuti de 'Galilei

Остаточно своє центральне місце в механіці принцип можливих переміщень (швидкостей) зайняв після появи трактату «Аналітична механіка» Лагранжа, перше видання якого вийшло в світ в 1788 р в Парижі [Lagrange, 1788] і складалося з двох частин: «Статика» і «Динаміка». Загальна формула динаміки Лагранжа (поєднання принципу Д'Аламбера і принципу можливих швидкостей) охоплювала всі можливі випадки, включаючи механіку матеріальної точки, абсолютно твердого тіла, а також механіку системи матеріальних точок із в'язями, гідромеханіку, задачі про рух і рівновагу пружних тіл тощо. Методи лагранжевої механіки дуже сильно вплинули на подальший розвиток науки.

«*Статика - це наука про рівновагу сил*», - пише Лагранж на початку трактату і дає історичний аналіз розвитку цієї науки. Розглянувши різні підходи до принципу важеля (Архімеда, Галілея, Стевина, Гюйгенса), він надає перевагу підходу Архімеда. Принцип складання та розкладання сил вперше був чітко сформований Стевіном. Лагранж виявив тісний зв'язок між принципом складання рухів, чітко даними Галілеєм, з принципом складання сил за правилом паралелограма. Доказ паралелограма сил на основі відомого раніше принципу складання швидкостей або складання рухів вперше дали Ньютон і Варіньон (P. Varignon) незалежно один від одного в 1687 р.

Велике значення Лагранж надає XVI лемі Варіньона («Nouvelle mecanique»), яка зараз називається теоремою Варіньона і яка є однією з основних теорем ковзаючих векторів. Відповідно до цієї теореми, якщо система ковзаючих векторів $\mathbf{F}_\nu$ приводиться до однієї рівнодійної $\mathbf{F}$, то момент рівнодіючої відносно деякої точки 0 (або осі Z) дорівнює сумі моментів векторів системи відносно тієї ж точки (або осі):

$$\mathrm{mom}_0\mathbf{F} = \sum_\nu \mathrm{mom}_0\mathbf{F}_\nu\,, \qquad \mathrm{mom}_l\mathbf{F} = \sum_\nu \mathrm{mom}_l\mathbf{F}_\nu\ .$$

Теорема встановлена П. Варіньомом в 1687 р. для випадку збіжної системи сил.

Ми повинні бути вдячні Роберваля і Варіньона, які підбили підсумок і співвіднесли один з одним три фундаментальні поняття статики: принцип важеля, принцип віртуальних швидкостей і паралелограма сил. У своїй книзі «Nouvelle mecanique» (видана в 1687 р. і закінчена посмертно в 1725 р.) Варіньон - до деякої міри все ще в арістотелівській традиції - використовує ідею еквівалентності принципу важеля, принципу віртуальних швидкостей і паралелограма сил.

Принцип віртуальних швидкостей Лагранж формулює так: «*Якщо будь-яка система будь-якої кількості тіл, або точок, на кожну з яких діють будь-які сили, знаходиться в рівновазі і, якщо цій системі надати будь-який малий рух, в результаті якого кожна точка пройде нескінченно малий шлях, який представляє її віртуальну швидкість, то сума сил, помножених кожна відповідно на шлях, що його проходить точка за напрямком сили, до якої вона прикладена, буде завжди дорівнювати нулю, якщо малі шляхи в напрямку сил вважати додатними, а шляхи в напрямку, протилежному до напрямку сили, вважати від'ємними*» [Lagrange, 1788].

Лагранж вважає цей принцип найбільш загальним в статиці, що першим зрозумів, на його думку, І. Бернуллі. З принципом віртуальних швидкостей пов'язаний принцип Торрічеллі, який полягає в тому, що "*якщо два вантажі пов'язані один з іншим і знаходяться в такому стані, що їх центр тяжіння не може спуститися нижче, то вони в цьому стані знаходяться в рівновазі*" [Lagrange, 1788]. Принцип віртуальних швидкостей, на думку Лагранжа, "*дав привід для виникнення іншого принципу*", запропонованого Мопертюи в 1746 р. під назвою «закону спокою», який пізніше був розвинений і узагальнений Л. Ейлером.

Найбільш важливим в цьому принципі Лагранж вважав, що він "*є не тільки дуже простим і дуже загальним, але крім цього, має таку високоцінну і тільки йому притаманну перевагу над іншими принципами, що може бути виражений загальною формулою, яка охоплює всі проблеми, які можуть бути поставлені з питання про рівновагу тіл*". Лагранж наводить доказ цього принципу, вводячи для цього замінюючу систему поліспастів.

Еванджеліста Торрічеллі *(1608 - 1647)*
італ. Evangelista Torricelli

П'єр Варіньон
(1654 - 1722)
фр. Pierre Varignon

Йоганн Бернуллі
(1667 - 1748)
нім. Johann Bernoulli

Лазар Карно
(1753 - 1823)
фр. Lazare Nicolas Marguerite Carnot

Слід окремо зупинитися на теоремі Ж.-Л. Лагранжа, яку він називав "*властивість рівноваги, яка відноситься до максимуму і мінімуму*" (Розділ III «Аналітичної механіки»). Лагранж розглядає рівновагу консервативної механічної системи із скінченним числом ступенів вільності, причому всі сили, що діють на систему, є потенціальними, тобто існує функція потенціальної енергії системи , така що

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},\ (i=1,\ldots,n), \tag{5.5}$$

де Q_i - узагальнені сили, q_i - узагальнені координати, n – число ступенів вільності системи.

Оскільки в стані рівноваги всі узагальнені сили Q_i повинні дорівнювати нулю, то в силу справедливості (5.5) в цьому стані дорівнює нулю і диференціал потенціальної енергії $d\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} dq_i$, а це, в свою чергу, означає, що за рівноваги системи її потенціальна енергія має стаціонарне значення.

Лагранж в §5 тому 1 «Аналітичної механіки» (1788) детально розглянув випадок, коли потенціальна енергія має не просто стаціонарне, а строго мінімальне значення. Для цього він розклав функцію П біля положення рівноваги в ряд за ступенями малих величин x_i, які є приростами координат системи:

$$\Pi = A + B_1 x_1 + B_2 x_2 + \ldots + C_{11} x_1 x_1 + C_{12} x_1 x_2 + C_{22} x_2 x_2 + \ldots \tag{5.6}$$

і запропонував обмежитися лише другими ступенями змінних x_i.

З рівності нулю величини $d\Pi$ при нульових значеннях x_i витікає, що $B_i = 0$. Тепер виразу (5.6) за допомогою лінійного перетворення нескладно надати вигляду

$$\Pi = A + D_1 y_1^2 + D_2 y_2^2 + \ldots \tag{5.7}$$

Далі використовується той факт, що якщо $x_i = 0$, то і $y_i = 0$, а значить в положенні рівноваги функція П матиме локальний мінімум $\Pi_{\min} = A$ тільки в тому випадку, якщо коефіцієнти D_i є додатними.

Нехай тепер система виводиться зі стану рівноваги шляхом надання її масам $m_1, m_2, \ldots$ початкових малих швидкостей $V_1, V_2, \ldots$, тобто системі надається деяка кінетична енергія $T_0 = \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \ldots)$. Записавши на підставі закону збереження повної механічної енергії консервативної системи, який Лагранж називає принципом збереження живих сил

$$\frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \ldots) + A = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \ldots) + A + D_1 y_1^2 + D_2 y_2^2 + \ldots, \tag{5.8}$$

де $v_1, v_2, \ldots$ - це швидкості мас системи у відхиленому стані, легко бачити, що при такому початковому збуренні швидкості і переміщення точок системи будуть обмежені умовами

$$(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \ldots) \le (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \ldots); \quad D_1 y_1^2 + D_2 y_2^2 + \ldots \le \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \ldots). \tag{5.9}$$

Як пише Лагранж "*Звідси випливає, що в даному випадку система буде в змозі лише дуже мало відхилятися від свого положення рівноваги і зможе виконувати лише дуже малі коливання з обмеженим розмахом*". Іншими словами (Теорема

Лагранжа), якщо в деякому положенні системи потенціальна енергія має строгий мінімум, то це положення є положенням стійкої рівноваги.

У 1846 р німецький математик Петер Густав Лежен Діріхле опублікував роботу «Про стійкість рівноваги» (Über die Stabilität des Gleichgewichtes), в якій вказав на те, що доведення стійкості рівноваги, запропоноване Лагранжем і засноване на поданні функції потенціальної енергії початковим відрізком степеневого ряду "... *є недостатньо строгим. Справді, можна з повною підставою сумніватися в тому, що величини, для яких ми маємо малі границі, виходячи з припущення, що ці величини завжди будуть дуже малі (бо ми це робимо тільки в тому випадку, коли можемо знехтувати членами вищого порядку), дійсно завжди протягом будь-якого проміжку часу залишатимуться в цих границях і притому взагалі в малих границях*". Далі в цій роботі Діріхле дав строге доведення теореми Лагранжа про стійкість рівноваги без використання припущення про можливість розвинення функції П в ряд за ступенями координат. Це доведення засноване на припущенні, яке можна зробити без шкоди для загальності і яке полягає в тому, що в стані рівноваги дорівнюють нулю і всі узагальнені координати, і потенціальна енергія системи.

Міркування Діріхле зводяться до наступного. Якщо початковий збурений стан задається координатами $q_{01}, q_{02}\dots$ і швидкостями $V_1, V_2, \dots$, то закон збереження енергії можна записати у вигляді

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots) = \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \dots) + \Pi(q_{01}, q_{02}, \dots) - \Pi(q_1, q_2, \dots)\,. \qquad (5.10)$$

Оскільки згідно припущенню при $q_i = 0$ потенціальна енергія $\Pi(q_1, q_2, \dots)$ є нулем і мінімумом, то можна обрати достатньо малі додатні величини $l_1, l_2 \dots$ такі, що $\Pi(q_1, q_2, \dots)$ буде мати додатне значення, якщо $|q_i| \le l_i$ та якщо всі q_i не дорівнюють одночасно нулю. Розглядаються такі варіанти $q_1, q_2 \dots$, коли принаймні одна з координат q_i дорівнює своєї границі l_i. З усіх значень функції $\Pi(q_1, q_2, \dots)$, обчислених при розглянутих варіантах координат, обирається найменше *p*; після цього від противного досить легко доводиться, що якщо початкові зміщення обмежені значеннями $l_1, l_2 \dots$, і якщо початкове збурення підпорядковане нерівності

$$\frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \dots) + \Pi(q_{01}, q_{02}, \dots) < p\,,$$

то кожна з узагальнених координат q_i не може перевищити за абсолютною величиною границь l_i протягом усього часу руху.

Звідси також витікає, що швидкості v_i повинні задовольняти нерівність

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots) \le \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \dots) + \Pi(q_{01}, q_{02}, \dots) < p\,.$$

Остаточний висновок, який робить Діріхле, полягає в тому «що границі кожної швидкості, так само як і границі кожної змінної $q_1, q_2 \dots$ теж можуть бути як завгодно малими, оскільки і величини $l_1, l_2 \dots$ можуть стати як завгодно малими», а це і означає стійкість даного стану рівноваги.

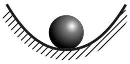
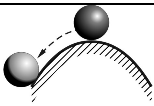
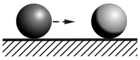
Рене Декарт
(1596 - 1650)
фр. René Descartes ,
лат. Renatus Cartesius

Жозеф Луї Лагранж
(1736 - 1813)
фр. Joseph Louis
Lagrange

Йоганн Петер Густав
Лежен Діріхле *(1805 - 1859)*
нем. Johann Peter Gustav
Lejeune Dirichlet

Відзначимо, підбиваючи підсумок, що і в даний час міркування Діріхле з невеликими варіаціями наводяться в підручниках з аналітичної механіки для доведення теореми Лагранжа.

Таким чином, був сформульований відомий принцип Лагранжа-Діріхле: для консервативної системи стійка, нестійка, байдужа рівновага має місце, відповідно в наступних ситуаціях

Стійка рівновага $\delta\Pi = 0$ $\delta^2\Pi > 0$ min	Нестійка рівновага $\delta\Pi = 0$ $\delta^2\Pi < 0$ max	Байдужа рівновага $\delta\Pi = 0$ $\delta^2\Pi = 0$ const
		

Якщо система знаходиться в потенціальному полі, і отже, сили $\mathbf{F}_i$, діючі на точки системи, мають силову функцію $W=W(x_i, y_i, z_i)$, то сума елементарних робіт сил $\mathbf{F}_i$ на будь-якому переміщенні системи буде повним диференціалом функції W, яка залежить від $3n$ координат точок системи. В цьому випадку

$$dW=\sum_{i=1}^{n}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

де X_i, Y_i, Z_i — проекції сил $\mathbf{F}_i$ на координатні осі.

Звідси витікає, що

$$X_i=\frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad Y_i=\frac{\partial W}{\partial y_i}, \quad Z_i=\frac{\partial W}{\partial z_i}$$

і отже, вираз для узагальненої сили Q_j буде мати вигляд:

$$Q_j=\frac{\partial W}{\partial q_j}.$$

Потенціальна енергія $U(x_i, y_i, z_i)$ системи визначається як робота, яку повинні виконати сили поля, щоб перевести систему з розглянутого положення

(x_i, y_i, z_i) в нульове положення (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}), яке, взагалі кажучи, може бути вибрано довільно. Отже,

$$U(x_i\,,\,y_i\,,\,z_i\,)=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{(x_i\,,\,y_i\,,\,z_i\,)}^{(x_{i0}\,,\,y_{i0}\,,\,z_{i0}\,)}(X_i dx_i+Y_i dy_i+Z_i dz_i)$$

Змінюючи порядок додавання і інтегрування і використовуючи силову функцію $W(x_i, y_i, z_i)$, отримуємо

$$U(x_i\,,\,y_i\,,\,z_i\,)=\int\limits_{(x_i\,,\,y_i\,,\,z_i\,)}^{(x_{i0}\,,\,y_{i0}\,,\,z_{i0}\,)}dW\,.$$

Після інтегрування будемо мати

$$U(x_i, y_i, z_i)=W(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}) - W(x_i, y_i, z_i),$$

тобто потенціальна енергія U з точністю до аддитивної сталої дорівнює силовій функції W, взятій із зворотним знаком:

$$U(x_i, y_i, z_i)= - W(x_i, y_i, z_i) \qquad (5.11)$$

Запишемо тепер принцип віртуальних переміщень за допомогою потенціальної енергії U. Маємо

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial W}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial W}{\partial z_i}\delta z_i\right)=\delta W=0\,,$$

або на основі (5.11)

$$\delta U=0\,, \qquad (5.12)$$

тобто перша варіація потенціальної енергії U повинна дорівнювати нулю, а це є умова її стаціонарності. Таким чином, необхідна і достатня умова рівноваги системи збігається з умовою стаціонарності функції U.

Принцип віртуальних переміщень є варіаційним принципом, оскільки тут розглядається не одна конфігурація системи, а сукупність можливих конфігурацій, одержуваних в результаті віртуальних переміщень, що допускаються накладеними на точки системи в'язями.

Великою перевагою даного принципу є те, що сукупність всіх умов рівноваги можна виразити за допомогою одного рівняння, не входячи в деталі тих в'язей, які накладені на точки системи. У формулювання принципу віртуальних переміщень не входять реакції в'язей, що позбавляє від необхідності визначати їх величини.

З іншого боку, реакції в'язей за допомогою принципу віртуальних переміщень можна знаходити досить просто. Для цього слід скористатися принципом звільнюваності. Відкидаючи в'язь, ми замінюємо її дію реакцією, при цьому, як уже зазначалося, збільшується число ступенів вільності системи. Розглядаючи потім систему, звільнену від в'язі, надаємо їй віртуальне переміщення. Користуючись далі принципом віртуальних переміщень і прирівнюючи нулю суму всіх віртуальних робіт, включаючи роботу реакцій в'язей, отримуємо одне рівняння, з якого може бути знайдена шукана реакція в'язі.

Принцип віртуальних переміщень дозволяє отримати всі умови рівноваги. При цьому слід підкреслити, що рівнянь рівноваги для системи може бути отримано стільки, скільки незалежних віртуальних переміщень можна реалізувати в системі. Іншими словами, число умов рівноваги, які можна скласти для системи, збігається з числом її ступенів вільності.

Строге доведення принципу можливих переміщень, а також поширення його на односторонні (неутримуючі) в'язі було дано Ж. Фур'є [Fourier, 1798], М.В. Остроградським [Остроградский, 1946].

Як показав Ж.Б.Ж. Фур'є, звичайне для принципу можливих переміщень вираження через потенціальну енергію (роботу сил)

$$\delta U = 0 \quad (\delta W = 0) \tag{5.13}$$

дійсне для так званих зворотних переміщень, тобто переміщень, в'язі за напрямками яких можуть змінювати знак. У випадку незворотних переміщень рівність (5.13) слід замінити нерівністю

$$\delta U \geq 0 \quad (\delta W \leq 0), \tag{5.14}$$

а в звичайному формулюванні принципу віртуальних переміщень – «*сума усіх віртуальних робіт дорівнює нулю*» замінити «*дорівнює нулю*» на «*менше або дорівнює нулю*».

Жан Батист Жозеф Фур'є – французький математик і фізик. Єдиною роботою Фур'є з механіки був «Мемуар про статику, що містить доведення принципу віртуальних швидкостей і теорію моментів». Одним із положень цієї роботи був розгляд випадків рівноваги сил, які прикладені до точок механічної системи з так званими неутримуючими в'язями (такого терміну у самого Ж.Б.Ж. Фур'є немає). Як приклад Ж.Б.Ж. Фур'є розглядав рівновагу двох твердих тіл, поверхні яких притискаються у точці їх дотику двома рівними і протилежно направленими силами, нормальними до обох поверхонь в точці їх дотику, рівновагу гнучкої нерозтяжної нитки під дією двох сил, прикладених до її кінців. Ж.Б.Ж. Фур'є стверджував (без доведення), що необхідною умовою рівноваги нитки під дією таких сил – є невід'ємність «повного моменту сил» на віртуальних переміщеннях точок їх прикладення. За термінологією того часу «повним моментом сил» називалася сума елементарних робіт усіх активних сил на віртуальних переміщеннях точок їх прикладання, взята зі знаком мінус. Таким чином, умова рівноваги системи сил при неутримуючих в'язях записувалася у вигляді вимоги недодатності суми елементарних робіт усіх сил на віртуальних переміщеннях. М.В. Остроградський при розробці загальної теорії принципу можливих переміщень (1834 р.) виходив із запису цього принципу у мемуарі Ж.Б.Ж. Фур'є.

Зазначимо, що нерівність Фур'є $\delta U \geq 0$ відповідає нерівності Юнга

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i . \tag{5.15}$$

У випадку потенціалів будівельної механіки $U(\Delta)$ - потенціальна енергія пружної деформації, $U^{\text{доп}}(P)$ - доповнювальна потенціальна енергія, нерівність Юнга має вигляд

$$U(\Delta)+U^{\text{доп}}(P)\geq\sum_{i=1}^{n}P_i\Delta_i.$$

Перша варіація від обох частин наведеного виразу дає

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(\Delta)\geq 0, \qquad \Big| \qquad \delta\Pi^{\text{К}}(P)\leq 0,$$

$$\Pi^{\text{Л}}(\Delta)=U(\Delta)-\sum_{i=1}^{n}P_i\Delta_i\,;\ \Pi^{\text{К}}(P)=-U^{\text{доп}}(P)+\sum_{i=1}^{n}P_i\Delta_i.$$

Нехай за можливе переміщення прийняте таке, при якому система зберігає контакт з усіма своїми двосторонніми опорами і відокремлюється від однієї або декількох односторонніх опор. Оскільки реалізації цих останніх завжди направлені у бік можливого переміщення, то їх віртуальна робота на цих переміщеннях є завжди позитивна. Позначимо її A_R, тоді $A_R\geq 0$. Віртуальну роботу усіх інших зовнішніх сил позначимо A_P. Тоді умова рівноваги системи (принцип можливих переміщень) дає

$$A_R+A_P=0\,.$$

Звідси

$$A_P=-A_R\leq 0\,.$$

Таким чином у випадках рівноваги системи, на тих можливих переміщеннях, при яких навантажена система відокремлюється від однієї, або декількох її односторонніх опор (за яких односторонні в’язі виключаються із роботи) сумарна віртуальна робота зовнішніх сил є від’ємною, або дорівнює нулеві.

$$A_P\leq 0\,.$$

З урахування роботи внутрішніх сил, яка ототожнюється із потенціальною енергією системи, маємо такий вираз принципу можливих переміщень

$$U+A_P=0\,,$$

але у випадку наявності односторонніх в’язей, як було доведено вище $A_P\leq 0$, Тоді $U\geq 0$. Якщо перейти до варіацій робіт, тобто робіт на нескінченно малих переміщеннях δw, отримаємо

$$\delta U\geq 0$$

і відповідно

$$\delta A_P\leq 0\,.$$

Строго кажучи, всі наведені результати є непересічними і в змістовному відношенні і у часі. Але хронологія аналогій може бути представлена так: Г. Лейбніц, у якого є згадка про теорему Ейлера і перетворення Лежандра; Ж.-Л. Лаґранж «Аналітична механіка» (1778); теорема Ейлера про однорядні функції (1779); опубліковане перетворення Лежандра (1787); теореми Лаґранжа і

Кастільяно, нерівність Фур'є, М.В. Остроградський; теорема Клапейрона (опублікована Ламе у 1852 р.) і, нарешті, узагальнене поняття двоїстості за Юнгом, нерівність Юнга; нерівність Юнга-Фенхеля (Вернер Фенхель (1905-1988)). Питання теорії систем з односторонніми в'язями викладені у книзі І.М. Рабіновича [Рабинович, 1975].

Жан Батист Жозеф Фур'є
(1786 - 1830)
фр. Jean Baptiste Joseph Fourier

Андре-Марі Ампер
(1775 - 1836)
фр. André-Marie Ampère

Гаспар Клер Франсуа Марі Ріш, барон де Проні
(1755 - 1839,)
фр. Gaspard Clair François Marie Riche, baron de Prony

Слід зазначити, що Ж.-Л. Лаґранж у своїй книзі «Аналітична механіка» (1788) вказав, що «Основна властивість рівноваги, яка полягає в тому, що будь-яка система сил, що знаходиться в рівновазі, продовжує залишатися в цьому стані, коли кожна з цих сил змінює напрям своєї дії на протилежний, - якщо тільки структура цієї системи не зазнає якої-небудь зміни унаслідок зміни напрямку дії всіх сил». Остання примітка доводить, що Ж.-Л. Лаґранж припускав наявність таких в'язей і необхідність їх урахування.

П. Аппелем дане таке визначення цьому поняттю: «якщо можливі переміщення, сумісні із в'язями, задані нерівностями, тоді в'язі називаються неутримуючими» (односторонніми, unilaterabes). Розглядається загальний випадок, коли в'язі між точками виражаються за допомогою h залежностей, з яких g рівностей і $h-g$ нерівностей. Ті з можливих переміщень системи, при яких ліві частини не тільки усіх рівнянь, а і нерівностей дорівнюють нулю, П. Аппель називає переміщеннями рівностей, інші – переміщеннями нерівностей. Доведена наступна теорема. Для рівноваги системи, яка знаходиться у стані, коли усі в'язі включені, необхідно і достатньо, щоб за усіх переміщень, сумісних із в'язями, сума робіт діючих сил дорівнювала нулю, або була від'ємною; нулем для переміщень рівностей, від'ємною для переміщень нерівностей. При цьому система навіть при включені усіх в'язей є геометрично змінюваною. Надалі будемо вважати, що ті в'язі, яким відповідають нерівності називаються односторонніми.

Поль Еміль Аппель (1855–1930) – французький математик і механік. Вивів звичайні диференціальні рівняння, що описують рух голономних і неголономних систем (найбільш загальні рівняння руху механічних систем), які мають назву рівнянь Аппеля. У 1833–1896 рр. виданий його «Трактат раціональної механіки».

5.3. Перші варіаційні принципи. Кеплер, Ферма, «Начала» Ньютона, Лейбніц, Мопертюї

До XVII ст. не було розроблено ніяких загальних прийомів розв'язку екстремальних задач і кожна з них розв'язувалась спеціально для неї розробленим прийомом. У 1615 р. вийшла книга Йоганнеса Кеплера (1571-1630) «Нова стереометрія винних бочок» [Кеплер, 1935]. Автор починає цю книгу так: «*У листопаді минулого року я привів у свій будинок нову дружину (у 1610 р. померла перша дружина Й. Кеплера, від якої він мав трьох дітей, у 1613 р. він вдруге одружився і від другої дружини мав восьмеро дітей); в той же час, коли Австрія, закінчивши рясний збір благородного винограду, розподіляла свої здобутки, розсилаючи вверх по Дунаю завантажені баржі, в нашому Норику і весь берег у Лінці були завалені винними бочками, які продавалися за доступною ціною. Згідно з обов'язками чоловіка і доброго батька сімейства, мені довелось попіклуватись про необхідні напої. Тому до мене в оселю принесли і поставили декілько бочок, а через чотири дні прийшов продавець з вимірювальною лінійкою, за допомогою якої він проміряв підряд усі бочки без різниці, не звертаючи увагу на форму, без всіляких міркувань і обчислень. Саме мідний оголовок лінійки просувався через наливний отвір повної бочки до п'яти того і іншого дерев'яного кругу, які ми по-домашньому звемо дном, і після того як у обох випадках ця довжина від верхньої точки пуза до нижньої того і іншого круга були рівними, продавець оголошував кількість амфор, які вміщує бочка, помітивши число, яке поставлене на лінійці, у тому місці на якому закінчується означена довжина: по цьому числу він визначав ціну*».

Й. Кеплер дуже здивувався, йому здалося дивним, як за допомогою одного виміру можна обчислити місткість бочок різної форми. «*Я вважав для себе доцільним,* - пише він, - *взяти новий предмет математичних занять і дослідити геометричні закони такого зручного виміру і з'ясувати його основи*».

В ході розв'язання поставленої задачі Й. Кеплер заклав основи диференціального і інтегрального числень і сформулював перші загальні правила розв'язку екстремальних задач. Вважається, що навіть символ інтегралу походить від позначених Й. Кеплером сум. Він пише: «*Під впливом благодійного генія, бувшого, без сумніву, хорошим геометром, бондарі почали надавати бочкам ту форму, яка при даній довжині лінії, виміряній мірщиком, дає можливість судити про найбільшу місткість бочки, а в зв'язку з тим, що в околі кожного максимуму зміни бувають нечутливими, то невиликі випадкові відхилення не чинять помітного впливу на величину ємності*». І далі: «*Фігури по обидві сторони від їх найбільшої місткості мають невідчутне зменшення*» (теорема V, додаток).

Тут у достатньо загальній формі висловлений той критерій екстремальності, який надалі був оформлений у точну теорему спочатку (для многочленів) П. Ферма (1629 р.), а потім – І. Ньютоном і Г. Лейбніцем і отримав назву теореми Ферма.

Й. Кеплер, насправді, не використовує цей критерій для знаходження екстремальних вимірів тіл і фігур, він керується іншими міркуваннями. Але він чітко розуміє узагальнююче значення тієї властивості, яка стала одним із джерел розвитку диференціального числення. Слід додати, що йому ж належить те тлумачення проблеми знаходження об’ємів і площ, яке поклало початок інтегральному численню. Це досить точно показує роль Й. Кеплера у створенні нової математики.

А. Ейнштейн, який назвав Й. Кеплера «*незрівняною людиною*», писав про його долю так [Эйнштейн, 1965-1967, стор. 121]: «*Він жив у епоху, коли ще не було упевненості у існуванні деякої загальної закономірності для усіх явищ природи. Якою глибокою була у нього віра в таку закономірність, якщо, працюючи одинаком, ніким не підтримуваний і незрозумілий, він протягом багатьох десятків років черпав у ній сили для важкого і кропіткого емпіричного дослідження руху планет і математичних законів цього руху. Сьогодні, коли цей науковий акт уже здійснився, ніхто не може повною мірою оцінити скільки винахідливості, скільки важкої праці і терпіння знадобилося, щоб відкрити ці закони і так точно їх виразити*».

На місці поховання Й. Кеплера була покладена проста кам’яна плита і невідомо, навіть, чи вибита на ній латинська епітафія, яка була висловлена самим Й. Кеплером і у перекладі автора передмови до книги «Нова стереометрія винних бочок» М.Я. Вигодського російською мовою звучить так:

Я небеса измерял, ныне тени Земли измеряю,
Дух на небе мой жил, здесь же тень тела лежит.

І якщо Й. Кеплер у своїй епітафії говорить, що дух його за життя існував на небі, то можна сказати, що після його смерті, дух його ще лишається на Землі.

Мабуть, перше чітке формулювання варіаційного принципу стосовно фізичної проблеми надане у 1662 р. французьким математиком П’єром Ферма (1601–1665). Це був принцип найкоротшого часу або «принцип Ферма».

Відомо, що закон переломлення світла був встановлений Віллебрордом Снеллом (друкувався під латинизованим ім’ям Снелліус) і Р. Декартом. При цьому Р. Декарт зробив ряд припущень, з яких найменш обґрунтованим було твердження, що швидкість світла у більш щільному середовищі більша, ніж у менш щільному. Проти цього виступив англійський філософ Гоббс, а у 1662 р. – П. Ферма.

П. Ферма поклав в основу дослідження закону переломлення світла принцип найкоротшого часу. У роботі «Synthesis ad Refractiones» («Синтез переломлення») [Fermat, 1891, стор. 173-179] він вивів закон переломлення світла геометричним шляхом, виходячи із зазначеного принципу. За думкою П. Ферма - «*Природа діє найбільш легкими і доступними шляхами, і аж ніяк не більш короткими*», як думає багато хто. Конкретизуючи цю ідею він говорить: «*Подібно до Галілея, який, розглядаючи рух важких тіл у природі, вимірював відношення цього руху не стільки відстанню, скільки часом, ми також розглядаємо не стільки найкоротші відстані або лінії, а ті, які можуть бути пройдені легше, зручніше і за менший проміжок часу*».

Як відомо, принцип Ферма є найбільш загальною математичною формою законів геометричної оптики.

По суті Ферма показав, що закон переломлення Снелліуса задовольняє гіпотезу про те, що час, взятий для траєкторії сусідньої з дійсною, відрізняється від часу проходження цієї останньої на величину другого порядку малості. У доведенні

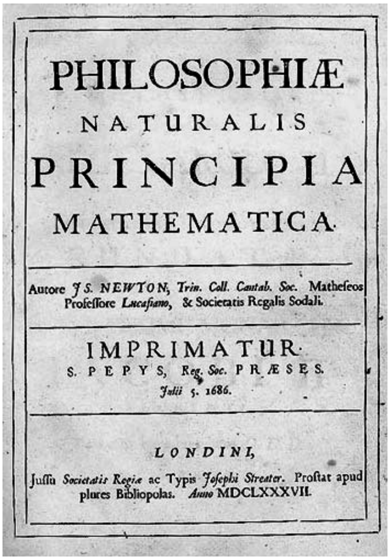
Ферма по суті фігурує твердження про те, що варіація (ми говоримо тут про варіацію, хоча загальне поняття варіації функціоналу було введено майже на сто років пізніше Ж.-Л. Лаґранжем) деякого визначеного інтеґралу, взятого уздовж деякої траєкторії променя, дорівнює нулю. Ця умова необхідна, але недостатня для того, щоб час був мінімальним. У простому випадку, розглянутому Ферма, умова мінімальності і варіаційна умова співпадають, але в більш складних випадках це не має місця.

Принцип Ферма привів не тільки до експериментально вивченого факту, але також і до нового результату, що коефіцієнт переломлення дорівнює відношенню швидкостей світла у двох середовищах. Ферма хотів довести, що його точка зору про те, що світло розповсюджується повільніше у більш щільному середовищі відповідає дійсності, в той же час як Р. Декарт захищав протилежну точку зору. У всякому випадку принцип найменшого часу виведений a priori, а не індуктивним шляхом.

Перше справжнє обґрунтування принципу П. Ферма дав Х. Гюйгенс [Гюйгенс, 1935], який на основі своєї «хвильової теорії» довів, що коефіцієнт переломлення на границі двох середовищ дорівнює відношенню швидкостей світла у цих середовищах. Доведення Х. Гюйгенса показує, що час, який необхідний світлу, щоб пройти відстань між двома точками, дійсно є мінімальним.

До речі, цікаво, що Х. Гюйгенс у 1657 р. запатентував перший маятниковий годинник.

Таким чином принцип найкоротшого часу був сформульований у геометричній оптиці. Відразу і закономірно виникла проблема пошуку аналогічних задач про мінімальне значення часу у механіці. Задачею такого роду була задача, наведена Ісааком Ньютоном (1643-1727) у його «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» («Математичні начала натуральної філософії», скорочено «Начала») [Ньютон, 1936, стор. 426-427], розв'язання якої він навів без зазначення методу, за яким він був знайдений: яку форму слід надати твердому тілу обертання, що рухається вздовж осі, для того, щоб опір, який воно сприймає, був мінімальним. «Начала» вийшли в світ у 1687 р.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Титульний аркуш «Начал» Ньютона

Незважаючи на те, що підхід І. Ньютона неминуче привів до тієї механіки, яку ми знаємо сьогодні, Л. Ейлеру знадобилась більша частина життя на те, щоб усвідомити і розвинути поняття І. Ньютона, доповнити їх не менш важливими новими ідеями і продемонструвати, як можна вирішувати реальні задачі. Л. Ейлер був провідним фізиком-теоретиком XVIII ст. Хоча в звичайних незначних історичних книгах і посиланнях на джерело його роботи недооцінені, в короткій фактографічної історії старої Handbuch der Physik пераховано вдвічі більше спеціальних відкриттів Л. Ейлера, ніж будь-якого іншого фізика, який жив до нього і після нього.

У 1788 р., якраз через сто років після «Начал», з'явилася «Аналітична механіка» Ж.-Л. Лаґранжа, дещо менш знаменита. У загальних рисах вона полум'яно описана в будь-якому популярному дослідженні про історію науки, де наводяться слова В.Р. Гамільтона про те, що вона є «свого роду наукової поемою».

Перший загальний аналітичний прийом розв'язання екстремальних задач був розроблений П. Ферма. Відкритий він, можливо, у 1629 р., але вперше достатньо повно викладений в листі до Ж. Роберваля у 1638 р. Щоб осягнути первинну думку Ферма можна звернутися до книги Р. Декарта, де цей лист наведений [Декарт, 1938, стор. 154]. Сучасною мовою (правда, у Ферма це доведено лише для поліномів) прийом Ферма зводиться до того, що при знаходженні екстремуму функції $f(x)$ без обмежень в точці екстремуму $\widehat{x}$ має виконуватися рівність $f'(\widehat{x})=0$. Відомо, що перший натяк на цей результат з'явився в словах Й. Кеплера із «Стереометрії винних бочок».

Точного сенсу міркування Ферма набули через 46 років, коли у 1684 р. з'явилася робота Ґотфріда Вільгельма Лейбніца якій закладалися основи математичного аналізу. Вже сам заголовок цієї роботи, який починається так: «Nova methodus pro maximis et minimis...» («Новий метод знаходження найбільших і найменших значень...»), свідчить про важливість задачі знаходження екстремумів в становленні сучасної математики. У своїй статті Г. Лейбніц не тільки отримує як необхідну умову співвідношення $f'(\widehat{x})=0$ (цей результат зараз називають *теоремою Ферма*), але і використовує другий диференціал для розрізнення максимуму і мінімуму. Слід зазначити, що більшість наведених Лейбніцем фактів на той час були відомі також і І. Ньютону. Проте його робота «Метод флюксій», завершена в основному до 1671 р., була опублікована тільки у 1736 р.

Не торкаючись питань пріоритету, слід зазначити, що для оптичної задачі величина у геометричній оптиці, яка повинна досягати мінімуму у конкретних явищах надзвичайно доступна і не потребує подальших досліджень. Це – час. У механіці ж зовсім не очевидно, яка величина у процесі руху повинна мати мінімум або максимум. Для поглядів учених-механіків XVII ст. характерним є уявлення про те, що природа завжди діє найпростішим способом. Перше правило міркувань у фізиці Ньютона: «*Не треба приймати в природі інших причин понад ті, які істинні і достатні для пояснення явищ. З цього приводу філософи стверджують, що природа нічого не робить даремно, і було б зайвим здійснювати більшим те, що може бути зроблено меншим. Природа проста і не розкошує зайвими причинами речей*» [Ньютон, 1936]. З цього приводу спадає на думку вираз Антуана де Сент-Екзюпері: «*Мабуть, досконалість досягається не тоді, коли уже нічого не можна додати, а коли вже нічого не можна відняти*».

Г. Лейбніцем була сформульована цікава гіпотеза: «*все можливе прагне до існування*». Із зіткнення всіх можливостей здійснюється «*той ряд речей, який* *містить найбільший ряд можливостей*». Цей ряд такий же єдиний і певний, як серед ліній пряма, серед кутів прямий, серед фігур найбільш місткa, а саме коло або куля. Г. Лейбніц постулював принцип найбільшої кількості існування, що пояснює, чому якщо потрібно пройти від однієї точки до іншої, коли напрям лінії не визначений, то вибирається найлегший і найкоротший шлях: якщо від можливості слід перейти до дійсності, то кількість існування має бути «*якнайможливіше великою при даному можливому порядку існування*» [Лейбниц, 1982].

Йоганнес Кеплер
(1571 – 1630)
нім. Johannes Kepler

П'єр де Ферма
(1601 – 1665)
фр. Pierre de Fermat

Ісаак Ньютон
(1643 - 1727)
англ. Sir Isaac Newton

Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646 – 1716)
нім. Gottfried Wilhelm Leibniz

Проблема механіки полягала у з'ясуванні, яка величина може бути мінімальною (або максимальною) у процесі руху. Ця проблема, яка так само, як і принцип Ферма, виникла ще у XVII ст. і була більш-менш чітко з'ясована лише у середині XVIII ст. і доведена до такої ж математичної чіткості і визначеності, як і принцип Ферма, тільки у кінці XVIII ст. – початку XIX ст. Вперше поняття дії сформульовано Г. Лейбніцем, на якого у цьому відношенні і посилається П.-Л. Мопертюї.

Л. Ейлер вважав, що «*у світі не відбувається нічого, у чому не був би помітний сенс якого-небудь максимуму або мінімуму*».

Вже у XX ст. німецький математик Карл Л. Зігель дозволив собі такий вираз: «*За Лейбніцем наш світ є найкращим із усіх можливих світів, і тому закони природи можна описати варіаційними принципами*».

Перше формулювання варіаційного принципу в механіці з'явилося у 1744 р. П'єром-Луї Моро де Мопертюї (1698–1759).

15 квітня 1744 р. (тобто за декілька місяців до появи книжки Л. Ейлера «Метод знаходження кривих ліній, що мають властивості максимума або мінімума, або розв'язок ізопериметричної задачі в найширшому сенсі») бувший французький офіцер П.-Л. Мопертюї представив Паризькій Академії мемуар «Accord de differentes lois de la Nature qui avaient jusqu'ici pari incompatibles» (Узгодження різних законів природи, які досі вважались несумісними) [Maupertuis, 1744, стор. 571, 1756, стор. 3-28]. У ньому Мопертюї говорить перш за все про розповсюдження світла. Ще раніше, у 1740 р. П.-Л. Мопертюї заявив, що у найпростіших випадках

рівноваги деяка функція сил має максимум або мінімум [Maupertuis, 1740, стор. 240]. Цей закон був розглянутий потім у 1748/49 рр. Куртивроном (1715-1785) [Courtivron, 1749, стор. 21 і далі] і у 1751 р. Л. Ейлером.

Тільки у 1746 р. П.-Л. Мопертюї заявив про універсальний закон руху і рівноваги – принцип найменшої кількості дії. Термін «кількість дії» розуміється ним у сенсі «діяльності» і вимірюється добутком mvs, де m - маса, v - швидкість, s - шлях, який пробігається тілом[2].

Згідно з П.-Л. Мопертюї для руху $mvs = \min$, а у випадку рівноваги стан тіла такий, що коли йому наданий малий рух, то зроблена цим кількість дії мінімальна.

Можна вважати, що найбільш вагомою заслугою П.-Л. Мопертюї є тлумачення принципу мінімуму кількості руху як універсального закону природи, в той час, як у Л. Ейлера те ж саме співвідношення більш осмислене і точно математично викладене, розглядалось як придатне тільки до частинних задач. У цьому універсальному розумінні сформульованого П.-Л. Мопертюї принципу найменшої дії і є причина визнання Л. Ейлером пріоритету П.-Л. Мопертюї. Такого універсального принципу не було ні у Г. Лейбніца, ні у Л. Ейлера, хоча той же самий принцип, але не піднятий до рангу «законів творення світу» був відкритий Л. Ейлером навіть раніше П.-Л. Мопертюї.

5.4. Ступені вільності. А.Ф.Мебіус, П.Л.Чебишов, П.Й.Сомов, О.П.Малишев, Л.В.Ассур

Якщо розглядається механічна система твердих тіл, то принцип можливих переміщень, так само, як і рівняння рівноваги статики, дозволяє знаходити зовнішні силові впливи, що діють на механічну систему. Кількість рівнянь, складених, виходячи з принципу можливих переміщень, дорівнює кількості ступенів вільності даної механічної системи.

У механіці, ступені вільності - це сукупність незалежних координат переміщення і/або обертання, які повністю визначають положення системи або тіла (а разом з їх похідними за часом - відповідними швидкостями - повністю визначають стан механічної системи або тіла - тобто їх положення і рух). Це фундаментальне поняття застосовується в теоретичній механіці, будівельній механіці, теорії механізмів і машин, машинобудуванні, авіації і теорії літальних апаратів, робототехніці та інших областях.

Треба зазначити, що декілька теорем, які мають фундаментальне значення у статиці шарнірно-стержневих систем (ферм), було сформульовано А.Ф. Мебіусом, професором астрономії Лейпцігського університету. У своєму підручнику статики [Möbius, 1837, т.2, гл.4,5] він розглядає задачу рівноваги системи стержнів, з'єднаних між собою шарнірами, і показує, що якщо загальне число шарнірів в такій системі дорівнює n, то для отримання із з'єднуючих ці шарніри стержнів жорсткої незмінної системи потрібно мати не менше $2n–3$ стержнів для плоскої системи і не

---

[2] П.-Л. Мопертюї, так само як Р. Декарт, вважав, що в механіці основною величиною є кількість руху mv.

менше 3n–6 стержнів у разі просторової системи. При цьому А.Ф. Мебіус вказує і на можливість виняткових випадків, коли система з 2n–3 стержнями може виявитися не абсолютно жорсткою, допускаючи можливість малих відносних переміщень шарнірів. Досліджуючи подібні виняткові випадки, він знаходить, що детермінант системи рівнянь рівноваги для вузлів таких ферм обертається на нуль.

А́вгуст Фердіна́нд Мебіус
(1790 — 1868)
нім. August Ferdinand Möbius

Але, на жаль, важлива робота А.Ф. Мебіуса залишалася невідомою протягом багатьох років, і тільки коли практика освоїла використання сталевих ферм і коли в зв'язку з цим виникла потреба у вдосконаленні їхньої загальної теорії, інженери знову відкрили теореми А.Ф. Мебіуса. У цьому повторному відкритті видатна роль належить Отто Мору [Mohr, 1874, стор. 509; 1885, стор. 289; 1905, гл. XII]. Він встановив вимогу, щодо числа стержнів, необхідного для того, щоб утворити жорстку статично визначувану систему, дослідивши при цьому також і винятковий випадок нескінченно малої рухливості. Він довів, що існують статично визначувані ферми, які не піддаються розрахунку раніше розробленими методами, і запропонував для вирішення таких систем користуватися методом можливих переміщень.

Дещо інший варіант застосування методу можливих переміщень був запропонований Мюллером-Бреслау [Mu1ler-Вгеs1au, 1887, т. 9, стор. 121].

Слід зазначити, що начала загальної теорії просторових систем також були закладені А.Ф. Мебіусом. Зокрема, він показав, що для з'єднання в жорстку геометрично незмінну систему n шарнірів необхідно 3n-6 стержнів, зазначивши, що і тут можуть мати місце виняткові випадки нескінченно малої рухливості і вони характеризуються оберненням на нуль детермінанта системи рівнянь рівноваги для всіх вузлів. Він вказав корисний практичний прийом вирішення питання про те, чи є дана система жорсткою чи ні - якщо для будь-якого завантаження ми можемо знайти зусилля в усіх елементах системи, не приходячи до невизначеностей, то згаданий детермінант є відмінним від нуля і система незмінювана. В якості найпростішого припущення А.Ф. Мебіус допускає завантаженість нульовими силами, і якщо при цьому в жодному із стержнів зусилля не відмінне від нуля, то система жорстка.

А.Ф. Мебіус досліджував дуже важливу задачу про самоурівноважену просторову стержневу систему [Möbius, 1837, т.2, стор. 122] у вигляді замкнутого багатогранника і показав, що якщо плоскі грані такого багатогогранника є трикутниками або складені з трикутників, то число стержнів в ній в точності дорівнює числу рівнянь статики і така система є статично визначуваною. На рис. 5.1 наведено приклади таких систем.

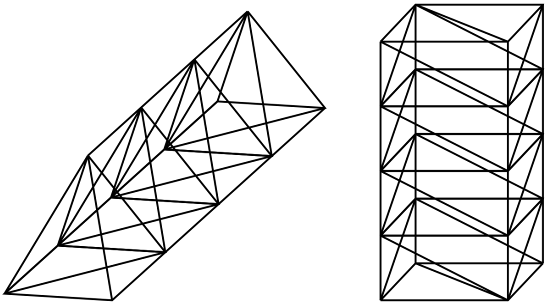


Рис. 5.1

Роботи А.Ф. Мебіуса з просторових систем також залишилися невідомими інженерам, і вони згодом розробили теорію такого виду ферм незалежно від Мебіуса. Це було виконано головним чином А. Феппле́м, який об'єднав свої дослідження з цього питання у виданій ним книзі [Föppl, 1892]. В цій книзі ми вперше зустрічаємося з розробкою деяких важливих питань щодо просторових систем. Книга Феппля стала серйозним внеском і стала основою для багатьох наступних праць у цій галузі.

Початок теорії структури плоских механізмів поклав П.Л.Чебишов. У роботі «Про параллелограмми» [Чебишев, 1870] він для важільних механізмів з обертовими кінематичними парами і одним ступенем свободи вивів структурну формулу (нині відому як «формула Чебишова» [Чебишев, 1948]) - тотожність, яку повинен задовольняти кожен такий механізм:

$$3m - 2(n + v) = 1,$$

де m – число рухомих ланок, n і v – числа відповідно рухомих і нерухомих шарнірів. Через 14 років ця формула була перевідкрита німецьким механіком М. Грюблером [Тюлина, 1979]. У 1887 році учень Чебишова П. Й. Сомов отримав аналогічну структурну формулу для просторових механізмів [История механики в России, 1987].

Під числом ступенів вільності кінематичного ланцюга в даному випадку мається на увазі число ступенів вільності рухомих ланок відносно стійки (ланки, прийнятої за нерухому). Однак сама стійка в реальному просторі може переміщатися.

Однак, незалежно від того рухається машина чи ні, характер руху ланок поршневого двигуна щодо стійки залишається незмінним.

Введемо наступні позначення:

k – число ланок кінематичного ланцюга

p_1 – число кінематичних пар першого класу в даному колі

p_2 – число пар другого класу

p_3 – число пар третього класу

p_4 – число пар четвертого класу

p_5 – число пар п'ятого класу.

Загальна кількість ступенів вільності k вільних ланок, розміщених в просторі, дорівнює $6k$. У кінематичному ланцюзі вони з'єднуються в кінематичні пари (тобто на їх відносний рух накладаються в'язі).

Крім того, в якості механізму використовується кінематичний ланцюг, що має стійку (ланку, прийняту в якості нерухомої). Тому число ступенів вільності кінематичного ланцюга буде дорівнювати загальній кількості ступенів вільності всіх ланок за винятком в'язей, що накладаються на їх відносний рух:

$$W = 6k - \Sigma S_i$$

Число в'язей, що накладаються усіма парами І класу, дорівнює їх числу, тому що кожна пара першого класу накладає одну в'язь на відносний рух ланок, з'єднаних в таку пару; число в'язей, що накладаються усіма парами ІІ класу, дорівнює їх подвоєній кількості (кожна пара другого класу накладає дві в'язі) тощо.

У ланки, прийнятій за нерухому, віднімаються всі шість ступенів вільності (на стійку накладається шість в'язей). Таким чином:

$$S_1=p_1,\ S_2=2p_2,\ \mathrm{S}_3=3p_3,\ S_4=4p_4,\ S_5=5p_5,\ S_{стійки}=6,$$

а сума всіх в'язей

$$\sum S_i=p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5+6.$$

В результаті отримуємо наступну формулу для визначення числа ступенів вільності просторового кінематичного ланцюга:

$$W = 6k - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5 - 6.$$

Згрупувавши перший і останній члени рівняння, отримаємо:

$$W = (6k - 1) - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5\ ,$$

або остаточно:

$$W = 6n - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5\,,$$

де n - число рухомих ланок кінематичного ланцюга.

Дане рівняння називається структурною формулою кінематичного ланцюга загального вигляду.

Формула була отримана вперше (в дещо іншому вигляді) П.Й. Сомовим в 1887 р. і розвинена О.П. Малишевим в 1923 р. Тому її часто називають формулою Сомова-Малишева. У деяких підручниках її називають формулою Малишева – за авторством остаточного варіанту.

Як наука теорія механізмів і машин почала формуватися в кінці XVIII - початку XIX ст. під назвою «Прикладна механіка».

Однак машини існували задовго до цієї дати. Тому в історії розвитку ТММ можна умовно виділити чотири періоди:

1-й період до початку XIX століття - період емпіричного машинобудування протягом якого винайдена велика кількість простих машин і механізмів: підйомники, млини, каменедробарки, ткацькі і токарні верстати, парові машини (Леонардо да Вінчі, Вейст, Ползунов, Уатт). Одночасно закладаються і основи теорії: теорема про зміну кінетичної енергії і механічної роботи, "золоте правило механіки", закони тертя, поняття про передатнеу відношення, основи геометричної теорії циклоїдального і евольвентного зачеплення (Карно, Кулон, Амонтон, Кардано, Ремер, Ейлер).

2-й період від початку до середини XIX століття - період початку розвитку теорії машин і механізмів (ТММ). У цей час розробляються такі розділи як кінематична геометрія механізмів (Саварі, Шаль, Олів'є), кінетостатіка (Каріоліс), розрахунок маховика (Понселе), класифікація механізмів за функцією перетворення руху (Монж, Лану) та інші розділи. Написано перші наукові монографії з механіки машин (Вілліс, Бориньї), прочитано перші курси лекцій по ТММ і видано перші підручники (Бетанкур, Чижов, Вейсбах).

3-й період від другої половини XIX століття до початку XX століття - період фундаментального розвитку ТММ. За цей період розроблені: основи структурної теорії (Чебишов, Грюблер, Сомов, Малишев), основи теорії регулювання машин (Вишнеградський), основи теорії гідродинамічного мастила (Грюблер), основи аналітичної теорії зачеплення (Олів'є, Гохман), основи графоаналитического динаміки (Віттенбауер, Мерцалов), структурна класифікація та структурний аналіз (Ассур), метод планів швидкостей і прискорень (Мор, Манке), правило прокручування механізму (Грасгоф) і багато інших розділів ТММ.

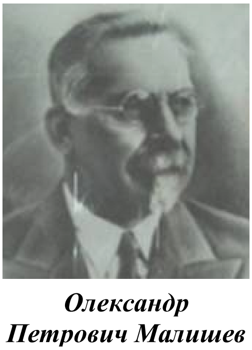
Знаменитий російський вчений, математик і механік, академік П.Л. Чебишев (1821 - 1894) опублікував ряд робіт по структурі і синтезу важільних механізмів. Використовуючи розроблені ним методи, він винайшов і спроектував понад 40 нових механізмів, які здійснюють задані траєкторії руху, зупинку ланок при русі інших і т.д. Його по праву вважають засновником російської школи теорії механізмів і машин, а структурна формула плоских важільних механізмів називається формулою Чебишева.

Структурна група Ассура (також просто група Ассура) - це такий найкоротший кінематичний ланцюг, утворений нижчими парами п'ятого класу, при приєднанні якого до будь-якого плоского механізму ступінь його рухливості не змінюється.

Група названа ім'ям Л.В. Ассура, який і розробив методику їх утворення на початку XX ст. [Ассур, 1913-1914].

Пафнутій Львович Чебишов
(1821 – 1894)
рос. Пафнутий Львович Чебышёв

Павло Йосипович Сомов
(1852 – 1919)
рос. Павел Осипович Сомов



Олександр Петрович Малишев
(1879 – 1962)
рос. Александр Петрович Малышев

Леонід Володи́мирович Ассу́р *(1878 — 1920)*
рос. Леони́д Влади́мирович Ассу́р

Групи Ассура діляться на класи, види і порядки.

- Клас групи Ассура визначається класом найвищого контуру, що входить в неї.
- Вид групи Ассура визначається поєднанням обертальних (шарнірів) і поступальних (повзунів) кінематичних пар в даній групі.
- Порядок групи Ассура визначається за кількістю кінематичних пар, якими вона кріпиться до механізму.

Структурна група з n = 2 і p = 3 називається двохповодковою групою.

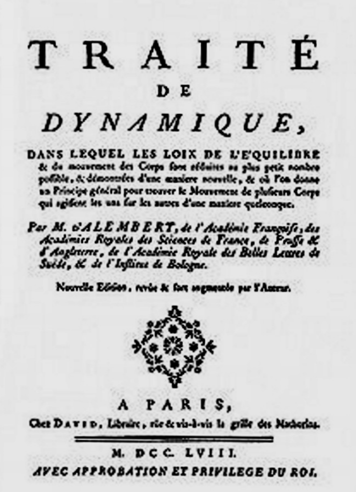
4-й період від початку XX століття до теперішнього часу - період інтенсивного розвитку всіх напрямків ТММ

5.5. Динаміка. Принципи Д'Аламбера, Журдена, Ґаусса, Герца

У динаміці при виведенні рівнянь руху використовуються три підходи. Перші два базуються на диференціальних принципах механіки – принципі Д'Аламбера та принципі можливих переміщень, третій – на інтегральному принципі Гамільтона.

Одним з широко застосовуваних підходів побудови рівнянь руху є метод, що базується на принципі Д'Аламбера. Згідно з принципом Д'Аламбера, якщо до заданих активних сил, які діють на точку механічної системи, і реакцій в'язей, які накладаються, додати сили інерції, дістанемо врівноважену систему сил.

У 1743 р. **Жан Ле-Рон Д'Аламбер** (1717–1783)– французький учений-енциклопедист, широко відомий як філософ, математик і механік, видав «Трактат про динаміку», який став першою роботою, де були сформульовані загальні принципи складання диференціальних рівнянь руху матеріальних систем, причому задачі динаміки зводились до задач статики. Ж.Л. Д'Аламбер по суті розповсюдив на динаміку застосування принципу віртуальних переміщень. Основні математичні дослідження Ж.Л. Д'Аламбера належить до теорії диференціальних рівнянь. Його праці разом з дослідженнями Л. Ейлера і Д. І Бернуллі стали основою математичної фізики.



TRAITÉ

DE

DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE

A PARIS,

M. DCC. LVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Д'Аламбер. Трактат про динаміку

Зауважимо, що спочатку ідея сформульованого Ж.Л. Д'Аламбером принципу була висловлена Якобом Бернуллі при вивченні задачі про центр коливань тіл довільної форми. У 1716 р. петербурзький академік Я. Герман висунув принцип статичної еквівалентності «вільних» рухів і «фактичних» рухів, тобто рухів, які здійснюються при наявності в'язей. Пізніше цей принцип був застосований Л. Ейлером до задачі про коливання гнучких тіл (ця робота була опублікована в 1740 р.) і отримав назву «петербурзького принципу». Але першим, хто сформулював розглядуваний принцип у загальному вигляді, хоч і не дав йому певного аналітичного виразу, був саме Ж.Л. Д'Аламбер.

Аналітичний вираз цього принципу був наданий пізніше Ж.-Л. Лаґранжем у його «Аналітичній механіці». Цікаво, що сам Ж.Л. Д'Аламбер у «Трактаті про динаміку» [D'Alembert, 1743] при викладені принципу, який отримав надалі назву принципа Д'Аламбера, не користувався терміном «сили інерції». Термін «Д'Аламберові сили інерції» з'явився набагато пізніше. Л. Ейлер вважав, що термін «сили інерції» був уперше введений Й. Кеплером, який позначав їм «властиву кожному тілу силу опору всьому тому, що намагається змінити його стан руху».

Якщо розглядувана механічна система має складну структуру і складається з дискретних мас та тіл скінченних розмірів, безпосередньо записати рівняння динамічної рівноваги дуже важко. У такому разі часто ефективним є застосування принципу можливих переміщень (принципу Д'Аламбера-Лаґранжа). В задачах динаміки принцип можливих переміщень або загальне рівняння динаміки формулюється таким чином: рух системи з ідеальними в'язями відбувається так, що в будь-який момент часу сума робіт всіх активних сил і сил інерції на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю.

Принцип можливих переміщень є еквівалентним рівнянням динамічної рівноваги, проте варіаційне формулювання набагато ширше застосовується в задачах механіки. Справа в тому, що роботи сил на можливих переміщеннях є скалярними величинами і можуть додаватися алгебраїчно, тоді як самі сили є векторами і повинні додаватися за правилами векторного аналізу.

Зауважимо, що в аналітичній механіці принцип Д'Аламбера-Лаґранжа часто записують у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right] = 0.$$

Також зазначимо, що в аналітичній механіці іноді використовуються і інші варіаційні принципи, подібні до принципу можливих переміщень - принцип **Журдена** (Філип Едвард Бертран Журден) і принцип **Ґаусса** (Йоганн Карл Фрідріх Ґаусс). Коротко наведемо їх формулювання у вигляді варіаційних рівнянь.

Принцип Журдена

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\dot{x}_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta\dot{y}_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta\dot{z}_i\right] = 0.$$

Принцип Ґаусса (принцип найменшого примушення)

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta\ddot{y}_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i\right] = 0.$$

За допомогою принципу Ґаусса можна отримати диференціальні рівняння руху механічної системи з ідеальними в'язями, зокрема з нього витікає, що за відсутності заданих сил точка рухатиметься вздовж даної гладкої поверхні по кривій, що має найменшу кривизну. Це говорить про зв'язок принципу Ґаусса з принципом прямолінійного шляху Генріха Рудольфа Герца.

Принцип Герца[3] (принцип найменшої кривизни) – один із варіаційних принципів механіки, згідно з яким за відсутності активних сил із усіх кінематично можливих, тобто допускаємих в'язями траєкторій дійсною буде траєкторія, яка має найменшу кривизну або «найпряміша».

Жан ле Рон Д'Аламбер
(1717–1783)
фр. Jean Le Rond D'Alembert, d'Alembert

Філіп Едвард Бертран Журден
(1879-1919)
англ. Philip Edward Bertrand Jourdain

Йоганн Карл Фрідріх Гаусс
(1777-1855)
нім. Johann Carl Friedrich Gauß

Генріх Рудольф Герц
(1857-1894)
нім. Heinrich Rudolf Hertz

Віддаючи належне принципам Журдена, Гаусса та Герца, все ж зауважимо, що найбільш універсальним і зручним у плані теоретичного і практичного використання є, мабуть, принцип Д'Аламбера-Лагранжа. Сам Йоганн Карл Фрідріх Гаус, перед виведенням принципу найменшого примушення, писав [Gauss, 1829]: «*Як відомо, принцип віртуальних швидкостей перетворює будь-яку проблему статики в питання чистої математики, а за допомогою принципу Даламбера динаміка, в свою чергу, зводиться до статики. Звідси випливає, що жоден основний принцип рівноваги і руху не може істотно відрізнятися від двох згаданих нами вище принципів і що, яким би не був цей принцип, його завжди можна розглядати як більш-менш безпосередній висновок з них*».

5.6. Принцип Гамільтона-Остроградського. Двоїстий принцип Гамільтона-Пуанкаре

Значним етапом в історії варіаційних принципів, підготовленим розвитком науки і техніки, стали дослідження ірландського математика В. Гамільтона.

Вільям Ровен Гамільтон (1806-1865) – видатний ірландський математик і фізик XIX ст. Основні його роботи присвячені математичній оптиці, механіці, варіаційному численню. Встановив для консервативних систем загальний інтегральний варіаційний принцип класичної механіки (1833). Цей принцип був узагальнений М.В. Остроградським (1850) на неконсервативні системи (принцип Гамільтона-Остроградського). Числення кватерніонів, у якому закладені основи векторного (і операційного) числення і яке є першою некомутативною алгеброю,

---

[3] Див.: *Г. Голдстейн* «Классическая механика» [Голдстейн, 1957].

оператор Гамільтона – такі основні досягнення, що вписали ім’я Гамільтона в історію фізики і математики.

Протягом довгого часу В. Гамільтон цікавився уявними величинами, їх геометричною інтерпретацією і можливими узагальненнями. У 1843 р. він дійшов до відкриття числення кватерніонів – гіперкомплексних чисел. Це його основний і найбільш значимий внесок у математику. 16 жовтня 1843 р. він встановив фундаментальну теорему множення кватерніонів, яка лежить в основі некомутативних алгебр. У листопаді 1843 р. він зробив доповідь про це відкриття у Королівській Ірландській академії.

От як сам В. Гамільтон пише про це у листі до сина 5 серпня 1865 р.: «*… на 16-й день того ж місяця – так сталось, що це був понеділок і день наради Королівської ірландської академії - я йшов, щоб бути присутнім і головуючим, і ваша мати, яку, мабуть, хтось підвіз сюди, гуляла зі мною вздовж Королівського каналу; і хоча вона розмовляла зі мною, але плин думок, що відбувався в моїй голові, нарешті привів мене до результату, важливість якого я відразу ж відчув. Здалось, що замкнувся електричний ланцюг і спалахнула іскра, вісник того (як я миттєво відчув), що багаторічна робота завершилася виразно спрямованою думкою ..., яка стане надбанням інших, якщо мені доведеться жити досить довго, щоб у точних виразах повідомити про відкриття. Я не міг чинити опору імпульсу – нефілософському за суттю – накреслити на камені мосту Брум, поруч з яким ми проходили, основну формулу з позначеннями* i, j, k *, а саме* $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$*, яка містила розв’язок проблеми. Але звичайно, вирізьблений ножем напис відтоді геть здерся. Більш довговічне повідомлення залишилося, однак, в записах книги нарад академії (запис 16 жовтня 1843 р.), яке зафіксувало той факт, що я тоді попросив і одержав дозвіл зробити повідомлення про кватерніони на перших загальних зборах сесії, яке і відбулося відповідно в наступному місяці у понеділок 13-го листопада*». (Переклад листа від сера В.Р. Гамільтона до його сина, преподобного Арчібальда Гамільтона, датованого 5 серпня 1865 року, згідно джерелу http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Letters/ BroomeBridge.html).

У механіці В. Гамільтон є прямим продовжувачем напрямку Ж.-Л. Лаґранжа. Це виражається не тільки в його захопленні «Аналітичної механікою», яку він називав «науковою поемою», і не тільки в тому, що він працював аналітично, не використовуючи наочних геометричних уявлень навіть там, де вони могли б надати йому безпосередню допомогу. Найважливішою обставиною тут є точка зору В. Гамільтона на задачі дослідження в галузі механіки, яка зближує його з Ж.-Л. Лаґранжем: механічні задачі суть клас математичних задач, розробка механіки є розробка математичних методів.

Для поглядів В. Гамільтона є характерним такий випадок. Хтось якось помітив: «Я не знаю людей, які не бачивши конічної рефракції, повірили б у її існування. Я сам звернув увагу двох десятків математиків, показуючи їм конус світла». В. Гамільтон відповів: «Наскільки це відрізняється від мого підходу. Якби я тільки бачив конічну рефракцію, я б ніколи не повірив у неї. Мої очі часто обдурювали мене. Я вірю у конічну рефракцію, тому що я довів її» [Truesdell, 1980].

Принцип Гамільтона є інтегральним підходом, за допомогою якого можна реалізувати ефективні алгоритми побудови рівнянь руху. Цей варіаційний принцип виконується як для скінченномірних, так і для континуальних динамічних систем. З метою спрощення викладення розглянемо скінченномірні динамічні системи [Баженов та ін., 2012].

Нехай стан деякої механічної системи характеризується n узагальненими координатами $q_1(t), q_2(t),...,q_n(t)$. Розглянемо $(n+1)$-мірний розширений координатний простір q_1, $q_2,...,q_n$, t (рис. 5.2). Нехай в момент часу t_1 механічна система знаходиться в точці B, що визначає деякий динамічний стан системи. Припустимо, що система зазнає деякого динамічного впливу. Внаслідок цього впливу стан системи еволюціонуватиме.

Узагальнені координати

$$\mathbf{q}^0(t) = (q_1^0(t), q_2^0(t), ..., q_n^0(t))^T$$

опишуть деяку криву в розглядуваному координатному просторі. Нехай у момент часу t_2 система знаходитиметься в точці C. Отже, за проміжок часу від t_1 до t_2 механічна система перемістилася по кривій BC.

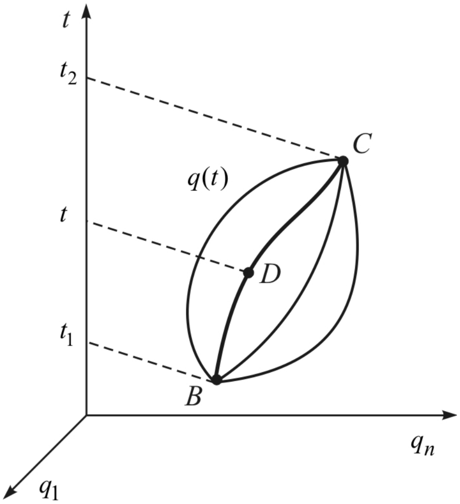


Рис. 5.2

Кожному моменту часу $t \in [t_1, t_2]$ відповідає деяка точка на кривій BC. Під дією сил, що прикладаються, механічна система деформується. В кожний момент часу t можна визначити кінетичну енергію системи $T(t)$, енергію деформації $U(t)$, а також роботу $A(t)$ зовнішніх сил на відповідних переміщеннях; до зовнішніх сил належать також неконсервативні сили опору руху (дисипативні сили). Коли б система рухалася по іншій кривій, що з'єднує точки B і C, то кожному моменту часу t відповідали б, взагалі кажучи, інші значення T, U і A.

У випадку, коли при аналізі механічної системи застосовується перший підхід (розглядаються рівняння динамічної рівноваги), в точках кривої $\mathbf{q}(t,0) = \mathbf{q}^0(t)$ ці рівняння виконуються, тобто векторна сума сил інерції, пружних сил і зовнішніх сил дорівнює нулю. Для точок, що лежать на інших кривих, рівняння динамічної рівноваги, взагалі кажучи, не задовольняються. Відрізнити дійсний («прямий») шлях від інших («манівців») можна за величинами $T(t)$, $U(t)$ і $A(t)$. Принцип Гамільтона стверджує, що на «прямих» шляхах

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0. \tag{5.16}$$

Зазначимо, що виходячи з принципу Гамільтона, можна одержати рівняння руху, які повністю збігаються з рівняннями, отриманими за допомогою методу динамічної рівноваги або принципу можливих переміщень. Більш того, якщо будь-який з трьох принципів, що розглядалися, взяти за вихідний, то інші два можна отримати з нього як наслідок.

У більшості механічних систем кінетична енергія виражається через узагальнені координати та їх перші похідні за часом, потенціальна енергія – тільки через узагальнені координати, а робота неконсервативних сил на можливих переміщенням, викликаних варіюванням узагальнених координат, є лінійною функцією цих варіацій. Саме завдяки цій обставині вдається досить легко перейти від інтегральної рівності (5.16) до системи диференціальних рівнянь. Поряд із рівністю (5.16) для запису принципу Гамільтона може бути застосований наступний вираз:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0\,, \tag{5.17}$$

де так звана функція Лаґранжа (кінетичний потенціал)

$$L = L(t, y_1, y_2, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_n) = T - U \tag{5.18}$$

є різницею між кінетичною та потенціальною енергією системи.

Сам В. Гамільтон розглядав випадок, коли функція Лаґранжа L не залежить явно від часу t, тобто $L = L(y_j, \dot{y}_j)$, що відповідає випадку стаціонарних в'язей. Дослідження В. Гамільтона були узагальнені М.В. Остроградським у 1848 р. і В.Ф. Донкіним у 1854 р. на випадок, коли функція Лаґранжа залежить явно від часу t, тобто $L = L(y_j, \dot{y}_j, t)$, що відповідає нестаціонарним в'язям. В зв'язку з цим принцип Гамільтона називають також принципом Гамільтона-Остроградського.

Зазначимо, що із умови рівності нулю першої варіації функції дії ($\delta S = 0$), ще не витікає, що функція дії (по Гамільтону) S має екстремальні значення. Необхідно дослідити також другу варіацію $\delta^2 S$.

Серре показав, що друга варіація дії $\delta^2 S$ для дійсного руху при деяких обмеженнях, які накладені на границі інтегрування, є додатною і, відповідно, функція S має мінімум. Тому принцип Гамільтона називають також принципом найменшої дії.

В. Гамільтон так визначає місце свого принципу найменшої дії в системі фізичних наук: «Хоча закон найменшої дії став, таким чином, у ряд найвищих теорем фізики, все ж його претензії на космологічну необхідність на підставі економії у Всесвіті тепер зазвичай відкидаються. Серед інших причин це випливає і з того, що величина, яка претендує на те, щоб бути зекономленою, насправді часто марнотратно витрачається».

У зв'язку з тим, що задача пошуку мінімуму інтеграла S є задача варіаційного числення, принцип Гамільтона відноситься до варіаційних принципів механіки. Він є інтегральним принципом, оскільки рух системи вивчається на скінченному проміжку часу. Принцип Гамільтона є інваріантним відносно вибору системи координат.

Згідно з принципом Гамільтона-Остроградського стан системи характеризується змінними Лаґранжа $t, y_j, \dot{y}_j \ (j=1,\ldots,n)$, тобто моментом часу, а також положенням та швидкостями точок системи.

Існує також інше формулювання принципу Гамільтона – у формі Пуанкаре (принцип Гамільтона-Пуанкаре), в якому для характеристики стану системи використовуються змінні Гамільтона $t, y_j, p_j \ (j=1,\ldots,n)$, де p_j – узагальнені імпульси, що визначаються рівностями

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}, \quad j=1,\ldots,n, \tag{5.19}$$

причому змінні Гамільтона можуть бути виражені через змінні Лаґранжа і навпаки, а стан системи можна характеризувати як значеннями змінних Лаґранжа, так і значеннями змінних Гамільтона.

Математичний запис принципу Гамільтона-Пуанкаре має вигляд:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{y}_j - H \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \tag{5.20}$$

де функція Гамільтона $H = H(y_j, p_j, t)$ є результатом переходу від функції Лаґранжа $L(y_j, \dot{y}_j, t)$ за допомогою перетворення Лежандра та теореми Донкіна

$$H(y_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j \widehat{\dot{y}}_j - L(y_j, \widehat{\dot{y}}_j, t). \tag{5.21}$$

Через $\widehat{\dot{y}}_j$ позначені узагальнені швидкості, виражені через змінні Гамільтона. При цьому позиційні координати y_j та час t є пасивними змінними.

Зазначимо, що оскільки перетворення Лежандра є інволютивним, то неважко за тією самою схемою повернутись до функції і змінних Лаґранжа. Загальна схема взаємного перетворення виглядає таким чином:

Стара система	*Нова система*
Функція: Лаґранжа, змінні: швидкості	Функція: Гамільтона , змінні: імпульси

Пасивні змінні: позиційні координати, час

Дуальна природа перетворення відбивається в наступних операціях:

1. Введення нових змінних

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}$,	$\dot{y}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$,

2. Введення нових функцій

$$H=\sum p_i\dot{y}_i-L, \qquad \Big| \qquad L=\sum p_i\dot{y}_i-H,$$

3. Вираження нових функцій через нові змінні

$$H=H(y_1,...,y_n,p_1,...,p_n,t), \qquad \Big| \qquad L=L(y_1,...,y_n,\dot{y}_1,...,\dot{y}_n,t).$$

Отже, виходячи з функції Лаґранжа L і за допомогою трьох послідовних операцій можна побудувати функцію Гамільтона H. Так само можна почати з функції Гамільтона H і побудувати, використовуючи три послідовні операції, функцію Лаґранжа L.

Зазначимо також, що похідні функцій Лапласа і Гамільтона за пасивними змінними згідно із теоремою Донкіна пов’язані співвідношеннями

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}=-\frac{\partial H}{\partial y_i},\ \frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Таким чином, виходячи з принципу Гамільтона-Остроградського (5.16) можна отримати систему *n* звичайних диференціальних рівнянь *другого* порядку відносно узагальнених координат $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$, а за допомогою принципу Гамільтона-Пуанкаре (5.20) отримуємо систему $2n$ диференціальних рівнянь *першого* порядку відносно узагальнених координат $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ та узагальнених імпульсів $p_1(t),p_2(t),\ldots,p_n(t)$.

Останні 22 роки свого життя Гамільтон майже цілком присвятив розробці і розвитку числення кватерніонів і їх практичному застосуванні.

Гамільтон помер 2 вересня 1865 р. у віці 60 років. Йому належить 141 друкована робота з різних питань математики, оптики і динаміки.

Так були закладені основи аналітичної механіки Гамільтона, що стали надалі основою динаміки в сенсі Гамільтона-Якобі, так як чудовий німецький математик Якобі (1804-1851) блискуче розвинув, уточнив і значно збагатив ідеї Гамільтона в області інтегрування диференціальних рівнянь руху.

Карл Густав Якоб Якобі народився в 1804 р. в родині потсдамського банкіра. Він закінчив Берлінський університет і в 1825 р. захистив дисертацію. З 1826 р. він протягом 17-ти років працював у Кенігсберзі.

Різнобічна математична творчість Якобі, його блискучий педагогічний талант, знаменитий сарказм, що страхав супротивників, дозволили йому не тільки широко впливати на сучасників, а й створити наукову школу. Для Якобі характерно постійне прагнення до нового, бажання змін, йому не вистачає спокою, необхідного для завершення логічно струнких побудов. Недарма Якобі одного разу сказав: «Панове, для гауссовської строгості у нас немає часу». Про математику Якобі зауважив: «Mathesis est scientia earum quae per se clara sunt» (Математика належить до числа тих наук, які зрозумілі самі по собі).

Сер Вільям Ровен Гамільтон
(1806 – 1865)
англ. William Rowan Hamiltont

Михайло Васильович Остроградський
(1801 – 1862)
рос. Михаил Васильевич Остроградский

Жуль Анрі Пуанкаре
(1854 – 1912)
фр. Jules Henri Poincaré;

Карл Густав Я́коб Якобі
(1804 – 1851)
нім. Carl Gustav Jacob Jacobi

Бурхливий розвиток аналітичних методів розв’язання задач механіки у XVII-XVIII ст. у працях П. Ферма, Р. Декарта, Г. Галілея, І. Ньютона, Я.І. Бернуллі, І.І. Бернуллі, Г.Ф.А. Лопіталя, Г.В. Лейбніца, Г. Гюйгенса, П.Л.М. Мопертюї, Ж.Л. Д’Аламбера, Л. Ейлера, Ж. Серре, Ж Лагранжа, П. Лапласа, К. Гаусса, Ж. Фур’є та інших привів до створення основ аналітичної механіки.

Наступним етапом розвитку аналітичної механіки стали дослідження С. Пуассона і У.Р. Гамільтона в двадцятих-тридцятих роках XIX ст., К. Якобі, М.В. Остроградського, А. Лежандра, Б. Родрігеса, М.С. Лі, які були подовжені у працях Ф. Слудського, М. Тализіна, Д. Бобильова, І.Д. Соколова, Ж. Бертрана, Й. Сомова, Н. Брашмана, І. Рахманінова, О. Гельдера, П. Воронця, Г. Суслова, К. Неймана, Ж. Адамара, Е. Уіттекера, Е. Бельтрамі, П. Аппеля, С. Чаплигіна, О. Ляпунова, М. Четаєва, Л. Больцмана, О. Гьольдера, Ж. Делоне, М. Реті, Е. Рауса, А. Пуанкаре, Г. Герца, Д. Гільберта, Ф. Клейна, Е. Нетер, О. Больца та ін.

Таким чином, у перший період формування варіаційних принципів механіки, їхній розвиток по суті невід’ємний від варіаційного числення і проблеми побудови аналітичної механіки. Розвиток варіаційного числення давав математичні методи аналітичної механіки, розвиток останньої був однією із важливих причин, що привели до створення варіаційного числення, а надалі постійно розширювало коло його проблем.

Література

Александров П.С. (ред.) Проблемы Гильберта. - М.: Наука, 1969. - 240 с.

Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., 1979.

Аппель П. Руководство теоретической (рациональной) механики, том 1. – М., 1911.

Аппель П. Теоретическая механика. Т. І. Перевод с 5-го французского издания И.Г. Малкина. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.

Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук - первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов - М.: Наука, 1989. - 96 с.

Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989.

Ассур Л.В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. − Известия СПб. политехн. ин-та, т. XX, вып. 1, 1913, С. 329-385; т. XX, вып. 2, 1913, С. 581-635; т. XXI, вып. 1, 1914, С. 187- 283; т. XXI, вып. 2, 1914, С. 475-573.

Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. – М.: Гостехиздат, 1955. - 248 с.

Бабенко А.Є., Бобир М.І., Бойко С.Л., Боронко О.О. Теорія пружності. Ч.1. – К.: «Основа», 2009. – 244 с.

Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Ворона Ю.В. Динаміка споруд. Підручник. – Київ: Віпол, 2012. - 344 с.

Баженов В.А. Варіаційні основи будівельної механіки. Підручник. - К.: Каравела, 2014. – 877 с.

Баженов В.А. Варіаційні принципи будівельної механіки. Історія становлення та розвитку / В.А. Баженов, В.О. Геращенко, М.В. Гончаренко; під загал. ред. проф. В.А. Баженова. - К.: Каравела, 2015. – 762 с.

Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 2005, ISBN 978-5-9221-0576-7

Боголюбов А.Н. Математики и механики. Биографический справочник. – К.: Наук. думка, 1983. - 639 с.

Боголюбов А.Н. Геометрия и механика в творчестве Ж.В. Понселе // Исследования по истории физики и механики. — М.: Наука, 1986. - С. 178-191.

Боголюбов А.Н. Роберт Гук (1635-1703). – М.: Наука, 1987. – 240 с.

Боголюбов А.Н. Огюстен Коши и его вклад в механику, и физику. Исследования по истории физики и механики. — М.: Наука, 1988 — С. 179 — 199.

Виппер Ю.Ф. Семейство математиков Бернулли. - М., 1875.

Галилео Галилей. Сочинения, т. I, «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Русский перевод С.Н. Долгова. Серия «Классики естествознания». - М.-Л.: Гос. тех.-теор. изд., 1934. – 695 с.

Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М., 1966. - 300 с.

Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. – М.: АН СССР, 1959. – 386 с.

Гнеденко Б.В. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: ГИТТЛ, 1952.

Гнеденко Б.В., Погребысский И.Б. Михаил Васильевич Остроградский. 1801—1961. - М.: изд-во АН СССР, 1963.

Голдстейн Г. Классическая механика. - М.: Гостехиздат, 1957.

Гольденблат И.И. Экстремальные и вариационные принципы в теории сооружений "Строительная механика в СССР" (1917-1957). – М.: Гостехиздат, 1957. - 300 с.

Григолюк Э.И. С.П. Тимошенко и его работы в области устойчивости деформируемых систем // С. П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 731 — 800.

Григолюк Э.И. С.П. Тимошенко и его труды по проблемам механики твердого деформируемого тела и расчету инженерных сооружений. // С. П. Тимошенко. Статические и динамические проблемы теории упругости. — Киев: Наукова думка, 1975. — С. 515 — 558.

Григолюк Э.И. Степан Прокофьевич Тимошенко (1878 — 1972). // МГУ. Институт механики. Научные труды № 47. — М.: Издательств Московского университета, 1977. — 59 с.

ГриголюкЭ.И. С.П. Тимошенко. Жизнь и судьба. – М.: изд. МАИ, 2002. - 402 с.

Григорьян А.Т. Очерки истории механики в России. — М.: Издательство Академии наук СССР, 1961. — 291 с.

Григорьян А.Т. Михаил Васильевич Остроградский. - М.: изд-во АН СССР, 1964.

Григорьян А.Т. Механика от античности до наших дней. — М.: Наука, 1974. — 479 с.

Григорьян А.Т. Очерк развития механики в СССР. — М.: Русский язык, 1979. — 277 с.

Григорьян А.Т., Ковалев Б.Д. Даниил Бернулли. — М.: Наука 1981. — 318 с.

Григорьян А.Т., Фрадлин Б.Н. История механики твердого тела. — М.: Наука, 1982. — 293 с.

Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Перший директор інституту механіки ім. С.П. Тимошенка Національної Академії наук України///Прикладна механіка. — 1998, 34, №10.

Гюйгенс Х. Трактат о свете, ГТТИ, М.-Л., 1935.

Декарт Р. Геометрия. З додатком вибраних робіт П. Ферма і листування Декарта. − М.−Л.: ГОНТИ, 1938.

Демьянов В.П. Рыцарь точного знания (П. Л. Чебышёв). — М. : Знание, 1991. — 192 с.

Дорофеева А.В. Развитие варационного исчисления, как исчисления вариаций. – «Историко-матем. иссл.», вып. XIV, М. – Физматгиз, 1961. – С. 101-181.

Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Мир, 1981. – 383 с.

Дюэм П. Развитие механики. 1903.

Евграфов Г.К. Журавский Дмитрий Иванович (1821-1891) // Ученые и изобретатели железнодорожного транспорта. — М.: Государственное транспортное железнодорожное издательство. Сборник статей, 1956. — С. 51 — 60.

Жуковский Н.Е. Ученые труды М.В. Остроградского по механике. Собр. соч., т. VII/. – М.-Л., 1950.

Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. – М., Наука, 1975.

История механики в России / Под ред. А. Н. Боголюбова, И. З. Штокало. — Киев: Наукова думка, 1987. – 391 с.

История механики с древнейших времен до конца XVIII века. / Под редакцией А.Т. Григорьяна, И.Б. Погребысского. – М.: Наука, 1971. – 298 с.

История механики с конца XVIII века до середины XX века. / Под редакцией А.Т. Григорьяна, И.Б. Погребысского. – М.: Наука, 1972. – 414 с.

Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. – М.-Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1935.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.

Коперник. Галилей. Кеплер. Лаплас и Эйлер. Кетле: Биографические повествования / Сост. Н.Ф. Болдырева. — Челябинск: Урал, 1997. — 452 с. — (Жизнь замечательных людей. Биографическая библиотека Ф. Павленкова).

Космодемьянский А.А. Очерки по истории механики. – М.: Наука, 1982. – 295 с.

Котек В.В. Леонард Эйлер. — М.: Учпедгиз, 1961. — 106 с.

Крылов А.Н. Леонард Эйлер // Леонард Эйлер. 1707 — 1783. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. — М.-Л.: Издательство Академии наук СССР, 1935. — С. 1 — 28.

Крылов А.Н. Жозеф Луи Лагранж. - В сб.: Ж.Л. Лагранж (1736-1936). Сб. статей к 200-летию со дня рождения. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1937.

Крылов А.Н. Ньютон и его значение в мировой науке (1643 – 1943). – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1943. – 40 с.

Кудрявцев П.С. Исаак Ньютон, 1643—1943: к 300-летию со дня рождения / А. Тимирязев. — Учпедгиз, 1943. — 143 с.

Кудрявцев П.С. История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1948. — Т. 1. От античной физики до Менделеева.

Кудрявцев П.С. История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1955. — Т. 2. От Менделеева до открытия квант (1870—1900).

Кудрявцев П.С. Исаак Ньютон. — Учпедгиз, 1955. — 124 с.

Кудрявцев П.С. Эвангелиста Торричелли: к 350-летию со дня рождения. – Знание, 1958. – 22 с.

Кудрявцев П.С. История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1971. — Т. 3. От открытия квант до создания квантовой механики (1900—1925).

Кудрявцев П.С. Курс истории физики. — М.: Просвещение, 1974.

Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. – М., 1951.– 476 с.

Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2 – ОГИЗ, Гостехиздат, 1945. – 619 с.

Лаврентьев М. и Люстерник Л. Основы вариационного исчисления. Т. 1, ч. II. – М.-Л.: ОНТИ, НКТП, 1935. – 399 с.

Лаврентьєв М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. Издание 2-е переработанное. – М.: Гостехиздат, 1950. - 296 с.

Лагранж Ж. Аналитическая механика, том 1. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950. — 594 с.

Лагранж Ж. Аналитическая механика, том 2. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950. — 440 с.

Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики, ч. 1. – М.: ОНТИ, 1934.

Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. – Т.1, ч. 2. – М., 1962.

Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х т. Т. 1. - М.: 1982. - С. 235-284.

Лопиталь Г.Ф. Анализ бесконечно малых. Перевод с французского Н.В. Леви. Под редакцией и со вступительной статьей А.П. Юшкевича. М.-Л.: Гостехиздат, 1935.

Математическая энциклопедия. Т. 1, М., 1977. Т. 2, М., 1979. Т. 3, М., 1982. Т. 4, М., 1984. Т. 5, М., 1985.

Мах Э. Механика. – С.-Пб., 1909. – 448 с.

Мах Э. Механика. Историко-критический очерк её развития. - Ижевск: РХД, 2000. - 456 с.

Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966.– 432 с.

Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Моисеев Н.Д. Очерки по истории механики. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 478 с.

Національна. Академія наук України. – К.: "Фенікс", 1998.

Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Пер. с лат. А.Н. Крылова, Изд. АН СССР, М.-Л., 1936.

Остроградский М.В. Лекции по аналитической механике, Собр. соч., т. 1, ч. 2, М.-Л., 1946.

Остроградский М.В. Полное собрание трудов в двух томах. – К.: Изд-во АН УССР, 1959-1961.

Остроградский М.В. Избранные труды. – М.: АН СССР, 1968. – 583 с.

Полак Л.С. (ред.) Вариационные принципы механики. Сборник статей классиков науки. М.: Физматгиз, 1959

Полак Л.С. Вариационные принципы механики. Изд. 2-е, испр. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. - 600 с.

Прудников В.Е. М.В. Остроградский. — В кн.: Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. - М.: Учпедгиз, 1956.

Пуанкаре А. Наука и метод. – С.-Пб., 1910.

Пуанкаре А. Избранные труды: В 3 т.– М.: Наука, 1974.– 584 с.

Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – 561 с.

Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями.– М.: Стройиздат, 1975.– 144 с.

Ракчеев Е.Н. Дмитрий Иванович Журавский. — М.: Наука, 1984. — 240 с.

Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. - М.: Гостеориздат, 1957. - 536 с.

Тюлина И.А. История и методология механики. – М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 282 с.

Филонович С.Р. Роберт Гук. – Квант, 1985, № 7.

Филонович С.Р. Шарль Кулон. – М.: Просвещение, 1988. - 111 с.

Филонович С.Р. Томас Юнг как историк науки // Исследования по истории физики и механики. — М.: Наука, 1990. – С. 78-92.

Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник. — Киев: Наукова думка, 1977. - 512 с.

Храмов Ю.А. Мариотт Эдм (Mariotte Edme) // Физики: Биографический справочник / Под ред. А.И. Ахиезера. - Изд. 2-е, испр. и дополн. - М.: Наука, 1983. - 400 с.

Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник / Под ред. А. И. Ахиезера. — Изд. 2-е, испр. и дополн. — М.: Наука, 1983. — 400 с.

Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: ГИФМЛ, 1970. – 184 с.

Чебышев П. Л. О параллелограммах // Труды съезда естествоиспытателей. Отдел технологии и практической механики, 1870. – С. 9-30.

Чебышев П. Л. Полн. собр. соч., т. 4, М.-Л., 1948.

Чернов С.Н. Леонард Эйлер и Академия наук // Леонард Эйлер (1707 — 1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. — М. — Л.: Издательство Академии наук СССР, 1935. — С. 163-238.

Шмутцер Э., Шютц В. Галилео Галилей. — М.: Мир, 1987. -142 с.

Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М. — Л.: ГТТИ, 1934.

Эйлер Л. Диссертация о принципе наименьшего действия, с разбором возражений славнейшего проф. Кёнига, выдвинутых против этого принципа (1753). В сб. Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С.Полака. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 96 – 108.

Эйлер Л. Интегральное исчисление, т. III. - М.: Физматгиз, 1958.

Эйнштейн А. Собрание научных трудов. В четырех томах. Т. 4. – М.: Наука, 1965-1967.

Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 163 с.

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

Юшкевич А.П. Леонард Эйлер. Жизнь и творчество // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сборник статей. — М.: Наука, 1988. — С. 15-46.

Яглом И.М. Феликс Клейн и Софус Ли. — М.: Знание, 1977.

Якоби К. Лекции по динамике. - М.-Л., ОНТИ, 1936.

Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974.– 488 с.

Argyris J.H. Energy Theorems and Structural Analysis. // Aircraft Engineering. Published in a series of articles in Okt, Nov. 1954, Vol. 26 and Feb., March, Apr., May 1955, Vol. 27. [Переклад рос.: Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций // Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем — Л.: Судпромгиз, 1961. — С. 37-293.]

Argyris J.H. Die Matrizentheorie der Statik. // Ingenieur-Archiv, 1957, vol. 25, —P. 174-192

Aubin J.P. Burchard H.G. Some aspects of the method of the hypercircle applied to elliptic variational problems // SYNSPADE 1970 New York: Academic Press. 1971.

Appell P. Traité de Mécanique, т. III. – 1900.

Carnot S. Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance. Paris: Bachelier, Libraire, 1824.

Castigliano A. Intorno all'equilibrio dei sistemi elastici // Atti delle Reale Acadamie delle Scienze di Torino. 1875. — V. X.

Castigliano A. Nuova teorie intorno all'equilibrio dei sistemi elastici // Atti della Reale Academie delle Scienze di Torino. — 1875. — V. XI.

Castigliano A. Theorie de l'equilibre des systemes elastiques. — Turin: 1879.

Clough R.W. The Finite Element Methods in Plane Stress Analysis // Proceedings of 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburg, 1960. [Переклад рос.: Клаф Р.У. Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости // Расчет строительных конструкций с применением электронных машин — М.: Стройиздат, 1967 — С. 142-170].

Courtivron O. de. Recherches de Statique et de Dynamique ou l'on donne un nouveau principe general pour la consideration des corps animes par des forces variables, suivant une loi quelconque, Memoires de l'Academie des Sciences de Paris, 1749.

D'Alembert J.R. Traité de dynamique, dans lequel les lois de l'equilibre & du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible. - Paris: David L'aîné, 1743.

D'Alembert J.R. Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange - Œuvres de Lagrange, V.1, Paris, 1867, p. XVI.

Delambre J.B.J. Oeuvres de Lagrange. I. - Paris, 1867.

De l'Hospital. Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes. - Paris, 1696.

Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. — Marc Michel Bousquet, 1744.

Fermat P. Oeuvres, т.1, Paris, 1891.

Fleckenstein J.O. Johann und Jakob Bernoulli. – Basel, 1949.

Fourier J.B. Mémoire sur la Statique, contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des moments. J l'Ecole Polytechniques 1798; (2):20–60.

Föppl A. Das Fachwerk im Raume, Leipzig, 1892

Friedrichs K. Ein Vcrfahrcn dcr Variationsrechnung das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdruckes darzustellen," in Nachrichten der Academic der Wissenschaften in Gottingen, 1929. - pp. 13-20.

Fuss N.I. Varia problemata circa acquilibri teabium compactilium oneratarum, earumque vires et pressionem contra anterides // Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. — 1778. — 1780. — T. II. Pars I — P. 194 — 216.

Galileo Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. In Leida, MDCXXXVIII. – 1638.

Gauss, C. F. (1829). Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. Crelle's Journal 4: 232-235.

Goldstine H. A history of the calculus of variations from the 17th through 19th century. – N.Y.: Springer, 1980. – 410 p.

Hamilton W.R. Second essay on a general method of dynamics, I. - Philos. Trans. Roy. Soc., 1835. pp. 95-144.

Hellinger E. Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. Enzycl. Math. Wiss. 1914, IV, 4. – P. 654-655.

Helmholtz H. Dynamik continuerlich verbreiteten Massen. — Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius Barth. — 1902. — 247.

Hertz H. Über die Induktion rotierender Kugeln. – Berlin: 1880.

Hilbert D. The Foundations of Geometry. The open court publishing company, La Salle, Illinois, 1950.

Hilbert D. Uber das Dirichlet'sche Prinzip. In: Festschrift zur Feier des 150jahrigen Bestehens der Kgl. Ges. der Wiss. Zu Gottingen. Berlin: Weidenhammer. - 1901.

Karman T. Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften. T. VI, 1910.

Lagrange J.L. Mécanique analytique, 1re éd. – Paris. – 1788.

Leibniz G.W. Demonstrationes novae de Resistentis solidorum // Acte Eruditorum Lipsiae 1684. — P. 319 — 325.

Lejeune-Dirichlet P.G. Vorlesungen uber Zahlentheorie. – Braunschweig, 1863.

Leonardo da Vinci. Codices Madrid (Codex Madrid I), ed. L. Reti, German facs. ed. Frankfurt a.M.: S. Fischer-Verlag, 1974.

Liouville J. Memoire sur l'mtegration des equations differentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points materieles. - «Journ. math.», 1849, XIV. 257-299.

Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-critisch dargestellt, Leipzig, 1883.

Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 7th, rev. ed. Leipzig: F.A. Brockhaus, 1912.

Maupertuis P. La loi du repos., Mem. de l'Acad. de Paris, 1740.

Maupertuis P. Accord de differentes lois de la Nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles (lu a l'Academie des Sciences de 15 avril 1744) Mem. de l'Acad. d. Sci. de Paris, 1744.

Maupertuis P. Oeuvres de Maupertuis, т. 4, Lyon, 1756, стор. 3-28.

Mobius A. F. Lehrbuch der Statik (2 тома), 1837

Mohr O. Z. Architek. u. Ing. Ver., Hannover, 1874

Mohr O. Ziviling, 1885

Mohr O. Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik

Mu11er-Вгes1au H.F.B. Schweiz. Bauztg. 1887

Ostrogradsky M. Sur les integrales des equations generales de la dynamique. Melanges de L'academie de St. Petersbourg, 6/18 oct 1848, изб. произв., изд. АН СССР, 1958.

Poincare H. Les methodes nouvelles de la Mécanique celeste, t. 1. Paris, 1892. pp. 167-193.

Spiess O. Die Mathematiker Bernoulli. – Basel, 1948.

Stevin S. De Beghinselen der Weeghconst, 1586.

Trefftz E. Ueber die Spanungsverteilung in tordierten Staben bei teilweisser ueberschreitung der Fliessgrenze // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik. — 1925. Band 5.

Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures//J. Aero. Sci. 1956. Vol. 23. No. 9. – P. 805-824.

Truesdell C. Six Lectures on Modern Natural Philosophy. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1966.

Truesdell C.A. Essays in the history of mechanics. - Berlin: Springer Verlag, 1968. - 384 p.

Truesdell C. Leonard Euler, supreme geometer (1707-1783) // Studies in XVIIIth Century Culture, v. 2. Case Western Reserve Univ. Press, 1972, p. 51-95.

Truesdell C. The Tragicomical History of Classical Thermodynamics, 1822 – 1854. – Springer-Verlag, 1980.

Varignon P. Nouvelle mécanique, 2, Paris, 1725.

Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K. The Finite Element Method in Engineering Science - London: McGraw-Hill, 1967. 272 p. [Русск. перевод: Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред — М.: Недра, 1974 — 240 с.]

Нарис 6

ОСНОВНІ ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І ФУНКЦІОНАЛИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

…в науці є власна естетика, і краса логічної стрункості варіаційних принципів механіки не може не вражати …

Л. Полак

6.1. Варіаційні принципи механіки твердого деформівного тіла

Нав'є у мемуарі, представленому в Паризьку академію наук у 1821 р. і опублікованому в 1827 р. [Navier, 1827] (у скороченому вигляді в 1823 р. [Navier, 1823]), виходячи з концепції Ньютона про побудову речовини, розвиненої Бошковичем [Boscovich, 1763], записав вираз для суми робіт усіх сил, що діють на молекулу при малому зміщенні, і користуючись методами варіаційного числення отримав диференціальні рівняння рівноваги і руху в переміщеннях, а також і граничні умови. Мабуть, саме ця робота спонукала О. Коші викласти свій знаменитий принцип напружень у мемуарі, представленому в Паризьку академією наук у 1822 р., короткий зміст якого у вигляді статті [Cauchy, 1823] був опублікований в 1823 р. У загальному вигляді поняття пружного потенціалу було введене в 1839 р. Дж. Гріном [Green, 1839], який на основі принципу збереження енергії вивів рівняння теорії пружності. Лорд Кельвін (Lord Kelvin) довів існування функції пружного потенціалу на основі першого і другого законів термодинаміки.

У класичній будівельній механіці стержневих систем [Рабинович, 1954] вважається, що принцип можливих переміщень для деформівних тіл вперше був застосований у 1833 р. Пуассоном. Для розрахунку системи довільного числа стержнів, шарнірно сполучених своїми кінцями в довільному числі вузлів, він отримав рівняння, яке, по суті, являє собою принцип можливих переміщень для деформівних тіл:

$$\sum Q_m \overline{\delta}_m - \sum S\overline{\Delta s} = 0,$$

де Q_m - зовнішні сили, $\overline{\delta}_m$ - можливі переміщення вузлів за напрямками цих сил, S - зусилля в стержнях, $\overline{\Delta s}$ - подовження стержнів, які відповідають переміщенням $\overline{\delta}_m$. І хоча властивості пружності системи тут не враховувались, робота С.Д. Пуассона розглядається як етап у підготовці подальших робіт.

Сімеон-Дені Пуассон
(1781–1840)
фр. Siméon-Denis Poisson

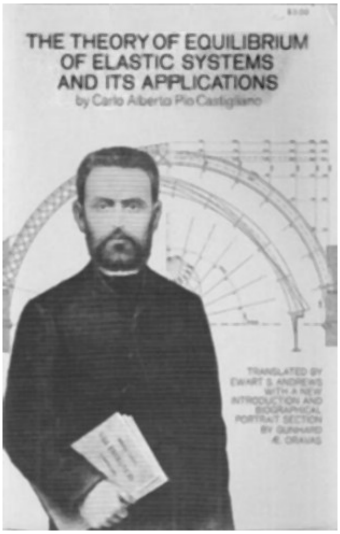
Клод-Луї Марі-Анрі Нав'є
(1785–1836)
фр. Claude-Louis Marie-Henri Navier

Огюстен Луї Коші
(1789–1857)
фр. Augustin Louis Cauchy

Слід зазначити, що ще Л. Ейлер, користуючись даними листа Даніеля Бернуллі від 22 жовтня 1742 р., за допомогою варіаційного числення розв’язав задачу про те, коли «значення виразу $\int\limits_l \left(\frac{1}{\rho^2}\right)ds$ буде найменшим» і дослідив переміщення консольної балки при згині, звичайно, не користуючись при цьому фізичним поняттям повної потенціальної енергії системи. Цікаво, що задача про брахістохрону була розв’язана в 1696 р., чим був закладений початок варіаційного числення (теорії екстремумів функціоналів). Символ варіації був введений Лаґранжем, хоча сам термін «варіація» був введений Л. Ейлером набагато пізніше, а термін «функціонал» - Ж. Адамаром лише у 1903 р.

У 1833 р. Ж. Фур’є вперше ввів поняття в’язей, отримав нерівність Фур’є. У 1851 р. Сільвестер ввів термін «інваріант».

Згодом були сформульовані теореми Лаґранжа і Кастільяно. Формула Лаґранжа (перша формула Кастільяно), як і сам принцип можливих переміщень, справедлива для будь-якої (лінійної або нелінійної) деформівної системи. Природа формули Лаґранжа аналогічна природі формули Дж. Гріна в теорії пружності. Із зазначеною формулою пов’язують ім’я Ж.-Л. Лаґранжа, мабуть, у тому сенсі, що вона витікає з варіаційного принципу Лаґранжа. Проте, безпосередньо її отримав Карло Альберто Кастільяно (1847–1884) і оскільки є й інша симетрична формула, цю формулу називають також інколи першою формулою Кастільяно.



Нова теорія рівноваги пружних систем Кастільяно (1866)

У 1884 р. засновник берлінської школи теорії споруд Е. Вінклер в некролозі з приводу кончини К.А. Кастільяно, не приховуючи захоплення і гіркоти писав: «*Теорія споруд була певною мірою заснована італійцями, такими як Галілей, Марчетті, Фабрі, Гранді та ін. Останнім часом у відповідь на запити, висунуті розвитком залізниць, згадана теорія досягла нових значних успіхів, і італійці знову відіграли провідну роль у цьому поступі. Серед недавніх публікацій слід відмітити роботи Аллієві, Біадего, Каневацці, Керадіні, Клерікетті, Кремони, Фаваро, Фаверо, Фігарі, Гвіді, Модільяні, Савіотті, Сайно, і це лише деякі з авторів, яких варто згадати в цьому переліку. Праці Кастільяно виділяються навіть серед цих робіт. Хоча ми, німці, також пишаємось своїми досягненнями в механіці, однак повинні визнати, що ми багато чого навчилися у наших італійських колег, і що, на жаль, мовні бар’єри все ще перешкоджають скорішому розповсюдженню їх теоретичних розробок*».

У своїй дипломній роботі К.А. Кастільяно досліджував пружні системи за допомогою теореми про мінімум роботи деформації. Незабаром виявилось, що ця теорема багато в чому збігається з принципом найменшої роботи $\Pi = \min$, відкритим Луїджі Федеріко Менабреа ще в 1857 р. Обурений зневажливим ставленням до себе, Менабреа видав в 1875 р. статтю, в якій відстоював свій пріоритет. Кастільяно за декілька місяців у відповідь опублікував есе, обсягом 150 сторінок, під назвою «Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elasticiti» («Нова теорія рівноваги пружних систем»), у якій він пішов набагато далі Л.Ф. Менабреа і сформулював сутність своєї головної роботи, яка з’явилася згодом в 1879 р.

Головна робота К.А. Кастільяно базується на трьох твердженнях щодо енергії деформації: «Якщо ми виразимо функцію внутрішньої роботи тіла або пружної системи через відносні переміщення точок прикладення зовнішніх сил, то похідні цієї функції по переміщеннях дадуть величини відповідних сил»:

$$\partial \Pi (\ldots, \delta_k , \ldots) / \partial\delta_k = F_k$$

Перша теорема Кастільяно ще раніше була застосована до фізичних проблем Дж. Гріном. Перекладення цієї теореми для задач теорії споруд – справжній витвір К.А. Кастільяно, сформульований їм вперше в 1873 р. в дипломній роботі.

Друга теорема Кастільяно формулюється таким чином: «*Якщо виразити внутрішню роботу тіла або пружної системи як функцію зовнішніх сил, то похідна цього виразу по одній з сил дасть відносне переміщення точки прикладення сили*»:

$$\partial \Pi (\ldots,F_k , \ldots) / \partial F_k = \delta_k$$

З цього виразу можна отримати третю теорему Кастільяно: «*Напруження, що виникають між частинами тіла або системи після деформації, є такими, що робота внутрішніх сил є мінімальною, з чого слідують рівняння, які виражають рівновагу сил, прикладених до кожної з частин*». Ця теорема відповідає принципу Менабреа, на який К.А. Кастільяно посилається у вступі явно, але при цьому він додає, що дав її строге доведення у своїй дипломній дисертації в 1873 р.

У вступі до своєї головної роботі К.А. Кастільяно стверджує, «*що дана книга, яка повністю охоплює теорію пружних зусиль у спорудах, ... заснована виключно на теоремах про похідні внутрішньої роботи*». Таким чином він вперше ввів принцип енергії в теорію споруд.

Хоча деякі із наведених вище результатів були незалежно отримані Л.Ф. Менабреа, а також англійським ученим Джеймсом Генрі Коттеріллом (1836–1922), мабуть надання їм імені Кастільяно історично є цілком виправданим, оскільки саме він розв’язав шляхом отриманих ним результатів велику кількість задач і, по суті, створив робочий розрахунковий апарат.

Увагу своїх німецьких колег до головної роботи К.А. Кастільяно «Теорія рівноваги пружних систем та її застосування» привернув Е. Вінклер.

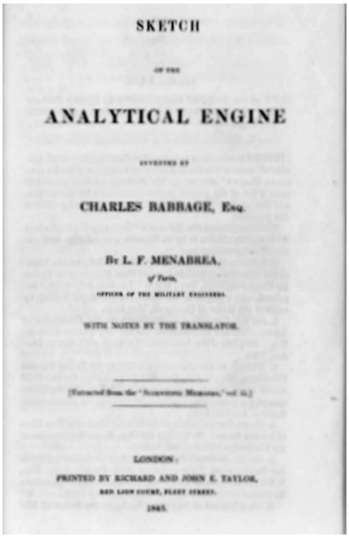
Слід зазначити, що одним із перших учених, які намагалися формулювати принцип, що зараз має назву принципу можливих змін зусиль (напружень), був італійський інженер Л.Ф. Менабреа (1809-1896). Перша його робота, присвячена цьому питанню, - «Principio generale per determinare le tensioni e le pressioni in un sistema elastico» («Загальний принцип для визначення напружень і тиску в пружній системі») була представлена на семінарі в Академії наук в Турині в 1857 році і в тому ж році надрукована.

Джордж Грін
(1793–1841)
англ. George Green

Карло Альберто Кастільяно
(1847–1884)
італ. Carlo Alberto Castigliano

Луіджи Федеріко Менабреа
(1809–1896)
італ. Luigi Federico Menabrea

Проте у роботі були неточності. По-перше, Л.Ф. Менабреа не розумів того, що у формулюванні цього принципу фігурує не потенціальна енергія деформації, а деяка абстрактна математична величина, яка потім була названа доповнювальною енергією; по-друге, у сформульованому Л.Ф. Менабреа принципі фігурували не дійсні переміщення, як це мало бути, а їх варіації, і, нарешті, не була підкреслена необхідність задоволення варіаціями напружень рівнянь рівноваги, тобто не підкреслювалась статична можливість варіації напружень. У зв'язу з появою робіт Л.Ф. Менабреа і цими неточностями виникла велика і довготривала дискусія. Один із учасників цієї дискусії Жозеф Луї Франсуа Бертран (1822-1900) у листі до Л.Ф. Менабреа у 1869 р. повідомив його про необхідність внесення змін у принцип ($U^{\text{доп}}$ замість U, Δ_i замість $\delta\Delta_i$ і статична можливість δP_i). У 1870 р. Л.Ф. Менабреа опублікував статтю, в якій урахував усі зауваження Ж.Л.Ф. Бертрана (з уривку листа Менабреа до Бертрана, який був спільно опублікований ними в Трудах Академії наук в Турині 1 травня 1870 р., стор. 702). Таким чином сучасне формулювання принципу можливих напружень належить Ж.Л.Ф. Бертрану. Проте, у зв'язку з тим, що, незважаючи на наявність помилок у початковому формулюванні принципу, Л.Ф. Менабреа застосував його при розв'язанні багатьох задач і не припускався помилок (оскільки розглядалися лінійні системи для яких $U^{\text{доп}} = U$, варіації сил приймалися статично можливими без



SKETCH

ANALYTICAL ENGINE

CHARLES BABBAGE, Esq.

By L. F. MENABREA,

OFFICER OF THE MILITARY ENGINEERS.

WITH NOTES BY THE TRANSLATOR.

LONDON:
PRINTED BY RICHARD AND JOHN E. TAYLOR,
RED LION COURT, FLEET STREET.

Титульний лист книги
Менабреа

зазначення цього, а під $\delta\Delta_i$ фактично розумілась Δ_i) інколи зберігають у назві принципу і ім’я Л.Ф. Менабреа.

Незалежно від Ж.Л.Ф. Бертрана у 1882 р. принцип додаткового пружного потенціалу (доповнювальної пружної енергії) був запропонований німецьким ученим Вільгельмом Френкелем (1841-1895) стосовно просторової задачі теорії пружності в статті «Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben» («Принцип найменшої роботи внутрішніх сил пружних систем та його застосування до вирішення задач статики») [Fränkel, 1882].

У 1921 р. німецький учений Оскар Домке (1874-1945) досліджував принцип можливої зміни сил з термодинамічної точки зору [Domke, 1921] і встановив екстремальний принцип для адіабатичних пружних систем: усі зовнішні сил і температура роблять величину $u^{\text{доп}} - \sum_i P_i \Delta_i - \sum TS$ мінімальною, тобто

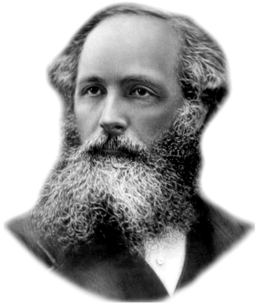
$$\delta_{(Q,T)}[u^{\text{доп}} - \sum_i P_i \Delta_i - \sum TS] = 0,$$

де T - абсолютна температура, S - ентропія.

Використання теореми робіт для обчислення переміщень у пружних системах було започатковано Джеймсом Клерком Максвеллом і Християном Отто Мором. Дж. К. Максвелл у роботі 1864 р., а О. Мор у низці статей 1874-1885 рр. отримали відому формулу для визначення переміщень у пружній фермі за заданими внутрішніми зусиллями, яка надала можливість зручного розрахунку статично невизначуваних систем.

Джеймс Генрі Коттерілл
(1836–1922)
англ. James Henry Cotterill

Жозеф Луї Франсуа Бертран
(1822–1900)
фр. Joseph Louis François Bertrand



Джеймс Клерк Максвелл *(1831–1879)*
англ. James Clerk Maxwell

У 1882 р. Маттіас Коенен звернувся до загальної теореми роботи, яку О. Мор з успіхом використовував у теорії розкісних стержневих систем, і застосував її у формі принципу можливих змін напруженого стану для обчислення переміщень у статично визначуваних балках і реакцій опор в нерозрізній балці. При цьому він вперше сформулював рівняння роботи одиничної сили у вигляді відомого інтеграла від добутку $\delta_i = \int\limits_{(l)} \frac{M_i M_j}{EI} dx$.

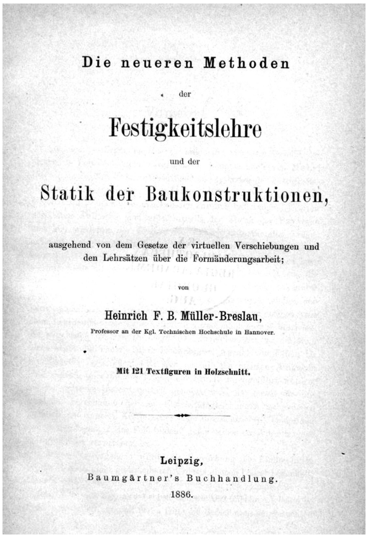
Фрідель Хартманн дослідив справедливість теорем Кастільяно в своїй монографії «Математичні основи будівельної механіки» (1985). Виходячи з теореми вкладення С.Л. Соболєва, він отримав нерівність $m\text{-}i > n/2$, в якій m є порядком похідних функцій, які входять у вираз енергії, i - індексом сингулярності, а n - розмірністю континууму. Теореми Кастільяно справедливі тільки тоді, коли ця нерівність виконується. Якщо до балки (n=1) прикладені зосереджені сили, то індекс сингулярності i=0. Врахуємо, що m=2 (до виразу енергії входять другі похідні прогинів) і отримаємо в результаті підстановки 2 - 0> 1/2. Отже, вищенаведена нерівність виконується, і теореми Кастільяно можуть бути застосовані. Для двовимірних (n=2) і тривимірних тіл (n=3), які завантажені зосередженими силами, нерівність не задовольняється, оскільки m=1≤ $n/2$. Якщо діє зосереджений момент (i=1), то теореми Кастільяно також застосовуються тільки для балок і пластин, деформування яких відбувається згідно з гіпотезою Кірхгоффа-Лява. У разі прикладення навантажень, яким відповідають розв’язки із більшим індексом сингулярності, теореми Кастільяно не можуть бути використані в жодному випадку [Hartmann, 1985].

С.Л. Соболєв (1908–1989) – радянський математик і механік, один з найвизначніших математиків XX століття, що зробив основоположний внесок у сучасну науку, в своїх фундаментальних дослідженнях започаткував ряд нових наукових напрямів в сучасній математиці.

Основу класичної фази (1875–1900) перетворення теорії споруд у фундаментальну дисципліну технічних наук цивільного будівництва складала боротьба навколо її теоретичного обгрунтування, в результаті якої метод сил, створений Генріх Франц Бернхард Мюллер-Бреслау і його студентами, набув сучасної форми.

Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау значно розширив свої журнальні статті по теорії статично невизначуваних ферм, видані між 1882 і 1885 рр., в своїй книзі з опору матеріалів і теорії споруд (1886), заснованій на принципі можливих переміщень і роботи деформації. У цій монографії проблеми аналізу конструктивно-технічних особливостей несучих систем, витікаючих з щоденного будівництва, піддалися обробці, заснованій на єдиній теоретичній основі принципу можливих переміщень (у формі принципу віртуальних сил), другій теоремі Кастільяно (заснований на принципі енергії) і принципі Менабреа. Ця робота, яка витримала в цілому п’ять видань (1886, 1893, 1904, 1913, 1924), не тільки завершила період формування дисципліни теорії споруд, який був розпочатий роботою Л. Нав’є «Résumé des Leçons» [Navier, 1826], але також і дозволила класичній теорії споруд замінити статику і опір матеріалів. Серцевиною цього синтезу було строге формулювання методу сил для ферм в його сучасній структурі і формі.

У першому виданні Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау вводить поняття статично визначуваної основної системи і одиничної сили $X_k = 1$, що діє на цю систему. Наслідуючи ідею О. Мора та розширюючи її для охоплення конструкцій при згині, Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау дозволяє цій одиничній силі виконати роботу на дійсних переміщеннях (тобто над даною системою з n ступенями статичної невизначеності) і таким чином отримує n рівнянь пружності; він отримує ті ж самі рівняння через принцип Менабреа і суперпозицію рівнянь для внутрішніх сил. Майже всі статично невизначувані задачі розв'язані Г.Ф.Б. Мюллером-Бреслау з використанням принципу Менабреа. Проте, при визначенні ліній впливу для статичної невизначуваності у разі рухомого навантаження P_m він прямо приймає принцип віртуальних сил і за допомогою теореми Максвелла $\delta_{mn} = \delta_{nm}$, яку Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау узагальнив для поворотів, виражає першу версію методу сил [Müller-Breslau, 1886, стор. 138–140].



Die neueren Methoden
der
Festigkeitslehre
und der
Statik der Baukonstruktionen,

ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und
den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit;

von

Heinrich F. B. Müller-Breslau,
Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in Hannover.

Mit 121 Textfiguren in Holzschnitt.

Leipzig,
Baumgärtner's Buchhandlung.
1886.

Титульний лист другого випуску «Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktion» Мюллера-Бреслау

Безпосередньо після публікації «Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktion» («Найновітніші методи опору матеріалів та теорії споруд») О. Мор видав сформульовану в категоричних виразах полеміку в журналі «Zivilingenieur», що протистояла концепції «ідеалізованої роботи деформації» Г.Ф.Б. Мюллера-Бреслау, яку він розповсюдив на спеціальні випадки навантаження у вигляді теплових ефектів і зсувів опор; одне з його критичних зауважень полягало в тому, що «цілий ряд інших позначень, наприклад, принцип роботи, принцип можливої роботи, принцип можливих переміщень, використовувалися для принципу можливих швидкостей захисниками новіших методів» [Mohr, 1886, стор. 398]. Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау відповів на це слушне заперечення в 1892 р., символічно відокремивши фактичну умову зсуву і причинну умову сили від теоретичної умови сили [Müller-Breslau, 1892, стор. 9-11]. Тому принцип віртуальних сил отримав право на існування вперше, незалежно від принципу можливих переміщень на рівні невеликих зсувів, не в назві, а в апараті рівнянь класичної теорії споруд.

Тоді як О. Мор обговорював законність теорем Кастільяно для обгрунтування класичної теорії споруд, Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау завершував класичну теорію споруд, послідовно розширюючи вираз енергії деформації для пружних розкісних систем. Тому енергетична доктрина стала домінуючою в теорії і практиці біля 1900 року. Проте в першому десятилітті XX ст. Вейнгартен і Мертенс спробували усунути панування теорем Кастільяно. Дебати, що супроводжували це, нагадували стару суперечку між О. Мором і Г.Ф.Б. Мюллером-Бреслау, яка значною мірою стосувалась проблем пріоритету. Але до 1910 року дебати були завершені Вейраухом на користь теорем Кастільяно в класичній теорії споруд.

Християн Отто Мор
(1835–1918)
нім. Christian Otto Mohr

Генріх Франц Бернхард Мюллер-Бреслау *(1851–1925)*
нім. Heinrich Franz Bernhard Müller-Breslau

Ріхард Курант
(1888–1972)
нім. Richard Courant

Розвиток будівельної механіки в цей період пов'язаний з іменами Б.П. Клапейрона, Г. Ламе, Дж. Максвелла, О. Мора, Дж.В. Релея, В.Л. Кирпичова, С.П. Тимошенка, О. Лява, Софі Жермен та ін. Два найзначніші з наукових досягнень Бенуа Поля Еміля Клапейрона – це, скоріш за все, «Abhandlung über die bewegende Kraft der Wärme» («Тактат про рушійну силу тепла») [Clapeyron, 1926] і теорема, яка носить його ім'я в теорії пружності. Надання цій теоремі імені Клапейрона може бути приписане Г. Ламе, який в 1852 р. виклав теорему Клапейрона для загального випадку просторового пружного континууму в першій монографії по теорії пружності [Lamé, 1852, стор. 80–92]. Обидві ці роботи Б.П. Клапейрона мали вирішальний вплив на фундаментальні науково-технічні дисципліни - теорію споруд і прикладну термодинаміку, яка почала формуватися з 1820 р.

Публікація теореми Клапейрона про роботу пружних сил (1852) ознаменувала початок нової ери енергетичного напрямку у теорії пружності і будівельній механіці. Формула Клапейрона встановлює залежність між роботою зовнішніх сил і потенціальною енергією деформації. Принципово важливо, що ця залежність, справедлива для дійсного стану системи, дозволяє шляхом варіювання певних компонентів сформулювати різні варіаційні принципи механіки.

Хоча головні принципи термодинаміки, які були сформульовані до 1850 р. Саді Карно (1796–1832), Дж.П. Джоулем (1818–1889), Р. Майєром (1814–1879), Г. Гельмгольцем (1821–1894), Р. Клаузісом (1822–1888) і У. Томсоном (1824–1907), Д.У. Гіббсом (1839-1903), відносилися до найважливіших відкриттів XIX ст. багатьма знаними сучасниками, тільки багато десятиліть опісля вони суттєво вплинули на теоретичні основи теорії споруд і прикладної термодинаміки під час їх формування, яке тривало три чверті сторіччя (1825–1900). Їх становлення було результатом створення парового двигуна, не як винаходу для досягнення специфічної мети, а швидше як «універсального двигуна промисловості» [Marx, 1979, стор. 398]. Паровий локомотив буксирував промислову революцію до найдальших занедбаних куточків континенту.

Фундаментальний варіаційний принцип термодинаміки – принцип термодинамічної рівноваги Гіббса.

Для k-компонентної r-фазної системи при сталості її внутрішньої енергії U об'єму V і кількості молей компонентів умова термодинамічної рівноваги полягає в тому, що при всіх можливих змінах параметрів стану ентропія системи S залишається незмінною або зменшується. Іншими словами ентропія ізольованої системи при термодинамічній рівновазі має умовний максимум

$$(\delta S)_{U,V} \le 0.$$

Знак рівності має місце при протіканні в системі зворотних процесів, знак нерівності - при незворотних процесах (у разі ізольованої системи).

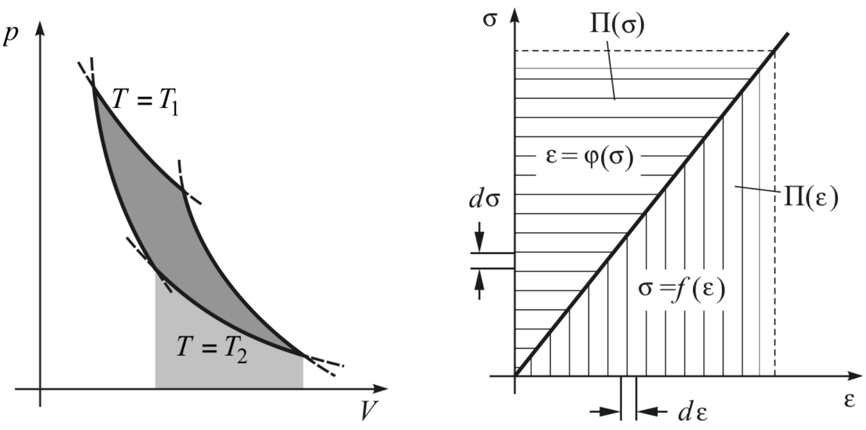
Принцип рівноваги можна виразити також через термодинамічні потенціали - внутрішню енергію U, ентальпію H, енергію Гіббса G, енергію Гельмгольца F - при умовах, що характеризуються постійністю відповідних параметрів стану. Термодинамічній рівновазі відповідає умовний мінімум термодинамічних потенціалів

$$(\delta U)_{S,V} \ge 0; (\delta H)_{P,S} \ge 0; (\delta G)_{V,T} \ge 0; (\delta F)_{V,T} \ge 0,$$

де U - внутрішня енергія, S - ентропія, $H=U+PV$ - ентальпія, $G = H - TS$ - ізобаро-ізотермічний потенціал (вільна енергія Гіббса, вільна ентальпія), $\left.\begin{matrix} F = U - TS \\ A = U - TS \end{matrix}\right\}$ - ізохоро-ізотермічний потенціал (вільна енергія Гельмгольца).

Перехід системи з одного стану термодинамічної рівноваги в інший може відбуватися через послідовність станів, кожен з яких є також станом термодинамічної рівноваги. Це означає, що параметри стану системи протягом всього процесу переходу нескінченно мало відрізняються від своїх значень при термодинамічній рівновазі. Це - рівноважний (квазістатичний) процес. В дійсності ж процеси переходу завжди нерівноважні, вони вивчаються хімічною термодинамікою [Базаров, 2010], [Тюлина, 1979], [Пригожин, Дефей, 1966].

Впровадження енергетичної доктрини в теорію споруд – термін, введений засновником фізичної хімії, Вільгельмом Оствальдом (1853–1932), приблизно в 1900 р. – є не чим іншим, як проекцією реального парового двигуна на науково-технічну модель розкісної ферми, яку на основі енергетичного підходу виконав Джеймс Клерк Максвелл [Maxwell, 1864]. Це стає ясним, коли ми порівнюємо діаграму об'єм-тиск теплового двигуна (рис. 6.1,*а*) з діаграмою сила-переміщення лінійно-пружної наскрізної стержневої конструкції (рис. 6.1,*б*). В обох випадках площа окресленої області визначає енергію відповідного технічного артефакту, вираженої у формі механічної роботи. Б.П. Клапейрон сформулював математичні принципи обох діаграм.



а *б*

Рис. 6.1. а) діаграма об’єм-тиск по Клапейрону і б) діаграма залежності деформацій від напружень одновимірного тіла, що підпорядковується закону Гука

Рівняння, що відповідає розв’язку задачі про деформацію пружних шарнірних ферм на основі принципу віртуальних сил, Дж.К. Максвелл використав, щоб отримати співвідношення $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ [Maxwell, 1864, стор. 297], яке в 1886 р. Г. Мюллер-Бреслау назвав теоремою Максвелла, як данину цьому дивовижному фізику.

Особливе виведення рівняння Максвелла із теореми Клапейрона в кількох словах і без діаграм, зіграло велику роль в суперечці між Християном Отто Мором і Генріхом Францем Бернхардом Мюллером-Бреслау щодо теоретичного обґрунтування класичної теорії споруд, яка точилась впродовж 1880-х років.

Після вирішення проблеми стосовно деформації статично визначуваної розкісної ферми Дж.К. Максвелл звернувся до аналізу статично невизначуваних ферм. Для цього він обрав статично визначувану основну систему з *s*–*n* стержнями та записав вираз для сумарного зусилля $S_j^{(n)}$ в стержні *j* статично невизначуваної системи, що має *n* зайвих стержнів

$$S_j^{(n)} = S_{j,0}^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} S_{j,k}^{(0)} \cdot X_k .$$

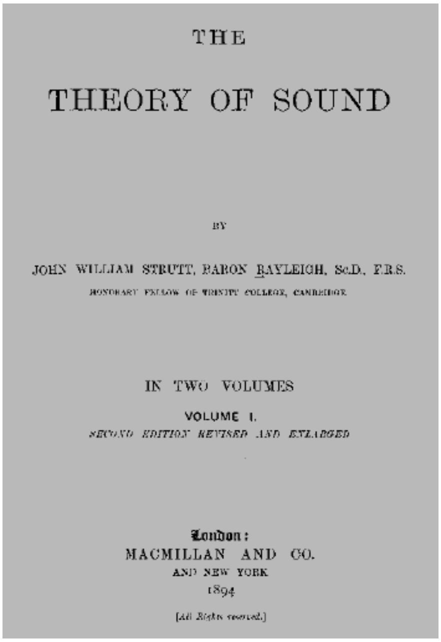
Без сумніву, двотомна робота Джона Вільяма Стретта, третього барона Релея «Теорія звуку» [Rayleig, 1877-78] належить до бібліотеки класики фізики і є першою книгою, що присвячена акустиці. У своєму огляді першого тому цієї книги для журналу Nature (Природа), Г. Гельмгольц пише: «Автор заслужить вічну подяку всіх, хто вивчає фізику і математику, якщо він продовжить свою роботу в тому ж дусі, в якому він почав перший том. Через свою вдалу систематичну організацію всього об’єму найскладніших проблем акустики, автор дав можливість вивчати цей предмет способом набагато простішим, ніж раніше» (цит. за [Rayleig, 1879 (передмова німецького перекладача)]. За пропозицією «канцлера німецької фізики»

Г. Гельмгольца, двотомна робота Дж.В. Релея була негайно перекладена німецькою мовою [Rayleig, 1879, 1880]. Друге, доповнене і розширене видання англійською мовою з’явилося в 1894 р. і 1896 р. [Rayleig, 1894, 1896]; саме це видання без змін було передруковане Dover Publications в 1945 р.

Цікаво, що Джон Вільям Стретт (лорд Релей) був удостоєний звання Лауреата Нобелівської премії з фізики 1904 р. «За дослідження щільностей найбільш розповсюджених газів і за відкриття аргону в ході цих досліджень».

Але яке відношення класик акустики має до класичної теорії споруд? Погляд на перший том «Теорії звуку» дає нам підказку. Після того, як Дж.В. Релей розглядає коливання систем взагалі в перших чотирьох розділах, він аналізує коливання тросів, стержнів, мембран і пластин; у другій частині тому він вивчає коливання оболонок [Rayleig, 1894, стор. 395–432] і електричні коливання [Rayleig, 1894, стор. 433–474]. Його другий том присвячений аеродинамічним проблемам акустики.

Поняття енергії займає центральне місце в акустиці Дж.В. Релея. Наприклад, в третьому розділі, «Коливальні системи взагалі» [Rayleig, 1894, стор. 91–169], він починає з потенціальної енергії П і кінетичної енергії *T* і узагальнює теорему взаємності коливальних пружних систем, сформульовану Е. Бетті в 1872 р., за допомогою поняття узагальнених сил F_k і відповідних узагальнених координат переміщень δ_k і принципу Д’Аламбера: «Якщо сила гармонійного типу із заданими амплітудою і періодом діє на систему в точці *P*, то переміщення, що виникає, в іншій точці *Q*, буде мати ту саму амплітуду і фазу, що і переміщення в точці *P*, якби сила була прикладена в *Q*» (цит. за [Тимошенко, 1957, стор. 383]). У своїй книзі «Лишние неизвестные в строительной механике» [Кирпичев, 1903, 1934], В.Л. Кирпичов перекладає математично сформульовану Дж.В. Релеєм проблему коливань на мову енергетичного принципу, а формалізм Ж.-Л. Лаґранжа щодо узагальнених координат і сил – на рівень аналізу споруд.



THE

THEORY OF SOUND

BY

JOHN WILLIAM STRUTT, BARON RAYLEIGH, Sc.D., F.R.S.
HONORARY FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

IN TWO VOLUMES

VOLUME I.
SECOND EDITION REVISED AND ENLARGED

London:
MACMILLAN AND CO.
AND NEW YORK
1894

[*All Rights reserved.*]

Обкладинка другого випуску першого тому «Теорії звуку» лорда Релея

Дж.В. Релей - засновник принципу [Rayleig, 1894, стор. 109–112], який стверджує, що в замкнутій, в сенсі термодинаміки, системі, в якій закон збереження енергії має форму

$$\Pi = T\,, \tag{6.1}$$

перша власна частота ω_1^2 системи може бути обчислена як

$$\omega_1^2 = \frac{\Pi}{(T/\omega_1^2)}. \tag{6.2}$$

Вираз (6.2) відомий як дроб Релея. Для балок довжиною l на двох опорах з постійною погонною масою μ і постійною жорсткістю при згині EI, з енергією деформації

$$\Pi = \frac{EI}{2} \cdot \int_0^l \left(\frac{d^2 \overline{w}(x)}{dx^2} \right)^2 dx \tag{6.3}$$

і кінетичною енергією

$$T = \omega_1^2 \frac{\mu}{2} \cdot \int_0^l \overline{w}^2(x) dx \tag{6.4}$$

власна частота, отримана із закону збереження енергії (6.1), дорівнює

$$\omega_1^2 = \frac{\frac{EI}{2} \cdot \int_0^l \left(\frac{d^2 \overline{w}(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\frac{\mu}{2} \cdot \int_0^l \overline{w}^2(x) dx}. \tag{6.5}$$

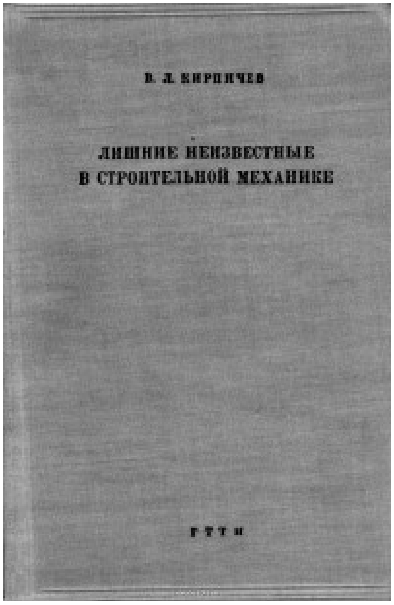
Вираз (6.5) є частинним поданням дробу Релея (6.2), що випливає з порівняння знаменників в (6.5) і (6.2). Якщо ми підставимо статичну криву деформації $w(x)$ замість форми коливань $\overline{w}(x)$ в (6.3) і (6.4), тоді отримаємо корисне наближення

$$\omega_1^2 \approx \frac{EI \cdot \int_0^l \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\mu \cdot \int_0^l w^2(x) dx}. \tag{6.6}$$

Таким чином, Дж.В. Релей досяг успіху у визначенні першої власної частоти коливальних систем за допомогою закону збереження енергії (6.1) без розв’язання відповідного диференціального рівняння. Пізніше, Вальтер Рітц ще далі розвинув метод Релея в рамках варіаційного числення і сформував загальний наближений метод (1909) – метод Релея-Рітца. Метод Рітца, призначений для прямого розв’язання варіаційних задач, забезпечує не тільки математичну фізику, але і прикладну математику і теорію споруд наближеним апаратом, здатним елегантно вирішувати проблеми еластостатики і еластокінетики, такі, наприклад, як обчислення критичного навантаження для стержня змінної жорсткості.

Віктор Львович Кирпичов завершив період формування дисципліни теорії споруд в Росії своєю книгою «Лишние неизвестные в строительной механике»

(1903), яка містить всього лише 140 сторінок. Вона пояснює всю теорію статично невизначуваних шпренгельних ферм в надзвичайно простій манері викладу. Таким чином, він і Мюллер-Бреслау можуть вважатися фігурами, які підвели підсумок в класичній теорії споруд.



В. Л. КИРПИЧЕВ

ЛИШНИЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ
В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

ГТТИ

Обкладинка книги
В.Л. Кирпичова
«Лишние неизвестные в строительной механике»

Як і Дж.В. Релей, В.Л. Кирпичов засновував свою роботу на потенціальній енергії $П$ (енергії деформації) і ввів поняття узагальнених сил F_k і відповідні узагальнені переміщення δ_k. Для системи з n-мірною степеню свободи і для особливого випадку, пов’язаного з незалежністю від часу $П$ (консервативна механічна система), В.Л. Кирпичов формулює рівняння Лаґранжа:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F_k - \frac{\partial П}{\partial \delta_k}\right) d\delta_k = 0. \tag{6.7}$$

В.Л. Кирпичов отримав рівняння Лаґранжа (6.7), призначене для статики з принципу можливих переміщень шляхом порівнянням коефіцієнтів. Оскільки $d\delta_k \neq 0$, вираз в дужках в (6.7) повинен зникнути, тобто справедлива рівність

$$\frac{\partial П}{\partial \delta_k} = F_k. \tag{6.8}$$

Рівняння (6.8) - не що інше як перша теорема Кастільяно. Згідно з В.Л. Кирпичовим, узагальнені сили – це не тільки сили у вузькому розумінні, але і різні їх поєднання, які також включають, наприклад, моменти. Узагальнені переміщення також є не просто переміщеннями у вузькому сенсі, але є складними переміщеннями, які також включають, наприклад, кути повороту. Для В.Л. Кирпичова все це - особливі випадки узагальнених сил і узагальнених переміщень. У першій половині періоду консолідації теорії споруд (1900-1950) це привело до методу переміщень.

Паралельно методу переміщень розвивався метод сил, який слідував шляхом не через енергію деформації $П$, але через доповнювальну енергію деформації $П^*$ ($П = П^*$ у разі лінійно-пружної поведінки матеріалу) і принцип віртуальних сил. В.Л. Кирпичов розвиває цей підхід до розрахунку статично невизначуваних ферм, використовуючи другу теорему Кастільяно і принцип Менабреа в розділах 6 і 7 своєї книги. І в цьому випадку він засновував свої висновки на концепції узагальнених сил і переміщень. Роблячи це, він припускає рівність між енергією деформації $П$ і доповнювальною енергією деформації $П^*$, позначаючи обидві буквою U. Опис з використанням узагальнених сил і переміщень плюс обмеження щодо лінійно-пружної поведінки матеріалу забезпечили роботі Кирпичова граничну ясність і доступність.

Окрім теорем Кастільяно, В.Л. Кирпичов також вивів теорему взаємності. Структура його теорії статично невизначних ферм, що базується виключно на принципі енергії, концепції узагальнених сил і узагальнених переміщень і рівнянні Лаґранжа в значній мірі привертає увагу завдяки своїй універсальності та лаконічній формі, ясність якої залишалася неперевершеною протягом багатьох років. Наприклад, розділ, присвячений лініям впливу, стає особливо ясним завдяки використанню ним теореми взаємності ([Тимошенко, 1957, стор. 384]), яка в своїй найбільш загальній формі була, звичайно, доведена Релеєм. Кирпичов досяг загального і послідовного формулювання теорії статично невизначуваних, лінійно-пружних ферм, яка не притаманна ні енергетичній, ні кінематичній доктрині в теорії споруд, і таким чином залишив відкритими двері як для методу сил, так і для методу переміщень. Загальна база під двоїстою структурою теорії споруд, так чітко представлена в книгах В.Л. Кирпичова, передбачає шлях, по якому послідують постійні інновації в теорії споруд першої половини XX ст.

Бенуа Поль Еміль Клапейрон
(1799–1864)
фр. Benois Paul Emile Clapeyron

Джон Вільям Стретт, барон Релей
(1842–1919)
англ. John Strutt, 3rd Baron Rayleigh

Вальтер Рітц
(1878–1909)
нім. Walter Ritz

Віктор Львович Кирпичов
(1845–1913)
рос. Виктор Львович Кирпичёв

Значний вплив на В.Л. Кирпичова мала «Теорія звуку» Дж.В. Релея, і в своєму вступі він рекомендує цю роботу тим своїм читачам, які цікавляться теорією споруд. Саме тому ми повинні бути вдячні В.Л. Кирпичову за те, що він зробив метод Релея відомим, спочатку в Росії, а потім і в інших країнах. Одним з відомих учнів В.Л. Кирпичова був С.П. Тимошенко. Проте, вплив вдалої адаптації В.Л. Кирпичовим методів з «Теорії звуку» Дж.В. Релея для теорії статично невизначуваних систем в часових рамках поступився впливу Берлінської школи будівельної механіки, яка грала домінуючу роль в процесі формування теорії в першій половині консолідаційного періоду теорії споруд.

У 1892 р. О.М. Ляпунов опублікував роботу «Общая задача об устойчивости движения», у якій дав строгу математичну постановку проблем стійкості механічних систем із скінченим числом ступенів свободи. У 1932 р. М.Г. Четаєв сформулював і довів теореми про нестійкість руху. У 1937 р. М.М. Крилов і М.М. Боголюбов видали монографію «Введение в нелинейную механику». Значний внесок у розвиток динамічної стійкості конструкцій зроблений В.В. Болотіним і його учнями.

Лише у 30-х роках минулого століття набули завершеної форми методи розрахунку статично невизначуваних стержневих систем, виділені методи сил, переміщень і змішаний метод, а також різні їхні модифікації. У процес їхнього формування значний внесок зробили В.Л. Кирпичов, М.С. Стрелецький, О.О. Гвоздьов, П.Л. Пастернак, І.М. Рабінович, М.І. Безухов та ін.

6.2. Принципи Лаґранжа і Кастільяно

Якщо окрім додаткової умови $M = EI\kappa$, прийняті ще інші умови, а саме,

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2},$$

$$w\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}\Big|_{a_2}^{b_2}, \ w'\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0,$$

$$M'\Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1}, \ M\Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}\Big|_{a_1}^{b_1},$$

то отримаємо функціонали Лаґранжа і Кастільяно, які залежать лише від однієї змінної *w* чи *M* [Баженов, 2014]:

$$\Pi^{Л}(w) = \frac{1}{2}\int_a^b EI\Big(\frac{d^2 w}{dx^2}\Big)^2 dx - \int_a^b qwdx -$$
$$-\bar{M}'w\Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M}w'\Big|_{a_1}^{b_1}.$$

$$\Pi^{К}(M) = -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{M^2}{EI}dx + \bar{w}M'\Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}'M$$

Отже маємо пару двоїстих задач варіаційного числення, які відповідають варіаційним принципам Лаґранжа і Кастільяно:

$$\delta\Pi^{Л}(w) = 0$$

при додатковій умові $\delta\Pi^{К}(M) = 0$.

$$\delta\Pi^{К}(M) = 0$$

при додатковій умов $\delta\Pi^{Л}(w) = 0$.

В розгорнутій формі вказані варіаційні задачі мають наступний вигляд:

$$\delta\Pi^{Л}(w) = \int_a^b EIw''\delta w''dx - \int_a^b q\delta wdx -$$
$$-\bar{M}'\delta w\Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M}\delta w'\Big|_{a_1}^{b_1} = 0,$$

додаткові умови: $M = EI\kappa$;

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} \in a,b \ ; \ w, w'\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2}$$

являють собою рівняння сумісності деформації і кінематичні граничні умови.

$$\delta\Pi^{К}(M) = -\int_a^b \frac{M}{EI}\delta Mdx +$$
$$+\bar{w}\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}'\delta M\Big|_{a_2}^{b_2},$$

додаткові умови: $M = EI\kappa$;

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q \qquad \square \qquad a, \qquad b \qquad ;$$

$$M, M'\Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1}$$

являють собою рівняння рівноваги і статичні граничні умови.

Після відповідних перетворень варіаційні задачі Лаґранжа і Кастільяно набирають вигляду:

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(w) = \delta_w \Pi_1 = -\int_a^b \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta w dx$$

$$+(M' - \bar{M}')\delta w \Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \bar{M})\delta w' \Big|_{a_1}^{b_1} = 0$$

і містить у собі рівняння рівноваги (рівняння Ейлера) і природні (статичні) граничні умови.

$$\delta\Pi^{\text{K}}(M) = \delta_M \Pi_2 = -\int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta$$

$$+(\bar{w} - w)\delta M' \Big|_{a_2}^{b_2} - (\bar{w}' - w')\delta M \Big|_{a_2}^{b_2} = 0$$

і містить у собі рівняння сумісності деформацій (рівняння Ейлера) і природні (кінематичні) граничні умови.

Принципи Лаґранжа і Кастільяно сформулюємо наступним чином.

Принцип Лаґранжа

З усіх можливих систем переміщень дійсні переміщення надають функціоналу Лаґранжа стаціонарне (мінімальне) значення. При цьому під можливими розуміються переміщення, які задовольняють рівняння сумісності деформації і рівняння в'язей (кінематичні граничні умови).

Принцип Кастільяно

З усіх можливих систем зусиль дійсні зусилля надають функціоналу Кастільяно стаціонарне (максимальне) значення. При цьому під можливими розуміються зусилля, які задовольняють рівнянням рівноваги і статичним граничним умовам.

З історії питання зауважимо, що термін «принцип Лаґранжа» поширений у російськомовній і вітчизняній літературі. В «Аналітичній механіці» (1788) Ж.-Л. Лаґранж усі форми рівнянь абсолютно твердого тіла під дією сил отримує із загальної формули статики. У своїй теоремі, яку Ж.-Л. Лаґранж назвав «властивості рівноваги, які відносяться до максимуму і мінімуму», він розглянув випадок, коли ліва частина його загальної формули статики являє собою повний диференціал деякої функції Π, яка залежить від координат системи (у випадку твердого тіла). У сучасній термінології ця функція Π є потенціальна енергія системи. Умови рівноваги системи, що описується цією функцією, зводяться до рівновості нулю її повного першого диференціалу. Тобто для таких систем стани рівноваги співпадають із положеннями, у яких функція Π має мінімум або максимум. Ж.-Л. Лаґранж показує, що стан рівноваги, який відповідає мінімуму функції Π – стійкий, а стан рівноваги, який відповідає максимуму функції Π – нестійкий. Випадок $\Pi = \text{const}$ і випадок мінімаксу він не розглядає. Ж.-Л. Лаґранж із варіаційного рівняння – начала можливих швидкостей (переміщень) сформулював відповідний варіаційний принцип для деякої потенціальної функції, яка набагато пізніше була записана і для деформівних тіл і дістала назву повної потенціальної енергії системи. Відомо, що повна потенціальна енергія пружно деформованого тіла дорівнює роботі сил пружності при переході данного стану системи до стану з нульовою деформацією.

Доведення Ж.-Л. Лаґранжа містило деякі вади, які усунув Йоганн Петер Густав Лежен Діріхле (1805-1859), і таким чином був сформульований відомий принцип Лаґранжа-Діріхле.

Нагадаємо, що термін «vis viva» (жива сила), був вперше застосований Г.В. Лейбніцем. Термін «енергія» був введений Томасом Юнгом в 1807 р. (у роботі «A Treatise on Natural Philosophy, Lecture VIII) і термін «робота» - Г.-Г. Коріолісом. В.Р. Гамільтон у листі до Тета (P.G.Tait) у 1862 р. писав: «Енергія і Робота у їх старому англійському значенні – це речі мені знайомі. Але у мене лише самі туманні уявлення про сучасне значення цих термінів» [Graves, 1882-1889, Vol. III, p. 150].

У XIX ст. шотландський інженер і фізик Уільям Джон Макуорн Ренкін (1820-1872) ввів поняття «потенціальна енергія», а німецький інженер Фрідріх Енгессер – поняття «доповнювальної потенціальної енергії» [Тимошенко, 1957].

Поняття механічної роботи виникло у тісному зв’язку з вивченням машин. «Я із задоволенням відмічаю цей важливий приклад плідної дії суто технічної проблеми – у данному випадку питання про корисну дію машин – на теоретичні дослідження», пише Ф. Клейн [Клейн, 1937, стор. 109].

На заході формули для $\Pi^{Л}(u)$ і відповідний варіаційний принцип частіше називають варіаційною теоремою Діріхле і Гріна, оскільки вони пов’язані із поняттям пружного потенціалу, введеним у теорію пружності Джорджем Гріном (1793-1841) [Green, 1739] і принципом пружної рівноваги, доведеним П.Г.Л. Діріхле [Dirichlet, 1846]. Згідно з П.Г.Л. Діріхле, якщо прикладені сили є потенціальними, то пружна рівновага є стійкою тоді і тільки тоді, коли повна потенціальна енергія механічної системи П є мінімальною, наприклад, центр ваги знаходиться у найнижчій точці (принцип Торрічеллі). Це – принцип мінімуму потенціальної енергії. Теорема Діріхле про стійкість для системи *n* твердих тіл була доведена Георгом Хамелем (1877-1954) [Hamel, 1912, стор. 485-487].

Наприклад, у випадку центрального розтягу-стиснення функціонал повної потенціальної енергії системи має наступний вигляд [Баженов, 2014, стор. 229]:

$$\Pi^{Л}(x,u,u')=\frac{1}{2}\int_a^b EIu'^2dx-\int_a^b q_x u dx\to\min,$$

$$\delta\Pi^{Л}(u)=\frac{\partial\Pi^{Л}}{\partial u'}\delta u'+\frac{\partial\Pi^{Л}}{\partial u}\delta u=0.$$

П.Г.Л. Діріхле проаналізував енергетичний крітерій стійкої рівноваги для систем з нескінченним числом степеней вільності

$$\delta^2\Pi_{DG}\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\to\\0\\\to\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{нестійка}\\\text{байдужа}\\\text{стійка}\end{matrix}\right\}\to\text{рівновага}$$

В цьому енергетичному критерії $\delta^2\Pi_{DG}$ - друга варіація повної потенціальної енергії має бути проварійована двічі.

Взагалі, у математичній фізиці принцип Діріхле відносять до теорії потенціалу і формулюють таким чином: якщо, наприклад, функція $u(x)$ є розв’язком рівняння Пуассона:

$$\Delta u + f = 0$$

в області $\Omega \in R^n$ з граничною умовою $u = g$ на границі Ω, то $u(x)$ може бути знайдена, як розв’язок варіаційної задачі на мінімум

$$[v(x)] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - vf \right) dx$$

серед усіх двічі диференційованих функцій v таких, що $v = g$ на границі Ω.

Дане твердження сформулював (але не довів) П.Г.Л. Діріхле. Карл Веєрштрасс показав, що в деяких ситуаціях принцип Діріхле невірний; згодом умови його застосування уточнили Б. Ріман, А. Пуанкаре, Д Гільберт та інші [Бердичевский, 1983], [Михлин, 1950], [Петрова, 1966].

Наведені вище приклади свідчать, що варіаційна теорема Діріхле і Гріна є інтерпретованою формалізованою теорією в сенсі варіаційного числення. Формалізм варіаційного числення був використаний Геттінгенською школою, очолюваною Феліксом Клейном, для обґрунтування теорії пружності. Клейну вдалося запросити до Геттінгену відомих математиків, наприклад, Давида Гільберта в 1895 р., Германа Мінковськи (1864-1909) в 1902 р., Карла Рунге (1856-1927) в 1904 р., Едмунда Ландау (1877-1938) в 1909 р. Д. Гільберт в 1899 р. довів існування розв’язку варіаційної теореми Діріхле [Hilbert, 1901]. Навесні 1909 р. до Геттінгена приїхав С.П. Тимошенко, де впродовж літнього семестру він прослухав лекції Ф. Клейна з теорії пружності, В. Фогта – з гідродинаміки і Л. Прандтля – з аеродинаміки.

Початком широкого енергетичного напрямку у роз’язанні задач теорії пружності слід вважати момент публікації теореми Клапейрона про дійсну роботу пружних сил (1852). Формула Клапейрона не тільки враховує поступове зростання внутрішніх сил у процесі деформації тіла, але і дає для будь-якого пружного тіла залежність роботи від напружень.

Наступний етап у теорії пружного тіла полягав у відкритті принципу взаємності робіт (О.Л. Коші, 1857; Дж.К. Максвелл, 1864; Е. Бетті, 1872).

Термін «принцип Кастільяно» у західній літературі теж частіше має назву «варіаційної теореми Менабреа і Кастільяно».

Не торкаючись історичних пріоритетів, зазначені терміни для одно-, дво- і тривимірних задач можуть бути названі принципами мінімуму потенціальної енергії і мінімуму (з урахуванням знаку) доповнювальної потенціальної енергії, що підкреслює їх двоїстість [Васидзу, 1987]. Якщо у відповідних формулюваннях присутнє визначення можливих переміщень і зусиль (або напружень), то мінімум може бути визначений як абсолютний.

Таке формулювання принципу Кастільяно тут і надалі пов’язане із збереженням математичної методології Лежандра, Юнга-Фенхеля-Лаґранжа, за якою варіаційна задача Кастільяно розглядається як двоїста до прямої варіаційної задачі Лаґранжа і навпаки. Як уже зазначалось, екстремальні значення функціоналів Лаґранжа і Кастільяно співпадають, коли перший досягає мінімуму, а другий - максимуму. Якщо друга двоїста функція (функціонал) обрана у вигляді $\Pi^{\text{К}}(M)=\int\limits_a^b \frac{M^2}{2EI}dx$, то вона відповідно досягає мінімуму, і це є відомим у механіці принципом найменшої роботи.

За Р. Курантом, Д. Гільбертом [Курант, Гильберт, 1951b] «значення принципу Кастільяно полягає у теоретичному відношенні у тому, що він є дуже важливим прикладом, який підтверджує загальний закон двоїстості варіаційних задач».

Першим звернув увагу на те, що $\Pi^{\text{Л}}(u)$ і $\Pi^{\text{К}}(\sigma)$ у формулах Лаґранжа і Кастільяно в певних постановках є функціоналами, Луїджі Донаті. У своїх роботах р. [Donati, 1888, 1889, 1894] він чітко роз'яснив зв'язок між цими функціоналами і поняттями пружного потенціалу в термінах теорії пружності і варіаційного числення.

Вимога тотожної рівності нулю лівої частини з урахуванням принципу незалежності варіацій дає у вигляді природних умов рівняння рівноваги як рівняння Ейлера $\frac{d^2M}{dx^2}+q=0$, а також природні статичні граничні умови, яких не вистачало у заданих додаткових умовах.

Вимога тотожної рівності нулю лівої частини з урахуванням принципу незалежності варіацій, дає у вигляді природних умов рівняння сумісності деформацій як рівняння Ейлера $\kappa=-\frac{d^2w}{dx^2}$, а також природні (кінематичні) граничні умови, яких не вистачало у заданих додаткових умовах

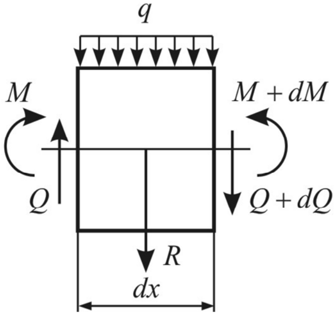
Варіаційне рівняння Лаґранжа

$$-M'_b\delta w_b - M'_a\delta w_a - M_b\delta w_b + M_a\delta w_a +$$
$$+\int\limits_a^b\left(-\frac{d^2M}{dx^2}-q\right)\delta w dx = 0,$$

ураховуючи, що під інтегралом стоїть рівнодіюча R,

$$Rdx+qdx+dQ=0 \quad\Rightarrow\quad R=-\frac{dQ}{dx}-q=-\frac{d^2M}{dx^2}-q$$

являє собою принцип можливих переміщень, а саме: якщо сума робіт усіх сил, які діють на систему, при будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю, то система перебуває у рівновазі. При цьому під можливими розуміються переміщення, які описуються гладкими неперервними функціями і задовольняють умовам в'язей[1].



---

[1] У деяких книгах з будівельної механіки при формулюванні начала можливих переміщень включається додаткова вимога нескінченної малості тих переміщень, на яких підраховується можлива робота. Це істотно тільки для геометрично нелінійної постановки задачі.

Варіаційне рівняння Кастільяно

$$w_b\delta M'_a - w_a\delta M'_a - w'_b\delta M_b + w'_a\delta M_a + \int_a^b \left(\kappa + \frac{d^2w}{dx^2}\right)\delta M dx = 0$$

являє собою принцип можливих зусиль: якщо сума робіт, які здійснюються при будь-яких можливих змінах зусиль дорівнює нулю, то система задовольняє рівняння сумісності деформацій. При цьому під можливими розуміються статично можливі системи зусиль.

У випадку неоднорідних граничних умов

$$w, w'\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2} \quad \text{і} \quad M, M'\Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'\Big|_{a_2}^{b_2}$$

отримаємо відповідно:

Варіаційне рівняння Лаґранжа	*Варіаційне рівняння Кастільяно*
$(M' - \overline{M})\delta w\Big|_{a_1}^{b_1} - (M - \overline{M})\delta w'\Big|_{a_1}^{b_1} +$ $+\int_{a_1}^{b_1}\left(-\frac{d^2M}{dx^2} - q\right)\delta w dx = 0.$	$(w - \bar{w})\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}')\delta M\Big|_{a_2}^{b_2} +$ $+\int_{a_1}^{b_1}\left(\kappa + \frac{d^2w}{dx^2}\right)\delta M dx = 0.$

Таким чином:

у принципі Лаґранжа маємо додаткові умови (обмеження) $M = EI\kappa;\ \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$ $w, w'\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2}$ і отримані природні умови $\frac{d^2M}{dx^2} = -q;\ M, M'\Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1}.$	у принципі Кастільяно маємо додаткові умови (обмеження) $M = EI\kappa;\ \frac{d^2M}{dx^2} = -q;$ $M, M'\Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1}$ і отримані природні умови $\kappa = -\frac{d^2w}{dx^2};\ w, w'\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2}.$

Тобто додаткові умови однієї варіаційної задачі є природними для іншої і навпаки. Такі задачі утворюють пару варіаційних двоїстих задач. Вони розв'язуються, або шляхом розв'язання кожної варіаційної задачі окремо, або шляхом

У ряді літературних джерел у формулюваннях замість слова «робота» використовується термін «можлива робота». При цьому по сенсу викладу під вказаним терміном мається на увазі абстракція, що відрізняється від дійсної роботи тим, що сили, що проводять роботу, можуть відноситися до одного стану системи, а відповідні ним переміщення – до іншого. Разом з тим дається визначення цього поняття в розділі, присвяченому принципу можливих переміщень, як роботи сил на можливому переміщенні, хоча в самому формулюванні вказаного тут принципу термін «можлива робота» не використовується і замість нього застосовано просто слово «робота». Аналогічно останньому дається визначення можливої роботи і в класичному курсі П. Аппеля [Аппель, 1960]. Як правило, у формулюванні принципу можливих переміщень не використовується термін можлива робота і в інших джерелах [Ланцош, 1965], [Лурье, 1970], [Новожилов,1958] тощо.

спільного розв’язування рівнянь природних (додаткових) умов обох задач. Наведені залежності пояснюються формальною спряженістю операторів диференціальних рівнянь рівноваги $\frac{d^2M}{dx^2}=-q$ і сумісності деформацій $\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M}{EI}$, що відображається у формулі Гріна

$$\int_a^b \frac{d^2M}{dx^2} w dx = M'w\Big|_a^b - Mw'\Big|_a^b + \int_a^b M \frac{d^2w}{dx^2} dx,$$

а за фізичним змістом є наслідком теореми Клапейрона і закону збереження енергії.

За допомогою методу множників Лаґранжа можна «поміняти місцями» додаткові і природні умови, тобто із функціонала Лаґранжа отримати функціонал Кастільяно і навпаки. Таке перетворення у варіаційному численні має назву перетворення Фрідріхса. Теорія перетворень функціоналів викладена в [Курант, Гильберт, 1951b]. Зазначимо, що екстремальні значення функціоналів Лаґранжа і Кастільяно, а також усіх функціоналів, які отримані за допомогою множників Лаґранжа співпадають.

Функціонал Лаґранжа $\Pi = U + A$ називається повною потенціальною енергією системи, що дорівнює сумі потенціальної енергії пружної деформації і роботи зовнішніх сил. При цьому потенціальна енергія пружної деформації U обчислюється як робота внутрішніх сил і вважається додатною, а робота зовнішніх сил A обчислюється як добуток сили на переміщення і вважається від’ємною. Інколи повна потенціальна енергія системи ототожнюється з роботою зовнішніх і внутрішніх сил при переході системи від деформівного стану до первісного. Зазначимо що функціонал (або функція) П може бути отримана як двоїста за Юнгом до доповнювальної потенціальної енергії, тобто роботи внутрішніх сил.

Теорія Р. Куранта і Д. Гільберта [Курант, Гильберт, 1951a] будується на основі наступних положень. Будь-яку із умов стаціонарності функціонала можна включити до додаткових умов, така варіаційна задача буде еквівалентна вихідній. Друге положення полягає у використанні методу множників Лаґранжа для урахування додаткових умов і отримання еквівалентних варіаційних задач. У багатьох задачах, наприклад, для опуклих функцій, використання наведених положень, дозволяє відслідкувати також зміну екстремальних властивостей функціоналів. У ряді задач без обмежень можна штучно ввести додаткові умови, щоб потім внести їх до функціонала за допомогою множників Лаґранжа і проводити подальші перетворення. Це дозволяє отримати різні формулювання однієї і тієї ж варіаційної задачі із різними змінними і, зокрема, здійснити важливе перетворення Фрідріхса.

Теорія перетворення варіаційних проблем Р. Куранта і Д. Гільберта дозволяє поставити у відповідність один одному різні функціонали з додатковими умовами і побудувати повний функціонал без будь-яких додаткових умов, із якого як частинні випадки можуть бути отримані усі можливі функціонали з додатковими умовами і сформульовані відповідні частинні варіаційні принципи.

Повними функціоналами називаються функціонали, для яких варіаційна задача формулюється без додаткових умов і охоплює усі компоненти простору станів. При цьому під основним простором станів розуміють сукупність полів переміщень, деформацій, напружень (зусиль).

Повний функціонал є найбільш загальною енергетичною характеристикою даної системи, оскільки, з одного боку, з повного функціонала можуть бути отримані усі можливі частинні функціонали у даному просторі, з іншого – його досить для визначення усіх компонентів полів переміщень, деформацій, напружень (зусиль), тобто для повного розв'язання задачі у даному просторі станів.

Функціонали, для яких варіаційна задача формулюється з додатковими умовами, що визначають підпростір у обраному просторі станів, мають назву частинних функціоналів.

Частинні функціонали отримуються із повних шляхом введення додаткових умов на деякі компоненти даного простору станів.

Таким чином, у обраному просторі станів поняття повного і частинного функціоналів визначені і мають абсолютний характер. Разом з тим при переході від одного простору до іншого ці поняття стають відносними. Тобто повний функціонал, визначений у деякому просторі, можна розглядати як частинний у розширеному просторі. Він є частинним по відношенню до повного функціонала у розширеному просторі.

Загальний варіаційний принцип формулюється так: дійсні поля параметрів напружено-деформованого стану системи надають повному функціоналу стаціонарне значення.

Загальна варіаційна теорема. Рівняння Ейлера і природні граничні умови (природні умови функціонала) містять у собі повну систему рівнянь і граничних умов даної теорії, які виражені через компоненти відповідного простору станів.

Як правило, можна дати більш детальне формулювання загального варіаційного принципу: дійсному напружено-деформованому стану системи відповідає не просто стаціонарне значення, а мінімакс (або максімін, або сідлова точка) повного функціонала. Виключеннями є функціонали, які не мають екстремумів, ні мінімаксів, ні максімінів.

Частинний варіаційний принцип формулюється так: дійсні поля параметрів напружено-деформованого стану системи, які задовольняють дані обмеження у вигляді додаткових умов, надають частинному функціоналу стаціонарне значення при даних додаткових умовах, тобто у підпросторі даного простору станів.

Як правило, частинний функціонал має не просто стаціонарне значення, а умовний екстремум, або мінімакс, або максімін, або сідлову точку.

Частинна варіаційна теорема. Рівняння Ейлера і природні граничні умови задачі на умовне стаціонарне значення частинного функціонала (природні умови функціонала) разом з додатковими умовами складають повну систему рівнянь і граничних умов даної теорії.

6.3. Теорема Клапейрона. Теореми, які зв'язують об'ємні і поверхневі інтеграли. Інтегральна формула. Формула Папковича

Теорему Клапейрона можна записати у вигляді [Баженов, 2014]:

$$2U = \iiint_V \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \right] dxdydz.$$

Таким чином отримаємо

$$\iiint_V \left(Xu + Yv + Zw \right) dxdydz + \iint_S \left(P_{xv} u + P_{yv} v + P_{zv} w \right) dS = 2U,$$

або у матричному вигляді

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} \, dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}^T{}_S \mathbf{u} \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S \, dS \; .$$

Тобто для дійсного стану лінійно пружної системи, у якому задовольняються рівняння рівноваги, сумісності деформацій, фізичної сторони задачі та граничні умови, подвійна потенціальна енергія пружної деформації дорівнює роботі зовнішніх сил. Це положення становить теорему Клапейрона.

Ураховуючи, що $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$, а $\mathbf{g}^T = -(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})^T$ вираз для теореми Клапейрона

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} \, dV = -\iiint_V \left(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \right)^T \mathbf{u} \, dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S \, dS$$

являє собою теорему про дивергенцію і у наведеному вигляді дозволяє переносити операцію диференціювання з вектора $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$ на вектор

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

і навпаки, що часто використовується для отримання різних варіаційних постановок задач теорії пружності [Розин, 1998].

Рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил в матричному вигляді виражається наступним чином

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u} dV + \iint_{S_1} \mathbf{u} \mathbf{P}_S dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S \mathbf{P} dS \, , \qquad (6.9)$$

що по суті являє собою теорему про дивергенцію.

Взагалі, в будівельній механіці та теорії пружності досить часто використовуються теореми, які зв'язують об'ємні і поверхневі інтеграли. Основні з них наведені нижче.

- *Теорема про дивергенцію*

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

- *Теорема про ротор*

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

- *Теорема про градієнт*

$$\int\limits_V \nabla\Phi(\mathbf{r})dV = \int\limits_S d\mathbf{S}\Phi(\mathbf{r}).$$

- *Теореми Гріна*

$$\int\limits_F \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi dV + \int\limits_F \Psi\nabla^2\Phi dV = \int\limits_S d\mathbf{S}\cdot(\Psi\nabla\Phi) = \int\limits_S \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}dS,$$

$$\int\limits_F (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)dV = \int\limits_S d\mathbf{S}\cdot(\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi) = \int\limits_S \left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)dS.$$

- *Частинні випадки*

$$\int\limits_V \nabla^2\Phi dV = \int\limits_S d\mathbf{S}\cdot\nabla\Phi = \int\limits_S \frac{\partial\Phi}{\partial n}dS \quad \text{(теорема Ґаусса)},$$

$$\int\limits_V |\nabla\Phi|^2\cdot dV + \int\limits_V \Phi\nabla^2\Phi dV = \int\limits_S d\mathbf{S}\cdot(\Phi\nabla\Phi) = \int\limits_S \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}dS.$$

Для отримання виразу (6.9) можна використати наступне загальне інтегральне співвідношення, яке по суті являє собою теорему Клапейрона:

$$\iiint\limits_V \mathbf{a}^T(\mathbf{A}\mathbf{b})dV = \iint\limits_S \mathbf{a}^T(\mathbf{A}_S\mathbf{b})dS - \iiint\limits_V (\mathbf{A}^T\mathbf{a})\mathbf{b}dV, \tag{6.10}$$

де $\mathbf{a}(x,y,z) = \{a_1, a_2, a_3\}^T$ – довільний вектор з трьома компонентами, які є функціями координат; $\mathbf{b}(x,y,z) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}^T$ – довільний вектор з шістьма компонентами, які також є функціями координат.

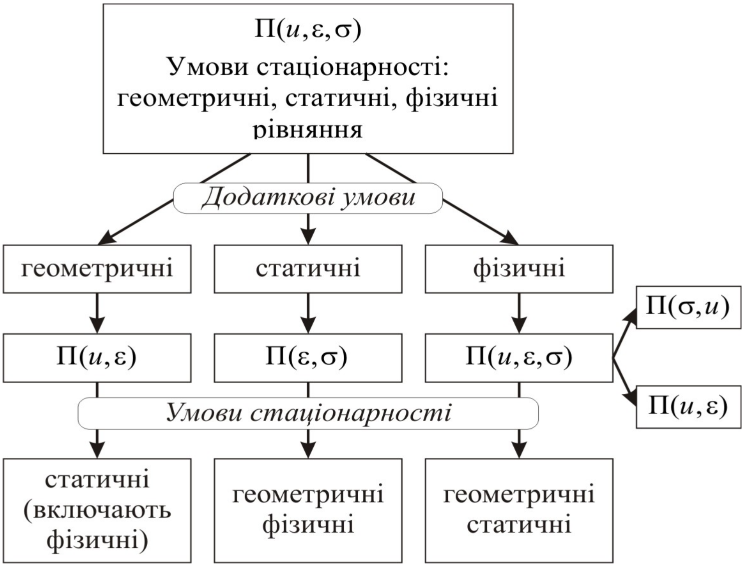
При виводі багатьох загальних положень будівельної механіки та теорії пружності корисною виявляється формула, яку, виходячи з виразу для роботи зовнішніх сил, отримав П.Ф. Папкович і яка носить його ім’я:

$$A_{\text{ЗС}} = \iiint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T\mathbf{u}dV + \iiint\limits_V (\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon})^T\boldsymbol{\sigma}dV + \iint\limits_S (\mathbf{P}_S - \mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}_S dS + \iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}dV. \tag{6.11}$$

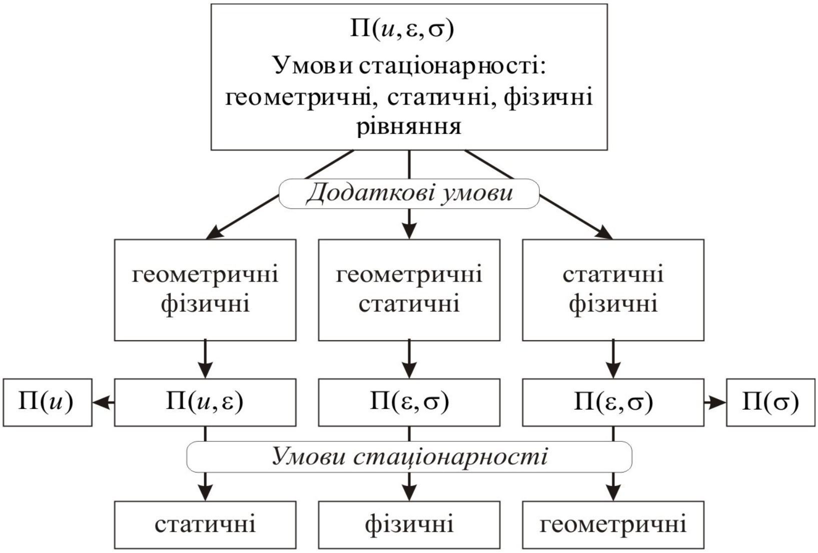
Зауважимо, що в формулі (6.11) використовуються елементи чотирьох довільних станів, причому робота зовнішніх сил, яка відповідає першому довільно обраному напруженому стану і здійснює роботу на переміщеннях другого довільного напруженого стану, поєднується, деякою мірою штучно, з компонентами напружень третього та компонентами деформацій четвертого довільного напруженого стану.

П.Ф. Папковичем зазначено, що отримана залежність, яка представляється на перший погляд досить штучною, насправді дуже зручна як для доведення ряду загальних теорем теорії пружності, так і для оцінки цих теорем у ряді решти основних залежностей теорії пружності. Все ті загальні теореми теорії пружності, які ми мали на увазі тут розглянути, можна вивести безпосередньо з рівності (6.11). Для цього потрібно лише привести чотири напружені стани, що є у формулі (6.11) довільними напруженими станами, кожного разу в певне співвідношення один з одним.

Схеми отримання частинних функціоналів із повного[2]:



Використання геометричних, або статичних, або фізичних рівнянь
як додаткових умов для отримання частинних функціоналів із повного



Використання двох груп із геометричних, статичних і фізичних рівнянь
як додаткових умов для отримання частинних функціоналів із повного

---

[2] Тут спадає на думку вираз Л.С. Полака «... в науці є своя естетика і краса логічної стрункості варіаційних принципів механіки, що не може не захоплювати математиків, фізиків, механіків». (із передмови до книги: *К. Ланцош* «Варіаційні принципи механіки»).

Тоді як у функціоналі варіаційної теореми Лаґранжа (Діріхле і Гріна) проводиться варіювання переміщень, у варіаційній теоремі Кастільяно (Менабреа і Кастільяно) до числа тих, що варіюються, входять внутрішні зусилля, або напруження. Іншими словами, варіаційна теорема Менабреа і Кастільяно є функціоналом внутрішніх зусиль або напружень. Відомо, що обґрунтування класичної теорії споруд супроводжувала суперечка, яка стосувалась, головним чином, загальної практичної придатності різних форм варіаційної теореми Менабреа і Кастільяно, наприклад, рівняння взаємності Максвелла-Бетті, принципу можливих змін напруженого стану або другої теореми Кастільяно. Серед інших в цій дискусії брали участь Е. Хеллінгер і Георг Пранге (1885–1941).

У своєму огляді «Die allgemeinen Ansdtze der Mechanik der Kontinua» («Загальні підходи до механіки суцільного середовища»), який вийшов 1914 р. в Енциклопедії математичних наук, редагованій Клейном і К.Х. Мюллером, Е. Хеллінгер, показав для випадку тривимірних континуумів, як принцип мінімуму потенціальної енергії може спочатку бути перетворений до своєї канонічної форми за допомогою канонічного перетворення аналітичної механіки, причому переміщення і напруження стають невідомими змінними стану. Після цього Е. Хеллінгер отримує варіаційну теорему Менабреа і Кастільяно, користуючись умовами рівноваги як додатковими.


Давид Гільберт
(1862-1943)
нім. David Hilbert


Степан Прокопович Тимошенко
(1878–1972)


Петро Федорович Папкович *(1887-1946)*
рос. Пётр Фёдорович Папкович


Ернст Девід Хеллінгер
(1883–1950)
нім. Ernst David Hellinger

Наступний крок зробив Г. Пранге у своїй дисертації, завершеній в 1915 р. в Геттінгені, і в своїй кваліфікаційній роботі «Екстремум роботи деформації», виконаній в Ганновері наступного року, але, на жаль, виданій повністю тільки в 1999 р [Kurrer, 2008]. У своїй дисертації Г. Пранге дає математичне обґрунтування теорії пружності за допомогою варіаційного числення, використовуючи канонічне перетворення Гамільтона-Якобі відоме з аналітичної механіки. Як змінні переміщення u, так і змінні сили чи напруження σ є невідомими варійованими змінними стану (рис. 6.2) у новій канонічній варіаційній проблемі, що з’явилася після канонічного перетворення.

Працюючи незалежно від Е. Хеллінгера і Г. Пранге, Е. Рейсснер опублікував в 1950 р. свою відому роботу на шести сторінках «Про варіаційну теорему пружності» [Reissner, 1950]. У цій статті він розробляє, хоча і не торкаючись теорії Гамільтона-Якобі, варіаційну теорему, яка подібна до теореми Хеллінгера і Пранге.

М.Е. Гуртін назвав цю варіаційну теорему ім'ям Хеллінгера, Пранге і Рейсснера і позначив її символом $\Pi_{H,P,R}$. У просторовому випадку $\Pi_{H,P,R}$ – це функціонал трьох компонент вектора переміщень *u* і шести компонент тензора напружень σ.

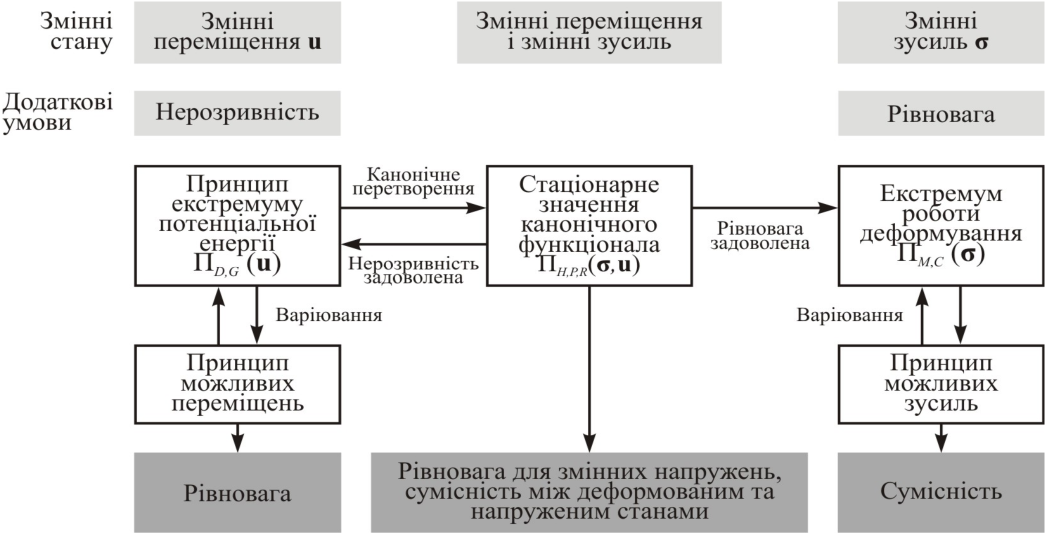


Рис. 6.2

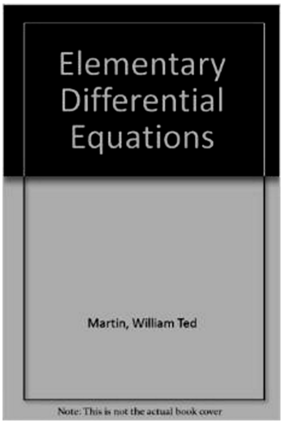
Згадуючи ті часи, Е. Рейсснер писав: «*Використовуючи варіаційну теорему для напружень і варіаційну теорему для переміщень, я весь час запитував себе, чи дійсно ми змушені обирати або те, або інше. Першим наслідком цих роздумів було узагальнення варіаційної теореми для напружень, спрямоване на те, щоб зробити цю теорему застосовною до лінійних проблем простого гармонійного руху. Можливість такого узагальнення залежала від одночасного введення варіацій напружень і переміщень, які повинні були бути незалежними, щоб зберегти умови динамічних обмежень. З прийняттям концепції незалежності варіацій напружень і варіацій переміщень, природно виникала думка про можливість формулювання варіаційної теореми з незалежними варіаціями напружень і переміщень*». В 1953 р. Е. Рейсснер узагальнив свою варіаційну теорему на пружні континууми з великими переміщеннями.

Механіка деформівного твердого тіла описує поведінку пружних континуумів за допомогою

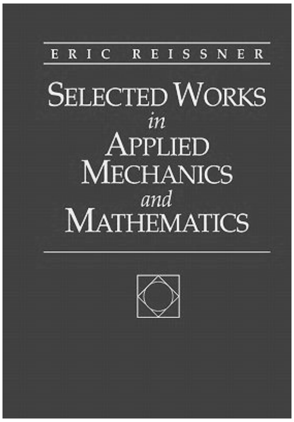
- тензора напружень **σ**,
- вектора переміщень **u**,
- тензора деформацій **ε**.

З цих трьох змінних стану тензор напружень σ і вектор переміщень u фігурують в таких варіаційних теоремах:

- Менабреа і Кастільяно $\Pi_{M,C}$ (**σ**),
- Лаґранжа, Діріхле і Гріна $\Pi_{D,G}$ (**u**),
- Хеллінгера, Пранге і Рейсснера $\Pi_{H,P,R}$(**σ**,**u**).



Вступний курс диференціальних рівнянь.
Вільям Тед Мартін, Ерік Рейсснер (1986)



Вибрані праці в прикладній механіці
і математиці Е. Рейсснера (1995)

Таким був рівень знань щодо варіаційних теорем в 1950 р. У трьох вчених досить швидко виникло питання, чи можна сформулювати загальну варіаційну теорему, в функціоналі якої стан деформацій фігурував би нарівні зі станами переміщень і напружень. Відповідь була знайдена Б.М. Фрайшем Де Вебеке (Бельгія), Ху Хайчангом (Китай) і Кюсіро Васідзу (Японія), які працювали незалежно один від одного.

Ху Хайчанг
(1928–2011)
кит. 胡海昌*,*
Hú Hǎichāng

Бодуен Фрайш де Вебеке *(1917–1976)*
фр. Baudouin M. Fraeijs de Veubeke

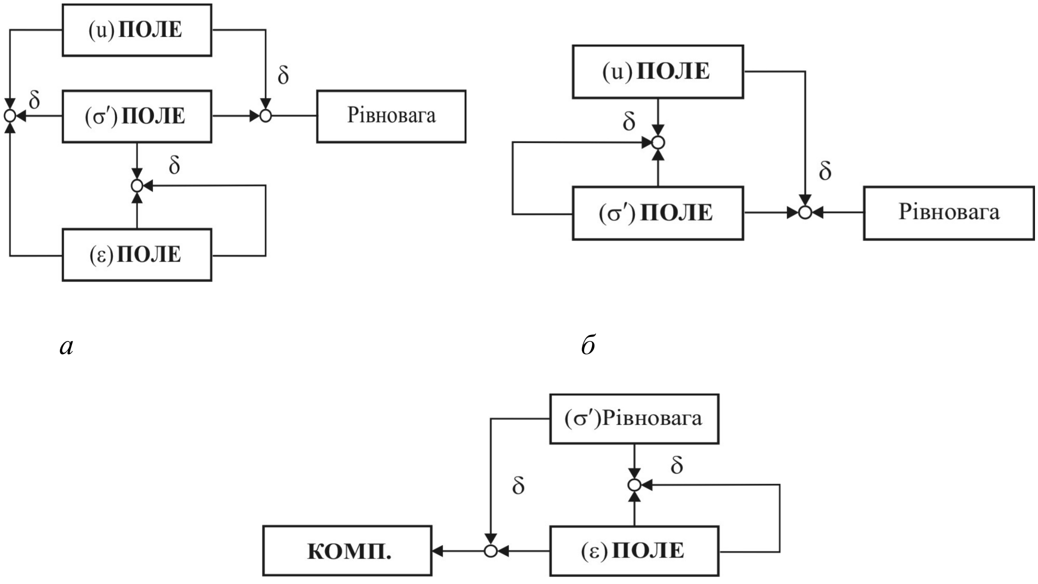
Кюсіро Васідзу
(1921–1981)
яп. 鷲津久一郎*,*
англ. Kyuichiro Washizu

Ерік Рейсснер
(1913–1996)
англ. Max Erich Reissner

Е. Рейсснер згадує, як К. Васідзу відвідав його під час свого періоду досліджень в Массачусетському технологічному інституті між 1953 і 1955 роками і пояснив свою варіаційну теорему: «*... мій друг Васідзу ... прибув одного разу в мій офіс, щоб сказати, що у нього є варіаційна теорема з незалежними варіаціями не тільки напружень і переміщень, а також і деформацій, з яких у якості рівнянь Ейлера отримуються не тільки умови рівноваги і співвідношення напруження-деформації, але також і співвідношення переміщення-напруження. Я спочатку* *заперечив, що оскільки тільки напруження і переміщення зустрічаються в граничних умовах задачі, то природно розглядати співвідношення деформації-напруження як попередні, і ніяк інакше. Я був, проте, незабаром переконаний, що теорема «трьох полів», яку запропонували Васідзу і незалежно від нього Ху, була значним кроком вперед, який я сам, на жаль, не зробив»*. Тому цю загальну варіаційну теорему називають в літературі на честь Ху і Васідзу; вона буде позначатися тут перш за все $\Pi_{H,\,W}(\sigma,u,\varepsilon)$.

Б.М. Фрайш Де Вебеке ще в 1951 р. розробив варіаційну теорему з чотирма варійованими полями або змінними станами. Він назвав цю теорему «*загальним варіаційним принципом*». У його теоремі не тільки напруження, переміщення і деформації варіюються незалежно одне від іншого, але також і поверхневі навантаження **t** (t_i в індексній нотації). На честь Б.М. Фрайша Де Вебеке, К. Васідзу і Х. Ху цей функціонал тут позначається як $\Pi_{F,\,H,\,W}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{t})$; $t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$ (n_j = вектор нормалі до поверхні, σ_{ij} = тензор напружень).

На рис. 6.3,*а* показаний процес варіювання за загальною варіаційною теоремою Б.М. Фрайша де Вебеке, на рис. 6.3,*б* - процес варіювання по варіаційній теоремі Хеллінгера, Пранге і Рейсснера, а на рис. 6.3,*в* ще одна варіаційна теорема, представлена Б.М. Фрайшем де Вебеке, в якій варіюються напруження **σ** і деформації **ε**.



а *б*

в

Рис. 6.3

Конспект лекції Клауса Кнотхе по методу скінченних елементів в проектних розрахунках, яку він читав у Аерокосмічному відділі Берлінського технічного університету, містить систематичне і дуже привабливе викладення семи варіаційних теорем. Цей конспект також містить діаграму, в якій блискуче ілюстровано співвідношення між сімома варіаційними теоремами - за винятком $\Pi_{F,H,W}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{t})$ (рис. 6.4).

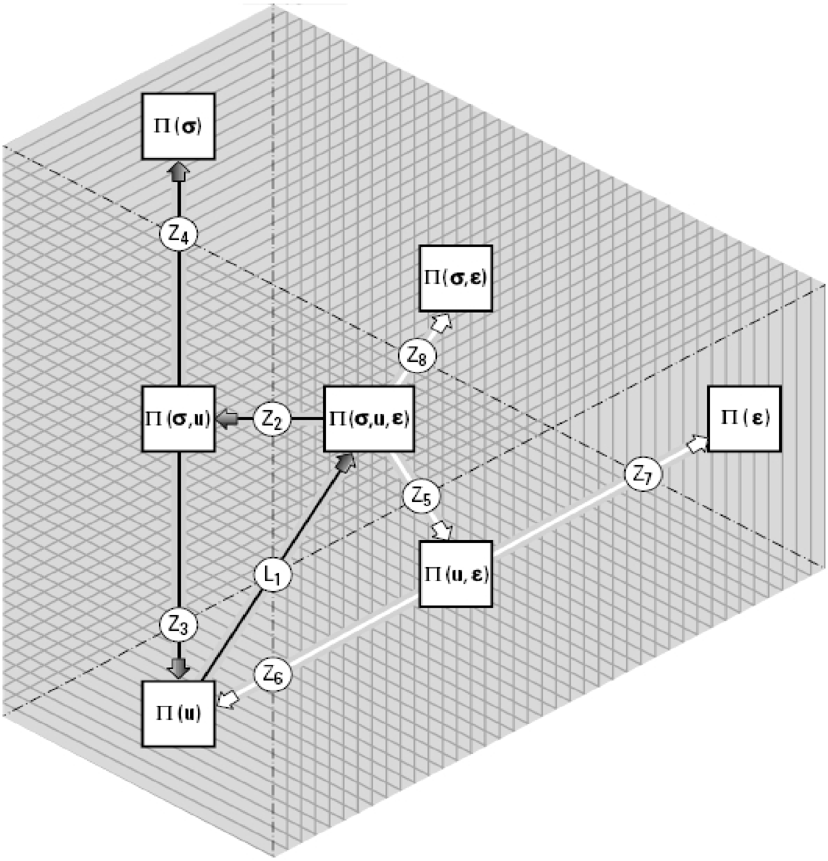
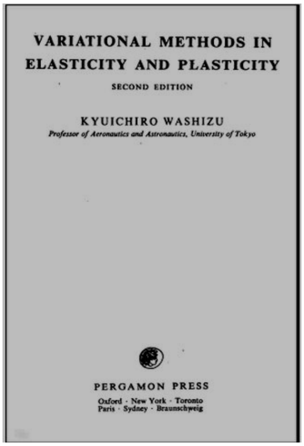


Рис. 6.4

На цій діаграмі

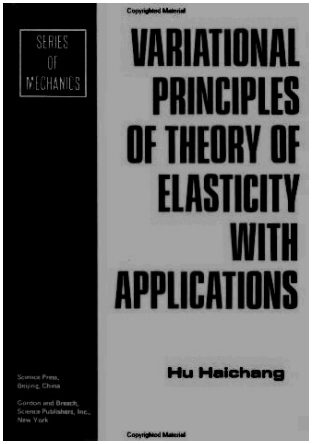
- вертикальне штрихування відповідає варіації змінної поля або стану ε (деформації): $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$;
- діагональне штрихування зверху зліва вниз направо представляє змінну поля або стану u (переміщення), тобто варіаційну теорему Лаґранжа, Діріхле і Гріна: $\Pi_{D,G}(\mathbf{u}) \equiv \Pi(\mathbf{u})$;

- діагональне штрихування знизу зліва вгору направо представляє змінну поля або стану σ (напруження), тобто варіаційну теорему Менабреа і Кастільяно: $\Pi_{M,C}(\boldsymbol{\sigma})\equiv\Pi(\boldsymbol{\sigma})$;
- гібридні варіаційні теореми лежать в областях перетину штрихувань: варіаційна теорема Хеллінгера, Пранге і Рейсснера $\Pi_{H,P,R}(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u})\equiv\Pi(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u})$ – там, де перетинаються діагональні штрихування, теорема Фрайша де Вебеке, Васідзу та Ху $\Pi_{F,H,W}(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u},\ \boldsymbol{\varepsilon})\equiv\Pi(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u},\ \boldsymbol{\varepsilon})$ – там, де перетинаються всі типи штрихування, додаткова варіаційна теорема Фрайша де Вебеке $\Pi_{F}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon})\equiv\Pi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon})$ – там, де перетинаються лінії, що йдуть знизу зліва вгору.



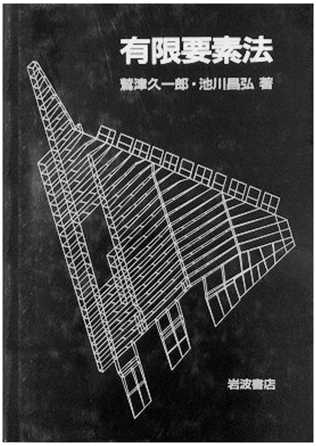
VARIATIONAL METHODS IN
ELASTICITY AND PLASTICITY
SECOND EDITION
KYUICHIRO WASHIZU
Professor of Aeronautics and Astronautics, University of Tokyo
PERGAMON PRESS
Oxford · New York · Toronto
Paris · Sydney · Braunschweig

Варіаційні методи в пружності і пластичності. К.Васідзу, 1975



Copyrighted Material
SERIES OF MECHANICS
VARIATIONAL PRINCIPLES OF THEORY OF ELASTICITY WITH APPLICATIONS
Hu Haichang
Science Press, Beijing, China
Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York
Copyrighted Material

Варіаційні принципи теорії пружності. Ху Хайчанг, 1984



有限要素法
鷲津久一郎・池川昌弘 著
岩波書店

Метод скінченних елементів. К.Васідзу, 1987

6.4. Висновки

Із повного функціонала як вільної варіаційної задачі можна отримати різні частинні функціонали, як невільні варіаційні задачі з додатковими умовами. За додаткові умови приймають будь-які вирази із рівнянь Ейлера і природних граничних умов, які реалізують стаціонарне значення повного функціонала (вільна варіаційна задача). Виконуючи додаткові умови попередньо, тобто до варіювання, і виключаючи з їхньою допомогою частину функціональних аргументів із першого функціонала, отримуємо відповідний частинний функціонал.

Частинні варіаційні принципи стверджують, що з цих можливих полів напруженого і деформованого стану пружного тіла, які задовольняють додаткові умови, дійсно мають місце лише ті, які надають відповідному частинному фунціоналу стаціонарного значення.

Для варіаційного рівняння з деякими додатковими умовами, рівняннями Ейлера є ті рівняння і природні граничні умови, які разом із додатковими умовами складають повну схему рівнянь і граничних умов, тобто рівнянь Ейлера і граничних умов для повного варіаційного рівняння.

Як приклад можна навести частинні варіаційні принципи Лаґранжа, Кастільяно, Рейсснера, граничних умов та інші.

Принцип Лаґранжа отримується, якщо за додаткові умови приймаються фізичні і геометричні рівняння, а також геометричні граничні умови. Тобто можливими функціями переміщень є лише ті, які задовольняють ці додаткові умови. А із цих можливих переміщень дійсними будуть ті, які надають функціоналу Лаґранжа стаціонарного значення. При цьому рівняннями Ейлера є статичні рівняння, також знаходяться і природні (статичні) граничні умови.

Принцип Кастільяно отримується, якщо за додаткові умови прийняті фізичні і статичні рівняння, а також статичні граничні умови. Тобто можливими функціями є лише ті, які задовольняють ці додаткові умови. А із можливих функцій напружень (зусиль) дійсними будуть ті, які надають функціоналу. Кастільяно стаціонарного значення, при цьому рівняннями Ейлера є геометричні рівняння і природні (геометричні) граничні умови. Принцип Рейсснера отримується, якщо за додаткові умови прийняти фізичні рівняння. Якщо за додаткові умови прийняті усі статичні, геометричні і фізичні рівняння, то отримаємо функціонал граничних умов. Із цього функціонала як умови стаціонарності витікають усі граничні умови.

Якщо, наприклад, йдеться про *просторову задачу теорії пружності,* то загальне варіаційне рівняння записується у вигляді [Баженов, 2014]:

$$\iiint_V \Big(\boldsymbol{\sigma}-\frac{\partial u_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\Big)^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV+\iiint_V \Big(\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{\partial u_0^{\text{доп}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\Big)^T \delta\boldsymbol{\sigma}\, dV-\iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T \delta\boldsymbol{\sigma}\, dV+$$

$$+\iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T \delta\mathbf{u}+\iint_{S_1} (\mathbf{P}-\mathbf{P}_S)^T \delta\mathbf{u}\, dS+\iint_{S_2} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)^T \delta\mathbf{P}\, dS=0.$$

Загальний варіаційний принцип має вигляд:

$$\delta\Pi^{\text{заг}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=0.$$

Додаткові умови відсутні.

Рівняння Ейлера дають рівняння крайової задачі теорії пружності:

У переміщеннях	*У переміщеннях і напруженнях*
$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u},$ $\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u}+\mathbf{g}=\mathbf{0}\ \in V,$ $\mathbf{A}_S\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u}=\mathbf{P}_S\ \in S_1,$ $\mathbf{u}=\mathbf{u}_S\quad \in S_2.$	$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g}=\mathbf{0}\\ \mathbf{A}^T\mathbf{u}-\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}\end{array}\right\}\in V,$ $\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{P}_S\ \in S_1,$ $\mathbf{u}=\mathbf{u}_S\ \in S_2,$
Принцип Лаґранжа	*Принцип Кастільяно*
$u_0=\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon},$ $\delta\Pi^{\text{Л}}(\mathbf{u})=0.$	$u_0^{\text{доп}}=\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}^{\mathbf{-1}}\boldsymbol{\sigma},$ $\delta\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma})=0.$

Варіаційні рівняння

$$\iiint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T \delta\mathbf{u}\,dV + \iint\limits_{S_1} (\mathbf{P}-\mathbf{P}_S)^T \delta\mathbf{u}\,dS = 0\,.$$

$$-\iiint\limits_V (\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T \delta\boldsymbol{\sigma}\,dV + \iint\limits_{S_2} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)^T \delta\mathbf{P}\,dS = 0.$$

Функціонали

$$\Pi^{\text{Л}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,dV - \iiint\limits_V \mathbf{g}^T\mathbf{u}\,dV - \iint\limits_{S_1} \mathbf{P}_S^T\mathbf{u}\,dS.$$

Додаткові умови

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon},\quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T\mathbf{u} \quad \in V, S,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2.$$

Рівняння Ейлера являють собою рівняння рівноваги

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g} = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S\,,$$

які разом із додатковими умовами:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T\mathbf{u} \quad \in V, S\,,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \in V$$

дають повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності.

$$\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,dV + \iint\limits_{S_2} \mathbf{u}_S^T\mathbf{P}\,dS.$$

Додаткові умови

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon},\quad \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \in V,$$

$$\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \quad \in S_1.$$

Рівняння Ейлера являють собою рівняння сумісності деформацій

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_S,$$

які разом із додатковими умовами:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g} = \mathbf{0} \in V,\ \mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \quad \in S_1,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \in V$$

дають повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності.

Із загального варіаційного рівняння можуть бути отримані I і II форми функціонала Ху-Васідзу, а також відповідні варіаційні рівняння.

I форма функціонала Ху-Васідзу

$$\Pi_1^{\text{ХВ}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,dV +$$

$$+\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon}\right)dV - \iiint\limits_V \mathbf{g}^T\mathbf{u}\,dV -$$

$$-\iint\limits_{S_1} \mathbf{P}_S^T\mathbf{u}\,dS - \iint\limits_{S_2} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)^T\,\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}\,dS.$$

$$\delta\Pi_1(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u}) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

II форма функціонала Ху-Васідзу

$$\Pi_2^{\text{ХВ}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,dV -$$

$$-\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}\,dV - \iiint\limits_V \mathbf{u}^T(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})\,dV +$$

$$+\iint\limits_{S_1} \mathbf{u}^T(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{P}_S)\,dS + \iint\limits_{S_2} \mathbf{u}_S^T\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}\,dS$$

$$\delta\Pi_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u}) = 0.$$

Додаткові умови відсутні.

Варіаційне рівняння Рейсснера

$$-\iiint\limits_V \left(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{A}^T\mathbf{u}\right)^T \delta\boldsymbol{\sigma}\,dV - \iiint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\delta\mathbf{u}\,dV + \iint\limits_{S_1} (\mathbf{P}-\mathbf{P}_S)^T\delta\mathbf{u}\,dS + \iint\limits_{S_2} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)^T\delta\mathbf{P}\,dS = 0.$$

Попередня умова

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial u_0}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Рівняння Ейлера дають разом із попередньою умовою повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності.

Із варіаційного рівняння Рейсснера можуть бути отримані I і II форми функціонала Рейсснера, а також відповідні варіаційні рівняння.

$$u_0 = 2U - u_0^{\text{доп}} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}} \mathbf{D}^{\mathbf{-1}}\boldsymbol{\sigma},$$

$$\Pi_1(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) = \iiint_V \left[\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{\mathbf{-1}}\boldsymbol{\sigma}\right] dV -$$

$$-\iiint_V \mathbf{g}^T \mathbf{u}\, dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u}\, dS - \iint_{S_2} \left(\mathbf{u}\text{-}\mathbf{u}_S\right)^T A_S \boldsymbol{\sigma}\, dS.$$

$$\delta\Pi_1^{\mathrm{P}}\left(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}\right) = 0.$$

Додаткова умова $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$u_0^{\text{доп}} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{\mathbf{-1}}\boldsymbol{\sigma},$$

$$\Pi_2(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{\mathbf{-1}}\boldsymbol{\sigma}\, dV - \iiint_V \mathbf{u}^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})\, dV +$$

$$+\iint_{S_1} \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}\text{-}\mathbf{P}_S)\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma}\, dS$$

$$\delta\Pi_2^{\mathrm{P}}\left(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}\right) = 0.$$

Додаткова умова $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$.

Функціонал граничних умов

Загальне варіаційне рівняння може бути представлено у вигляді:

$$\delta\left(\frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u}\, dx\right) - \delta\left(\iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g}\, dV\right) - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S \delta\mathbf{u}\, dS + \iint_{S_2} \left(\mathbf{u} - \mathbf{u}_S\right)\delta\mathbf{P}\, dS = 0\,.$$

Функціонал граничних умов (I форма).

$$\Pi_1^{\Gamma}\left(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}\right) = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u}\, dV - \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g}\, dV - \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u}\, dS + \iint_{S_2} \left(\mathbf{u} - \mathbf{u}_S\right)^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma}\, dS\,.$$

Додаткові умови:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V\,,\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V\,,\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \in V\,.$$

Варіаційне рівняння:

$$-\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV + \delta\iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g}\, dV + \iint_{S_1} \mathbf{P}_S^T \delta\mathbf{u}\, dS = 0.$$

Функціонал

$$\Pi_2^{\Gamma}\left(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}\right) = -\frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u}\, dV + \iint_{S_1} \mathbf{u}^T \left(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S\right) dS + \iint_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{A}_S \delta\boldsymbol{\sigma}\, dS\,,\quad \delta\Pi_2^{\Gamma}\left(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}\right) = 0\,.$$

Додаткові умови:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V\,,\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \in V\,,\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \in V\,.$$

Для пружних тіл, скріплених в окремих точках, лініях, площинах, тобто для багато-контактних систем, також є можливою побудова повного і частинного функціоналів.

При цьому становить інтерес функціонал граничних умов для багатоконтактної задачі. Можна показати, що класичні методи будівельної механіки (методи сил, переміщень, змішаний), система функціоналів для будівельної механіки і різні варіанти методу скінченних елементів виходять із функціонала граничних умов багатоконтактної задачі. Дійсно, розіб’ємо систему (континуальну або стержневу) на елементи, поєднання яких будемо виконувати в окремих точках. Приймаємо за додаткові умови виконання статичних, геометричних і фізичних рівнянь всередині області кожного елемента. Якщо задача є лінійною, то для цього можна побудувати матриці жорсткості або піддатливості скінченних елементів. Розв’язок задачі отримується за допомогою функціонала граничних умов, із якого витікають як природні граничні умови алгебраїчні рівняння класичної будівельної механіки. Якщо форма, розміри спільних елементів і зв’язки між ними прийняти такими, які мають місце в класичних підходах будівельної механіки, то ці підходи не будуть відрізнятись.

У будівельній механіці вирази для потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії є додатно визначеними квадратичними формами. Вони є двоїстими за Юнгом і пов’язані між собою перетворенням Лежандра, а їх відповідні значення співпадають [Баженов та ін., 2013]. Перетворення Лежандра є частинним випадком нерівності Юнга і у даному випадку за фізичним змістом являє собою рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил і відповідає теоремі Клапейрона. Постановки прямих і двоїстих у розумінні Лежандра, Юнга-Фенхеля, Лаґранжа варіаційних задач реалізуються у вигляді основних варіаційних принципів – Лаґранжа і Кастільяно, теорем Лаґранжа і Кастільяно і приводять до систем алгебраїчних рівнянь, матриці яких (матриці Гессе) складаються з других похідних відповідно від потенціальної енергії пружної деформації (матриця жорсткості) і доповнювальної потенціальної енергії (матриця податливості). Зазначені матриці є додатно визначеними і задовольняють критерії Сільвестра, усі їхні мінори додатно визначені [Беленький, 1964]. До того ж матриці взаємно обернені. Ці міркування розповсюджуються й на функціонали.

Література

Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М.:Стройиздат, 1983.

Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М., 1990.

Аппель П. Теоретическая механика. Т. I. Перевод с 5-го французского издания И.Г. Малкина. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.

Бабенко А.Є., Бобир М.І., Бойко С.Л., Боронко О.О. Теорія пружності. Ч.1. – К.: «Основа», 2009. – 244 с.

Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп’ютерні технології і моделювання. – К.: Віпол, 2013. – 895 с.

Баженов В.А. Варіаційні основи будівельної механіки. Підручник. - К.: Каравела, 2014. – 877 с.

Баженов В.А. Варіаційні принципи будівельної механіки. Історія становлення та розвитку / В.А. Баженов, В.О. Геращенко, М.В. Гончаренко; під загал. ред. проф. В.А. Баженова. - К.: Каравела, 2015. – 762 с.

Базаров И.П. Термодинамика. – С.-П., Лань, 2010. – 377 с.

Беленький И.М. Введение в аналитическую механику. – М., 1964. – 324 с.

Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.

Бернштейн С.А. Очерки по истории строительной механики. – М.: Госстройиздат, 1957. – 236 с.

Бернштейн М.С. Расчет конструкций с односторонними связями. – М.: Стройиздат, 1947. – 448 с.

Бехтерев П. Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы, ч. I, изд. автора. 1925.

Бубнов И.Г. Отзыв на работу С.П. Тимошенко, представленную на премию Д.И. Журавского. - С.-П.: изд-во Института инженеров путей сообщений, 1913.

Бубнов И.Г. Строительная механика корабля. — СПб.: Издание морского министерства, Ч. 1, 1912. — 330 с., Ч. 2, 1914. — 309 с.

Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. - 542 с.

Гвоздев А.А. Общий метод расчета статически неопределимых систем. Теория и примеры ее применения к расчету рамных конструкций — М.: МИИТ, 1927.

Гордеев В.Н., Перельмутер А.В. Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования // Исследования по теории сооружений. – М., 1967. – Вып. 15. – С. 208-212.

Дюэм П. Развитие механики. 1903.

Кирпичев В.Л. Лишние неизвестные в строительной механике. Расчет статически неопределимых систем. К.: Изд-во Кульженка, 1903.

Кирпичев В.Л. Собрание сочинений. Т. 1. Петроград, ППИ, 1917.

Кирпичев В.Л. Сопротивление материалов. Учение о прочности построек и машин. — М.: Государственное издательство, 1923. — Ч. I. — 399 с. — Ч. II. — 497 с.

Кирпичев В.Л. Лишние неизвестные в строительной механике. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 140 с.

Кирпичев В.Л. Беседы о механике. М.- Л.: ГИТТЛ, 1951, 360 с.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.

Кліменко В.З. Розв'язання невидимого конфлікту в будівельних конструкціях. Від інтуїтивного і умоглядного до наукового підходу. Навчальний посібник. - К.: Видавництво «Сталь», 2006. - 108 с.

Кудрявцев П.С. История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1948. — Т. 1. От античной физики до Менделеева.

Кудрявцев П.С. История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1955. — Т. 2. От Менделеева до открытия квант (1870—1900).

Кудрявцев П.С. История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1971. — Т. 3. От открытия квант до создания квантовой механики (1900—1925).

Кудрявцев П.С. Курс истории физики. — М.: Просвещение, 1974.

Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. – М.: Техтерлит, 1951a. – 476 с.

Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2 – М.: Техтерлит, 1951b. – 541 с.

Лаврентьев М., Люстерник Л. Основы вариационного исчисления. Т. 1, ч. II. – М.-Л.: ОНТИ, НКТП, 1935. – 399 с.

Лаврентьєв М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. Издание 2-е переработанное. – М.: Гостехиздат, 1950. - 296 с.

Лагранж Ж. Аналитическая механика, том 1. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950a. — 594 с.

Лагранж Ж. Аналитическая механика, том 2. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950b. — 440 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1954. – 795 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.

Ланцош К. Вариационные принципы механики. Пер. с англ. В.Ф.Гантмахера. Под ред. Л.С.Полака. – М.: Мир. 1965. – 408 с.

Лейбензон Л.С. Вариационные методы решения задач теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1943. – 287 с.

Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 464 с.

Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х т. Т. 1. - М.: 1982. - С. 235-284.

Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

Математическая энциклопедия. Т. 1, М., 1977. Т. 2, М., 1979. Т. 3, М., 1982. Т. 4, М., 1984. Т. 5, М., 1985.

Мах Э. Механика. – С.-Пб., 1909. – 448 с.

Мах Э. Механика. Историко-критический очерк её развития. - Ижевск: РХД, 2000. - 456 с.

Михлин С. Г. Вариационные методы решения задач математической физики. УМН, 5:6(40), 1950. – С. 3–51.

Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Моисеев Н.Д. Очерки по истории механики. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 478 с.

Некрасов Н.В. К теории ферм с жесткими соединениями в узлах. - Сп.-б., 1907.

Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 365 с.

Папкович П.Ф. Теория упругости. – Л.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.

Перельмутер А.В. Жили-были.— К.: Изд-во «Сталь», 2002.— 188 с. [2-е изд. исправленное и дополненное — К.: Изд-во «Сталь», 2004.— 192 с.]

Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – К.: ВВП «Компас», 2001. – 446 с. [Изд. 2-е, переработанное и дополненное.– Киев: Изд-во «Сталь», 2002.– 615 с.; 3-е изд., иправленное и дополненное – М.: ДМК Пресс, 2007.– 600 с. (Серия «Проектирование»)].

Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 1. Общие теоремы. Устойчивость отдельных элементов механических систем.– М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010.– 704 с. [Англ. перевод SCAD Office. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Handbook of Mechanical Stability in Engineering. Vol.1. General theorems. individual members of mechanical systems .— New Jersey-London-Shanghai-Beijing-Singapore-Hong Kong-New Delhi: World Santific Publ., 2013.— 601 p.].

Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 2. Устойчивость упруго деформируемых механических систем.– М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010.–672 с. [Англ. перевод SCAD Office. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Handbook of Mechanical Stability in Engineering. Vol. 2. Stability of elastically deformable mechanical systems.— New Jersey-London-Shanghai-Beijing-Singapore-Hong Kong-New Delhi: World Santific Publ., 2013.— 587 p.].

Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 3.– М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2011.– 388 с. [Англ. перевод SCAD Office. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Handbook of Mechanical Stability in Engineering. Vol. 3. More challenges stability theories. Codification problems .— New Jersey-London-Shanghai-Beijing-Singapore-Hong Kong-New Delhi: World Santific Publ., 2013.— 401 p.].

Перельмутер А.В. Беседы о строительной механике. – М.: изд-во SCAD SOFT, АСВ, 2014. – 250 с.

Петрова С.С. О принципе Дирихле // История и методология естественных наук. — М.: МГУ, 1966. — Вып. 5. — С. 200-218.

Писаренко Г.С. Степан Прокопович Тимошенко. - М.: Наука, 1991. - 239 с.

Плутарх. Сравнительные жизнеописания, т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 391.

Погребысский И.Б. От Лагранжа к Эйнштейну: Классическая механика XIX века. — М.: Наука, 1964. — 327 с.

Погребысский И.Б. От Лагранжа к Эйнштейну.– М.: Наука, 1966.– 326 с.

Пратусевич Я.А. Вариационные методы в строительной механике. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 400 с.

Пригожин И., Дефей Р. Химическая термодинамика. Новосибирск: Наука, 1966. 510 с.

Рабинович И.М. Курс строительной механики стержневых систем. Т.1. Статически определимые системы, 1950. - 387 с. Т. 2. Статически неопределимые системы, 1954. - 544 с. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре.

Рабинович И.М. Воспоминания 1904-1974. - М.: Наука, 1984. — 158 с.

Рейсснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости.– В кн.: Проблемы механики сплошной среды. (К 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили). – М.: АН СССР, 1961.– С. 328-337.

Рейтман М.И. Залог прочности. – М.: Стройиздат, 1973. – 133 с.

Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.

Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: ЛГУ, 1978. – 223 с.

Розин Л.А. Теоремы и методы статики деформируемых систем. – Л., 1986. – 276 с.

Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – С.-Петербург: изд. СПбГТУ, 1998. –530 с.

Рыбаков Л.С., Наринский В.И. Вариационные принципы и методы строительной механики. – М.: МАИ, 1987. – 92 с.

Рэлей Дж. Теория звука, т. I, II.– М.-Л.: Гостехиздат, 1955. – 504 с; 476 с.

Рэнкин У.Д.М. Руководство для инженеров-строителей. — СПб.: 1870.

Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 736 с.

Стрелецкий Н.С. К расчету сложных статически неопределимых систем. - М., 1921

Тимошенко С.П. Воспоминания. – К.: Наукова думка, 1993. – 424 с.

Тимошенко С.П. Воспоминания. - Москва: Вузовская книга, 2014. – 444 с.

Тюлина И.А. Жозеф Луи Лагранж. – М.: Наука, 1977. – 221 с.

Тюлина И.А. История и методология механики. – М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 282 с.

Тюлина И.А., Ракчеев Е.Н. История механики. - Изд-во МГУ, 1962.

Уманский А.А. Специальный курс строительной механики, ч. II, 1935. стр. 39.

Уэвелл У. История индуктивных наук от древнейшего до настоящего времени. — СПб.: Т. I. — 589 с., Т. 2. — 869 с., Т. 3. — 912 с., 1867.

Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1973. — 400 с.

Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975, — 172 с.

Феппль А., Феппль Л. Сила и деформация, т. I и т. II (перевод с немецкого), 1933 и 1936.

Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. — М.: Наука, Т. 1. 1975. - 832 с. Т. II. 1978. - 616 с. Т. III. 1981. - 480 с.

Филин А.П. Пять часов в обществе классика науки. - Санкт-Петербург, 1993.

Филин А.П. Очерки об ученых-механиках. М.: Изд. дом «Стратегия», 2007. – 784 с.

Филоненко-Бородич М.М. Основы теории работы упругих сил в плоских системах. — М.: ГТТИ, 1932. — 224 с.

Чеканов А.А. Виктор Львович Кирпичев. — М.: Наука, 1982. - 176 с.

Черепашинский М. Краткий методический очерк развития строительной механики. — М., 1888. - 33 с.

Шехтер Р. Вариационный метод в инженерных расчетах. – М.: Мир, 1971. – 291 с.

Appell P. Traité de Mécanique, III. – 1900.

Betti E. Teoria della elasticita // Nuovo Cimento. — 1872/ 73. — Ser. 2. — N 7-10.

Boscovich R.J. Philosophiae naturalis ad unicam legem virium in natura existentium. — Venezia: 1763. — 322 p.

Castigliano A. Intorno all'equilibrio dei sistemi elastici // Atti delle Reale Acadamie delle Scienze di Torino. 1875. — V. X.

Castigliano A. Nuova teorie intorno all'equilibrio dei sistemi elastici // Atti della Reale Academie delle Scienze di Torino. — 1875. — V. XI.

Castigliano A. Theorie de l'equilibre des systemes elastiques. — Turin: 1879.

Castigliano A. Theorem de l'equilibre des systemes elastiques et ses applications, 1879 (переклад з англ. в кн: Andrews E.S. Elastic stresses in structures, 1919).

Castigliano A. Nuova teoria intorno all equilibrio dei sistemi elasticiti. – Trans. Acad. Sci. Turin, 1975, vol. X. – P. 380-423.

Cauchy O.L. Recherches sur l'equilibre et Ie mouvement interieur des corps solides ou fluides, elastiques ou non elastiques // Bulletin de sciences par la Societe Philomatique. — 1823. — P. 9 — 13.

Clapeyron E. Sur la puissance motrice de la chaleur. - École Polyt. Journ., vol. 14, No. 23, 1834. - pp. 153–190.

Clapeyron E. Sur la puissance motrice de la chaleur. - Poggend. Annal. LIX, 1843.- pp. 446–450.

Clapeyron E. Calcul d'une poutre elastique reposant librement sur des appuis inegalement espaces // Comptes rendus. — 1857. — T. 45. — P, 1076 — 1080.

Clapeyron E. Abhandlung über die bewegende Kraft der Wärme. Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., 1926.

Clebsch A. Ueber die Gleichgewichts figur eines biegsamen Fodens // Grelles Journal fur die reine und angewandte Mathematik. — 1860. — Bd. 57.

Clebsch A. Theorie der Elasticitaet der fester Koerper. — Leipzig: 1862. — 424 S. [Перевод на французкий язык с примечаниями и дополнениями Б. Сен-Венана: — Clebsch A. Theorie de l'elasticite des corps solides. — Paris: Dunod, 1883. — 980 p.].

Coriolis G.G. Experiences sur la resistance du plomb a l'ecrasement et sur l'influence qu'a sur sa durete une quantite inapreciable d'oxide // Annales de chimie et de physique. — 1830. — T. 44. — P. 103 — 111.

Corradi M. The mechanical sciences in Antiquity. In: Essays in the history of theory of structures, ed. S. Huerta. - Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2005. - pp. 103–116.

Cotterill J.H. Further application of the principle of least action //Philosophical magazin. Ser. 4. — 1865. — V. 29. — P. 430.

Cotterill J.H. On elliptic ribs // Philosophical magazin. — Ser. 4. — 1865. — V. 30.

Cotterill J.H. On the equilibrium of arched ribs of uniform section // Philosophical magazin. Ser. 4. — 1865. — V. 29. — P. 380.

Cotterill J.H. On the extension of dynamical principle least action // Philosophical magazin. Ser. 4. — 1865. — V. 29. — P. 299.

Crotti F. Conversazioni - Saggi di critica scientifico-pratica, Minelli, Rovigo 1877.

Crotti F. Esposizione del teorema Castigliano e suo raccordo colla teoria dell'elastricita. «Atti Coll. Ing. Arch. Milano». Tomo II, fasc., 4, 20 parte.

De Veubeke Fraeijs B. M. Variational principles and the patch test, Int. J. Numer. Meth. Engrg, 8, 783-801, 1974.

De Veubeke Fraeijs B. M. The dynamics of flexible bodies, Int. J. Engrg. Sci, 14, 895-913, 1976.

De Veubeke Fraeijs B. M. A new variational principle for finite elastic displacements, Int. J. Engrg. Sci, 10, 745-763, 1972.

Dirichlet P.G.L. Über die Stabilität des Gleichgewichts. Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 32, 1846. - pp. 85–88.

Domke O. Die Ergänzungsenergie elastischer systeme. Müller-Breslau zum 70 Geburtstag. Eisenban, vol 12, 1921.

Donati L. Sur lavoro di deformazione dei sistemi elastici: Memorie dell'accademia discienze di Bologna, Tomo IX, ser. IV, p. 345, 1888.

Donati L. Illustrazione al theorema del Manabrea: Memorie dell'accademia discienze di Bologna, Tomo X, ser. IV, p. 267, 1889.

Donati L. Ulteriore osservazioni intorno al theorema del Manabrea: Memorie dell'accademia discienze di Bologna, Tomo XV, ser. IV, p. 449, 1894.

Duhem P. Etudes sur Léonard de Vinci. Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Premiere serie. — 1 vol. in-8°, 355 p.; Hermann, Paris.

Duhem P. Les Origines de la statique. - Paris, 1905.

Engesser F. Uber die Durchbiegung von Fachwerktragern und die hierbei auftreten-den zusatzlichen Spannungen // Zeitschrift fur Baukunde, 1879, vol. 2. — P. 590-602.

Engesser F. Ueber Knickfestigkeit gerader Staebe // Zeitschrift des Architekten und Ingeniuer Verein zu Hannover. 1889. — Bd. 35 — S. 456 — 468.

Engesser F. Ueber Knick Flagen // Schweizerishe Bauzeitung. — 1895. — Bd.26. — S. 24.

Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. — Marc Michel Bousquet, 1744.

Euler L. Sur la force des colonnes. Memoires de l'academie des sciences de Berlin T.13, 1759, pp. 252-282.

Euler L. De motu vibratorio tympanorum // Nove commentarii Acadamiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. — 1767. — V. 10.

Fliegel E. Die Elastizitatsgleichungen zweiter Art der Stabwerksdynamik. // In-genieur-Archiv, 1938, vol. 9. — P. 20-38.

Fränkel W. Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben. Zeitschrift d. Arch.- & Ing. - Vereins zu Hannover, vol. 28, 1882. - pp. 63-76.

Goldstine H. A history of the calculus of variations from the 17th through 19th century. – N.Y.: Springer, 1980. – 410 p.

Graves R.P. Life of Sir William Rowan Hamilton. — Dublin University Press, 1882—1889

Green G. On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the common Surface of two non-crystallized Media. In: Transactions of the Cambridge Philosophical Society (1838 –1842), vol. 7, 1839. - pp. 1–24.

Gurtin M.E. The linear theory of elasticity, in Mechanics of Solids Vol II, ed. by C. Truesdell, SpringerVerlag, Berlin, 1-296, 1983.

Hamel G. Elementare Mechanik. Leipzig/Berlin: B.G. Teubner, 1912.

Hamilton W.R. Second essay on a general method of dynamics, v. I. - «Philos. Trans. Roy. Soc.», 1835.

Hartmann F. Z. Angew. Math. und Mech. (Журнал Прикладной Математики и Механики) т.65.– 1985 вып.2, 121-125.

Hellinger E. Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. Enzycl. Math. Wiss. 1914, IV, 4. – P. 654-655.

Helmholtz H. Dynamik continuerlich verbreiteten Massen. — Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius Barth. — 1902. — 247 S.

Hertwig A. Das "Kraftgrosenverfahren" und das "Formanderungsgrosenverfahren" fur die Berechnung statisch unbestimmter Gebilde. // Der Stahlbau, 1933, vol. 6, No. 19. —P. 145-149

Hertz H. Über die Induktion rotierender Kugeln. – Berlin: 1880.

Hilbert D. The Foundations of Geometry. The open court publishing company, La Salle, Illinois, 1950.

Hilbert D. Uber das Dirichlet'sche Prinzip. In: Festschrift zur Feier des 150jahrigen Bestehens der Kgl. Ges. der Wiss. Zu Gottingen. Berlin: Weidenhammer. - 1901.

Hu H.-C. On some variational methods on the theory of elasticity and the theory of plasticity, Scientia Sinica, 4, 33-54, 1955.

Kurrer K.-E. The History of the Theory of Structures. – Berlin: Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2008. – 848 p.

Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris: Bachelier, 1852. – 355 p.

Lamé G. Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. - Mallet-Bachelier, 1859.

Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-critisch dargestellt, Leipzig, 1883.

Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 7th, rev. ed. Leipzig: F.A. Brockhaus, 1912.

Mann L. Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. — Berlin: Verlag von Julius Springer, 1927.

Marx K. Das Kapital. Kritik der politischen Ökonomie, Erster Band. In: Karl Marx-Friedrich Engels-Werke, Bd. 23. Berlin: Dietz, 1979.

Maxwell J.C. On the equilibrium of elastic solids // The Transaction of the Royal Society of Edinburgh. — 1853. — V. 20. — P. 87 — 120.

Maxwell J.C. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Philosophical Magazine, vol. 27, 1864. - pp. 294–299.

Maxwell J.C. The scientific papers. V. 1. — P. 604. — V. 2. — P. 801. — 1927.

Menabrea L.F. Sketch of The Analytical Engine. Invented by Charles Babbage from the Bibliothèque Universelle de Genève, October, 1842, No. 82.

Menabrea L.F. Principio generale per determinare le tensioni e le pressioni in un sistema elastico. Reale Academia delle Scienze di Torino. 1857.

Menabrea L.F. Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques. In Comptes Rendus T. XLVI. - L'Academie des Sciences, Paris, 1858. - pp. 1056-1060.

Mohr O. Beiträge zur Theorie des Fachwerks. - Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, vol. 21, 1875. - pp. 17–38.

Mohr O. Über die Elasticität der Deformationsarbeit. Zivilingenieur, vol. 32, 1886. - pp. 395–400.

Müller-Breslau H. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. - Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlung, 1886.

Müller-Breslau H. Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Band II. Erste Abteilung. 2nd, rev. ed. - Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlung, 1892.

Navier C.L.M.H. Memoire sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps solides elastiques // Bulletin des Sciences par la Societe Philomatique. — 1823. — P. 177 — 183.

Navier C.L.M.H. Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique a l'Etablissement des Constructions et des Machines. 1er partie: Leçons sur la résistance des materiaux et sur l'établissement des constructions en terre, en maзonnerie et en charpente. - Paris: Firmin Didot pere et fils, 1826. - 288 p.

Navier C.L.M.H. Memoire sur les lois de l'equilibre et du mouve-ment des corps solides elastiques // Memoires de l'Academie des Sciences de Paris, 1827. - V. 7. - P. 375-393.

Pasternak P. Beitrage zur Berechnung vielfach statisch unbestimmter Stabsystc-me. // Der Eisenbau, 1922, vol. 13, No. II. — P. 239-254.

Perelmuter A.V., Slivker V.I. Numerical Structural Analysis: Models: Methods and Pitfalls.– Bejlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo: Springer Verlag, 2003.– 600 p.

Poisson S.D. Traite de mecanique. V. 1-2. — Paris: — 1833.

Poncelet J.V. Cours de mecanique appliquee aux machines, Paris: 1826.

Poncelet J.V. Introduction a la mecanique industrielle faite aux artistes et ouvriers messins. — Paris: Part I. — 1827-1828. — Part II. -1828-1829. — Part III. — 1831.

Prange G. Die Variations-und Minimal-prinzipe der Statik der Baukostruktionen Technische Universität in Hannover, 1916.

Rankine W.J.M. An experimental inquiry in to the advantage of cylindrical wheels on railways // Proceedings of the Institute of Civil Engineers. — 1843. — T. 2. — P. 102.

Rankine W.J.M. Manual of applied machanics. — London: 1858.

Rayleigh J.W.S. Die Theorie des Schalles. Erster Band. Trans. from the English by F. Neesen. - Braunschweig: Vieweg, 1879.

Rayleigh J.W.S. Die Theorie des Schalles. Zweiter Band. Trans. from the English by F. Neesen. - Braunschweig: Vieweg, 1880.

Rayleigh J.W.S., Lindsay Robert B. The Theory of Sound vol. I - London : Macmillan, 1877, 1894. [Переклад російською: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955. — Т. 1. — 503 с.]

Rayleigh J.W.S., Lindsay Robert B. The Theory of Sound vol.II - London: Macmillan, 1878, 1896. [Переклад російською: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955. — Т. 2. — 474 с.]

Rayleigh (John William Strutt). Scientific Papers, Volume 1-6. - Cambridge : University Press, 1899–1920.

Reissner E. On a variational theorem in elasticity. J. Math. And Phy. S., 1950. 29, №2. – P. 90-95.

Reissner E. Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics. - Subdury: Jones & Burlett Publishers, 1996.

Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik." J. reine angew. Math. 135, 1-61, 1908.

Ritz W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern.– Annalen der Physik, 28. – 1909. – P. 737–786.

Ritz W. Gesammelte Werke – OEuvres. - Societe suisse de physique, Gauthier-Villars, Paris, 1911, page viii.

Schleusner A. Das Prinzip der virtuellen Verruckungen und die Variationsprinzipien der Elastizitatstheorie. // Der Stahlbau. 1933, vol. 6. No. 19, P.— 145-149.

Serret J.A. Memoire surie principe de la moindre action. CR. Mem. Akad. De Sc., 1871.

Truesdell C. The Tragicomical History of Classical Thermodynamics, 1822—1854. — Springer-Verlag, 1980.

Truesdell C. An idiot's fugitive essays on science: Methods, criticism, training, circumstances. New York e.a.: Springer, 1984. — 654 p.

Truesdell C. What did Gibbs and Caratheodory leave us about thermodynamics?// New Perspectives in Thermodynamics. Berlin e.a.: Springer, 1986. - p. 101-124.

Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics. Vol. 1. 2nd augm. ed. Boston e.a.: Academic Press, 1991. — 391 p.

Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. - Pergamon Press, U.S.A., 1975.

Winkler E. Formaenderung und Festigkeit gekruemmter Koerper, inbesondere der Ringe // Der Civiligenieur. — 1858. — Bd 4. S. 232 — 246.

Winkler E. Beitraege zur Theorie der Continnierlichen Bruchentraeger // Der Civiligenieu. - 1862. — Bd. 8. S. 135 — 182.

Winkler E. Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit. Prague: H. Dominicus, 1867.

Winkler E. Theorie der continuierlichen Trager. Zeitschrift des osterreichischen // Ingenieurund Architekten-Vereines, 1872, vol.24, —P. 27-32, 61-65.

Winkler E. Alberto Castigliano, Deutsche Bauzeitung, 1884, vol. 15, pp. 570-573.

Yu Y.Y. Generalized Hamilton's principle and variational equation of motion in nonlinear elasticity theory, with application to plate theory. — Journal of the Acoustical Society of America, 1964, v. 36, No. I, p. 111—119.

Нарис 7

ДВОЇСТА ПРИРОДА ЗАДАЧ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ. ДО ІСТОРІЇ МЕТОДУ СИЛ І МЕТОДУ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Комп'ютер формує теорію.

Дж. Аргіріс

Вступ

Історично в процесі розвитку механіка і, зокрема, будівельна механіка були пов'язані з геометрією. Адже реальним об'єктам завжди передували геометричні уявлення, схеми і побудови. Цікаво, що «*… сам Архімед*, - пише Плутарх, - *вважав спорудження машин заняттям, аж ніяк не заслуговуючим ні праці, ні уваги; більшість з них з'явилась на світ так би мовити мимохідь, у вигляді геометричних розваг і то лише тому, що цар Гієрон із честолюбства переконав Архімеда хоч ненадовго відволіктись від теоретичних міркувань і звернутись до реальних речей, у якійсь мірі матеріалізувати свою думку, поєднати її з повсякденними потребами … Знаменитому і багатьма улюбленому мистецтву побудови механічних знарядь поклали початок Евдокс і Архіт, які намагалися розв'язати ті питання, доведення яких шляхом лише одних міркувань і креслень було важким; такою є задача про знаходження двох середніх пропорційних, для розв'язання якої обидва застосували механічні приладдя, будуючи шукані лінії на основі дуг і сегментів. Але оскільки Платон був обурений, дорікаючи їм у тому, що вони гублять гідність геометрії, механіка повністю відокремились від геометрії і, ставши однією із воєнних наук, довгий час зовсім не займала філософів*» [Плутарх. 1961].

Діалектичний зв'язок механіки і геометрії підтверджує і відомий вислів І. Ньютона: «*Таким чином геометрія виникла у геометричній практиці і є не що інше, як розділ загальної механіки, яка точно викладає і доводить до мистецтва процес виміру. Але, оскільки, фізичні властивості використовуються головним чином у тілах, які рухаються, то буває, що під геометрією зазвичай мають на увазі величину, під механікою – рух. У цьому сенсі раціональна механіка є наукою рухів, які виникли в результаті дії довільних сил і сил, які необхідні для довільних рухів, точно викладеною і доведеною*».

Історично чітко відслідковується зв'язок між геометрією і статикою, або за термінологією механіки – між статичною і геометричною сторонами задачі.

У своїй новаторській роботі «Аналітична механіка», Ж.-Л. Лаґранж заснував всю механіку, а значить і статику, на єдиному принципі: принципі віртуальних швидкостей. Ж.-Л. Лаґранж тому визнав не тільки еквівалентність трьох принципів статики

- принцип важеля;
- принцип віртуальних переміщень;
- паралелограм сил,

але також і ясно показав, що принцип можливих переміщень може бути математично перетворений в принцип рівноваги.

Статика, в значенні рівноваги тіла, на рівні теоретичної механіки стала логічно завершеною. І це створило передумови для історичного розвитку теорії споруд в період формування дисципліни.

Ядром теорії, яка є підґрунтям кінематичного погляду на статику, заснованого Аристотелем і отримавшого завершений вигляд завдяки Ж.-Л. Лаґранжу, є принцип можливих переміщень. Цей принцип успішно застосовувався до простих механізмів, таких як важіль, блок або похила площина. Леонардо да Вінчі, наприклад, розглядав кам’яну арку як механізм. Проте, він не обчислював розпір арки за допомогою принципу можливих переміщень, а замість цього запропонував спосіб його експериментального визначення.

Перетворення будівельних конструкцій на механізми для їх подальшого механічного аналізу було характерним для кінематичного погляду на статику. Наслідки того, що механізм насправді знаходиться в рівновазі, можуть бути визначені непрямим шляхом за допомогою аналізу моделі у відхиленому положенні, як це зазвичай роблять при застосуванні кінематичного підходу.

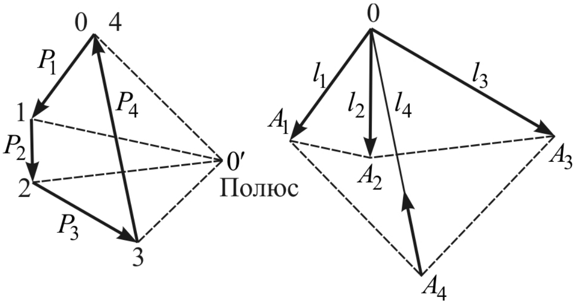
Кінематичне представлення статики	Векторне представлення статики
Представники:	*Представники:*
Аристотель, Герон, Вітрувій, Табіт ібн Курра, Неморарій, Леонардо Да Вінчі, Тарталья, Кардано, Лаґранж, Мор, Ланд, Мюллер-Бреслау	*Архімед, Герон, Папп, Табіт ібн Курра, Гвідобальдо дель Монте, Стевін, Галілео Галілей, Роберваль, Варіньон, Клапейрон, Мюллер-Бреслау*

Рис. 7.1. Кінематичне і геометричне представлення статики

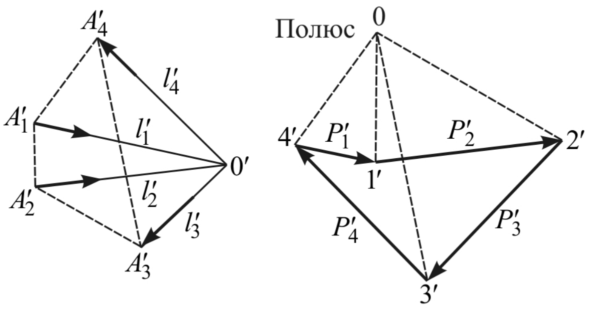
Кінематичний погляд на статику [Kurrer, 2008] (рис. 7.1, зліва), який був компонентом, що поєднав аристотелівську теорему про рух і натуральну філософію, було відкинуто на початку нашого часу Галілеєм і іншими ученими. При цьому набагато більшого значення набув геометричний підхід до механіки, заснований Архімедом. Тут ми знову повинні згадати «Діалог» Галілея. Консольна балка, на якій він продемонстрував руйнування при згині, стала метафорою геометричного представлення статики.

Тоді як кінематичне представлення статики, як чисто теоретична ідея в значенні Платона, мало високий соціальний престиж зі стародавніх часів, геометричний погляд на статику (рис. 7.1, праворуч) відносився до архітектури і розцінювався на цій підставі як «нижче мистецтво». Геометричне представлення статики розвинулося на основі евклідової геометрії і елементарних практичних вимог до споруд, де рівновага була природною умовою, яка не могла бути усунута без зовнішніх пошкоджень. Фундаментальне поняття стійкості дозволило геометричному представленню статики набути переважаючого положення в теорії споруд під час періоду її формування (1825–1900). Проте такі видатні інженери-будівельники, як О. Мор, Роберт Ланд (1857-1899), Г. Мюллер-Бреслау та інші зробили істотний внесок у кінематичний погляд на статику, розвиток якого також не переривався. Відмінності між кінематичним і геометричним представленнями статики, дискусії, що стимулювали та супроводжували розвиток теорії споруд, сформували найважливіші її елементи.

З історією будівельної механіки і теорії споруд тісно пов’язане поняття двоїстості. На стадії становлення це стосувалось, у першу чергу, методів графічного аналізу, які ґрунтувались на проективній геометрії.



силовий багатокутник мотузковий багатокутник



взаємний мотузковий багатокутник взаємний силовий багатокутник

Рис. 7.2. Дуальність мотузкового багатокутника і силового багатокутника для плоскої системи сил за Кульманом

Наведені на рис. 7.2 мотузковий багатокутник і багатокутник сил є взаємозамінними, оскільки немає значення, який з багатокутників обирається як силовий, а який як пов'язаний із ним мотузковий. К. Кульман називає такі фігури взаємними. Працюючи незалежно, Дж.К. Максвелл довів ще в 1864 р., що у випадку незбіжної системи сил такі дві фігури є взаємними тільки, коли силовий багатокутник може розглядатись як проекція багатогранника; при цьому інша фігура також є проекцією багатогранника. На рис. 7.2 дві фігури можуть інтерпретуватися як проекції чотирьохгранних пірамід з їх вершинами в 0 і 0′. Знання цих математичних співвідношень, також відомих як двоїстість мотузкового багатокутника і силового багатокутника, дозволило Кульману визначити функції навантаження тільки для арок еліптичної, параболічної і гіперболічної форми. Таким чином, евристична функція, заснована на проективній геометрії, залишилася ілюстративним обмеженим поняттям науково-технічної теорії графічної статики [Kurrer, 2008].

Загальновідомо, що умови рівноваги, закон поведінки матеріалу і кінематичні співвідношення дають 15 рівнянь або диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно 15 невідомих скалярних функцій трьох змінних, а саме:

- трьох переміщень,
- шести деформацій,
- шести напружень.

Логічне ядро теорії пружності характеризується цією триєдиною структурою. При вирішенні задач теорії пружності використовуються два підходи: виключення напружень і виключення переміщень.

Якщо, у разі повної лінійності, однорідності і ізотропності тіла, деформації і напруження виключені з системи рівнянь, векторне диференціальне рівняння приймає вигляд:

$$\Delta \mathbf{u}+\frac{1}{(1-2\cdot\nu)}\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u})-\frac{2\cdot(1+\nu)}{E}\mathbf{g}=0\,.$$

Ця система трьох диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно вектора переміщень $\mathbf{u}$ при відомих об'ємних силах $\mathbf{g}$ і двох константах матеріалу E (модуль пружності) і ν (коефіцієнт Пуассона) плюс геометричні граничні умови була названа на честь Г. Ламе і Л. Нав'є. Об'єднавши рівняння і крайові умови, отримаємо метод розв'язання диференціальних рівнянь в переміщеннях Ламе-Нав'є, який названо терміном «*метод переміщень*» математичної теорії пружності.

Другий шлях полягає у виключенні переміщень і деформацій і переході - знову для випадку повної лінійності, однорідності і ізотропності тіла – до тензорного диференціального рівняння, названого на честь Е. Бельтрамі і Дж.Г. Мічелла:

$$\Delta\sigma_{ij}+\frac{1}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j}=-\left[\operatorname{grad}\mathbf{g}+\operatorname{grad}^T\mathbf{g}+\frac{\nu}{(1-\nu)}\cdot(\operatorname{div}\mathbf{g})\cdot I\right].$$

Зважаючи на силові крайові умови, компоненти тензора напружень σ_{ij} (s - сума діагональних компонент тензора напружень σ_{ij}, I - одиничний тензор) можуть бути визначені з цієї системи шести диференціальних рівнянь в частинних похідних. Підходи, що приводять до розв'язку диференціальних рівнянь Бельтрамі-Мічелла в напруженнях, названі «*методом сил*» математичної теорії пружності.

У літературі перший підхід, що використовує диференціальні рівняння в переміщеннях Ламе-Нав'є і геометричні крайові умови (умови, що визначають переміщення на поверхні тіла) названий першою крайовою задачею, а другий підхід, що використовує диференціальні рівняння Бельтрамі-Мічелла в напруженнях і статичні крайові умови (умови, що визначають сили на поверхні тіла) називають другою крайовою задачею теорії пружності. Можливий також третій підхід для розв'язання задач теорії пружності, коли на одній частині поверхні тіла S_1 задані напруження, а на іншій частині S_2 - переміщення.

Еуженіо Бельтрамі (1835–1900) – італійський математик, відомий своїми працями з диференціальної геометрії і математичної фізики. Починаючи з 1871 р. займався дослідженнями в галузі аналітичних функцій і механіки.

Джон Генрі Мічелл (1863–1940) – австралійський математик і механік. Роботи у галузі математики, фізики, гідравліки й теорії пружності. Встановив у теорії пружності диференціальні залежності між компонентами напружень (1899). Дав розв'язок двовимірної задачі теорії пружності (1899).

7.1. Форми виразу потенціальної енергії. Частинні похідні від потенціальної енергії

Потенціальна енергія стержневої системи, навантаженої силами $P_1, P_2, \ldots, P_n$, виражається формулою [Рабинович, 1954]

$$U(P,\Delta)=\frac{1}{2}(P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+\ldots+P_n\Delta_n), \tag{7.1}$$

де через Δ_i позначено сумарне переміщення точки прикладення сили P_i за напрямком цієї сили.

У свою чергу, сумарні переміщення виражаються через одиничні (тобто через переміщення по тому ж напряму, що викликаються порізно силами $P_1=1$, $P_2=1$, ..., $P_n=1$) таким чином:

$$\Delta_i = P_1\delta_{i1} + P_2\delta_{i2} + \ldots + P_n\delta_{in}. \tag{7.2}$$

Якщо ми підставимо вирази Δ_i у формулу (7.1), то отримаємо вираз для доповнювальної потенціальної енергії

$$U^{\text{доп}}(P)=\frac{1}{2}(\delta_{11}P_1^2+\delta_{22}P_2^2+\ldots+\delta_{nn}P_n^2)+(\delta_{12}P_1P_2+\delta_{13}P_1P_3+\ldots+\delta_{23}P_2P_3+\ldots+\delta_{n-1n}P_{n-1}P_n)$$

або коротше

$$U^{\text{доп}}(P) = \frac{1}{2}\sum\delta_{ii}P_i^2 + \sum\delta_{ik}P_iP_k\,, \tag{7.3}$$

причому в другій сумі $i \neq k$. Права частина формули (7.3) є однорідним алгебраїчним багаточленом другого степеня відносно зовнішніх сил. До складу його входять з деякими коефіцієнтами квадрати сил і їх попарні добутки. Такі багаточлени носять назву квадратичних форм, тому можна сказати, що потенціальна енергія лінійно деформівного тіла завжди може бути представлена у вигляді квадратичної форми від зовнішніх сил.

До складу зовнішніх сил можна також включити реакції таких в'язей, відкидання яких не порушує геометричної незмінності і нерухомості системи.

Потенціальна енергія завжди додатна, отже, квадратична форма (7.3) має таку властивість, що ні при яких значеннях змінних $P_1, P_2, \ldots, P_n$ вона не може стати від'ємною. Такі квадратичні форми називаються *додатно визначеними.*

Замість того, щоб вважати незалежними змінними зовнішні сили $P_1, P_2, \ldots, P_n$, можна прийняти за незалежні змінні відповідні цим силам сумарні переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Ці дві різні можливості проілюстровано на простому прикладі (рис. 7.3). На

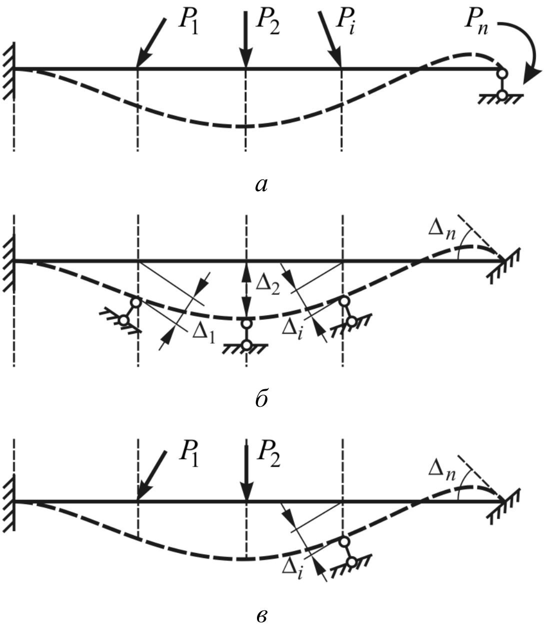


Рис. 7.3

рис. 7.3,*а* незалежними змінними є сили $P_1, P_2, \ldots, P_n$; ними викликається деформація балки. На рис. 7.3,*б*, навпаки, незалежні змінні є переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Досягається це установкою відповідних опорних стержнів. Опорні реакції, що виникають в них, співпадають з силами $P_1, P_2, \ldots, P_n$, але вже є функціями заданих переміщень.

Для того, щоб представити потенціальну енергію як функцію переміщень $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ виразимо сили P_i через ці переміщення. Для цього треба написати *n* рівнянь вигляду (7.2) і розв'язати їх відносно величин P_i. Нам зараз немає потреби здійснювати цю операцію, лише відзначимо, що вона можлива і що розв'язком будуть *n* формул такого вигляду:

$$P_i = a_{i1}\Delta_1 + a_{i2}\Delta_2 + \ldots + a_{in}\,\Delta_n. \tag{7.4}$$

Якщо ми в цій формулі покладемо $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \Delta_3 = \ldots = \; = \Delta_n = 0$, то отримаємо $P_i = a_{i1}$. Звідси витікає, що коефіцієнт a_{i1} виражає собою величину тієї реакції, яка виникне у *i*-й в'язі, коли по напрямку *i*-ї в'язі відбудеться переміщення рівне одиниці, тоді як решта $n-1$ в'язей залишаться нерухомими. Позначимо таку реакцію через r_{i1}. Тоді $a_{i1} = r_{i1}$ і взагалі $a_{ik} = r_{ik}$. Звідси автоматично витікає властивість взаємності коефіцієнтів a_{ik}, тобто $a_{ik} = a_{ki}$.

Отже:

$$P_i = r_{i1}\Delta_1 + r_{i2}\Delta_2 + \ldots + r_{in}\,\Delta_n, \tag{7.5}$$

тоді, згідно з формулою (7.2)

$$U(\Delta) = \frac{1}{2}\sum r_{ii}\Delta_i^2 + \sum r_{ik}\Delta_i\Delta_k,\; i \neq k. \tag{7.6}$$

Такою є потенціальна енергія пружної деформації.

Третю форму потенціальної енергії отримаємо, якщо за незалежні змінні оберемо частково сили, частково переміщення. Хай для якихось *m* точок дані сили $P_1, P_2, \ldots, P_m$, що діють в них, а для інших $n-m$ точок – переміщення $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \ldots, \Delta_n$. Приймемо ці величини за незалежні змінні. Для цього потрібно уявити собі, що в точках $m+1$, $m+2, \ldots, n$ поміщені в'язі (наприклад, опорні стержні) і що останні перемістилися на задані величини $\Delta_{m+1}, \ldots, \Delta_n$. Роль сил $P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_n$ гратимуть реакції цих в'язей, а роль сил $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – зовнішні сили (рис. 7.3, *в*).

Залежні *m* переміщень і $n-m$ сил можна виразити через обрані незалежні змінні формулами вигляду

$$\left.\begin{aligned} P_i\ (\text{при } i > m) &= \sum_{k=1}^{k=m} r'_{ik}P_k + \sum_{k=m+1}^{k=n} r_{ik}\Delta_k; \\ \Delta_i\ (\text{при } i \leq m) &= \sum_{k=1}^{k=m} \delta_{ik}P_k + \sum_{k=m+1}^{k=n} \delta'_{ik}\Delta_k. \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Тут через δ_{ik}, δ'_{ik}, r_{ik}, r'_{ik} позначені переміщення і реакції, що спричинені дією в точці *i* одиничних незалежних змінних, тобто $P_k = 1$ або $\Delta_k = 1$.

Звідси легко отримати вираз для потенціальної енергії:

$$U(P,\Delta) = \frac{1}{2}\sum P_i\Delta_i = \frac{1}{2}\sum_1^m \delta_{ii}P_i^2 + \sum_1^m \delta_{ik}P_iP_k + \frac{1}{2}\sum_{m+1}^n r_{ii}\Delta_i{}^2 + \sum_{m+1}^n r_{ik}\Delta_i\Delta_k, \quad i \neq k. \tag{7.8}$$

Ця формула для потенціальної енергії називається *змішаною*.

З цієї формули витікає, що *якщо система, закріплена в точках* $m+1, m+2, \ldots, n$, *піддається сумісній дії сил* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ *і переміщень* $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \ldots, \Delta_n$, то потенціальна енергія дорівнює сумі енергій, які вийшли б при роздільній дії цих сил, з одного боку, і переміщень, з іншого боку. Члени, що виражають взаємну роботу цих двох чинників, відсутні.

Це легко зрозуміти, якщо уявити собі, що спочатку відбулися переміщення $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \ldots, \Delta_n$, а потім з'явилися сили $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Коли відбувається процес деформації системи цими силами, то названі в'язі вже не отримують додаткових переміщень, а тому їх реакції змінюють тільки свою величину, але не здійснюють додаткової роботи. Отриманий висновок можна записати так:

$$U(P,\Delta) = U^{\text{доп}}(P) + U(\Delta). \tag{7.9}$$

Вважатимемо всі сили $P_1, P_2, \ldots, P_n$ незалежними змінними. Продиференціюємо за цієї умови обидві частини формули (7.2) по одній із сил, наприклад, по P_1 і отримаємо

$$\frac{\partial\Delta_i}{\partial P_1} = \delta_{i1} = \delta_{1i}. \tag{7.10}$$

Продиференціювавши ж після цього по тій же змінній формулу (7.1) і скориставшись співвідношенням (7.10), знайдемо

$$\frac{\partial U(P,\Delta)}{\partial P_1} = \frac{1}{2}\left(\Delta_1 + P_1\frac{\partial\Delta_1}{\partial P_1} + P_2\frac{\partial\Delta_2}{\partial P_1} + \ldots + P_n\frac{\partial\Delta_n}{\partial P_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Delta_1 + P_1\delta_{11} + P_2\delta_{12} + \ldots + P_n\delta_{1n}\right) = \frac{1}{2}\left(\Delta_1 + \Delta_1\right) = \Delta_1. \tag{7.11}$$

Той же результат ми могли б отримати, продиференціювавши безпосередньо формулу (7.3). Отже, за вказаної умови частинна похідна від потенціальної енергії по одній з сил дорівнює переміщенню точки прикладення цієї сили за напрямком останньої. Ця теорема відома під назвою теореми Кастільяно.

Якщо в точці, переміщення якої ми шукаємо, немає зовнішньої сили, то її треба прикласти, літерно позначити, потім скласти вираз потенціальної енергії і продиференціювати його по цій силі. Виконавши ці операції, ми отримаємо вираз для шуканого переміщення, і в ньому залишиться тільки прирівняти введену нами силу нулю.

Друга похідна також має простий фізичний сенс: з формул (7.10) і (7.11) виходить, що

$$\frac{\partial^2 U^{\text{доп}}(P)}{\partial P_i^2} = \delta_{ii} . \tag{7.12}$$

Звідси видно, що друга похідна по силі завжди додатна. Далі:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_k} = \delta_{ik} . \tag{7.13}$$

Інколи в будівельній механіці доводиться вирішувати обернену задачу: по даних сумарних переміщеннях $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ знайти відповідні сили $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Така задача зустрічається, наприклад, тоді, коли силами $P_1, P_2, \ldots, P_n$ служать реакції зайвих опорних стержнів, викликані переміщеннями $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ цих стержнів. У цих випадках представляє інтерес наступна властивість потенціальної енергії, встановлена ще Ж.-Л. Лаґранжем: якщо переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ розглядаються як незалежні змінні, то частинна похідна від потенціальної енергії по будь-якому з цих переміщень дорівнює відповідній силі, тобто

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta_i} = P_i . \tag{7.14}$$

Доведення можна провести аналогічно доведенню теореми Кастільяно.

Розглянемо окремий випадок, коли в системі в певних точках задані вимушені переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, після чого ці точки були закріплені. Роль зовнішніх сил відіграють при цьому реакції $P_1, P_2, \ldots, P_n$ відповідних в'язей, тому з формули (7.14) отримуємо

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta_i} = R_i , \tag{7.15}$$

а з формули (7.6)

$$\frac{\partial^2 U(\Delta)}{\partial \Delta_i^2} = r_{ii} . \tag{7.16}$$

Якщо ми звернемося до змішаного виразу потенціальної енергії, то відмітимо, що воно допускає диференціювання по змінним обох типів. Продиференціюємо формулу (7.9) по одній з незалежних змінних сил $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Вираз $U(\Delta)$ не залежить від цих сил, тому похідна від потенціальної енергії виходить такою, наче потенціальна енергія є функцією тільки від сил:

$$\frac{\partial U(P,\Delta)}{\partial P_i} = \frac{\partial U^{\text{доп}}(P)}{\partial P_i} = \Delta_i . \tag{7.17}$$

Частинна похідна від потенціальної енергії, вираженої в змішаній формі, по одній із заданих незалежних сил P_i дорівнює сумарному переміщенню Δ_i за напрямком цієї сили, отриманому за умови, що точки прикладення сил $P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_n$ нерухомі.

Аналогічним чином

$$\frac{\partial U(P,\Delta)}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta_i} = R_i, \tag{7.18}$$

тобто частинна похідна від того ж виразу по одному із заданих незалежних переміщень Δ_i дорівнює реакції відповідної i-ї в'язі, яка виникла б при заданих незалежних переміщеннях $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \ldots, \Delta_{m+n}$, якби зовнішні сили $P_1, P_2, \ldots, P_m$ були відсутні.

Із формули (7.6) отримуємо

$$\frac{\partial^2 U(\Delta)}{\partial \Delta_i \partial \Delta_k} = r_{ik} \,. \tag{7.19}$$

Наведені залежності можуть бути отримані і із загальних міркувань.

Як відомо [Баженов, 2014], теорема Ейлера про однорідні функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ виміру k свідчить, що

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = kf(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n).$$

Якщо $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} x_i$ і $\det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n.$$

Нерівність Юнга

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Перетворення Лежандра

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Теорема Лаґранжа	*Теорема Кастільяно*
$p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}.$	$x_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}.$

Якщо функція є квадратичною формою, то $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, де $\mathbf{A}$ – матриця квадратичної форми. Оскільки $\mathbf{A}$ – симетрична матриця, то $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. За теоремою Ейлера $\mathbf{p}^T \mathbf{x} = 2f(\mathbf{x})$, або $\mathbf{p}^T \mathbf{x} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. Звідки $\mathbf{p}^T = 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{x}^T = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}$. Тоді

$$H(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p} \,.$$

Таким чином значення квадратичної форми $f(\mathbf{x})$ і її перетворення Лежандра $H(\mathbf{p})$ у відповідних точках співпадають

$$f(\mathbf{x}) = H(\mathbf{p}).$$

Перетворення Лежандра у випадку функції потенціальної енергії пружної деформації $U(\Delta)$ і доповнювальної потенціальної енергії $U^{\text{доп}}(P)$ має вигляд

$$\mathbf{P}^T = \{P_1, P_2, \ \dots \ , P_n\}; \ \mathbf{\Delta}^T = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots \ , \Delta_n\}.$$

Потенціальна енергія пружної деформації

$$U(\mathbf{\Delta}) = \frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T \mathbf{K}\mathbf{\Delta}.$$

Доповнювальна потенціальна енергія

$$U^{\text{доп}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}^T \mathbf{D}\mathbf{P}.$$

Нерівність Юнга має вигляд

$$\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T \mathbf{K}\mathbf{\Delta} + \frac{1}{2}\mathbf{P}^T \mathbf{D}\mathbf{p} \geq \mathbf{P}^T \mathbf{\Delta}.$$

Рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил являє собою перетворення Лежандра

$$\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T \mathbf{K}\mathbf{\Delta} + \frac{1}{2}\mathbf{P}^T \mathbf{D}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{\Delta}.$$

При цьому повинні бути виконані умови рівноваги, сумісності деформацій і граничні умови.

Умова, що перетворює нерівність Юнга у рівність

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{\Delta}, \text{ або } \mathbf{\Delta} = \mathbf{D}\mathbf{P}.$$

При цьому матриці $\mathbf{K}$ і $\mathbf{D}$, які являють собою відповідно матриці жорсткості і піддатливості є взаємно оберненими $\mathbf{KD} = \mathbf{E}$. Ці матриці є матрицями других похідних (матрицями Гессе) від потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії, їх коефіцієнти дорівнюють:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U(\mathbf{\Delta})}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j}; \qquad \delta_{ij} = \frac{\partial^2 U^{\text{доп}}(\mathbf{P})}{\partial P_i \partial P_j}.$$

Згідно з *теоремою Донкіна*, якщо дві двоїсті за Юнгом функції потенціальної енергії $U(\mathbf{\Delta})$ і $U^{\text{доп}}(\mathbf{P})$ залежать від одного і того ж параметра або групи параметрів, які не є активними, тобто не беруть участі у перетворенні Лежандра (η), то має місце залежність

$$\frac{\partial U(\mathbf{\Delta})}{\partial \eta} = -\frac{\partial U^{\text{доп}}(\mathbf{P})}{\partial \eta}.$$

Наприклад,

$$U(\Delta) = \frac{1}{2}k\Delta^2, \qquad\qquad U^{\text{доп}}(P) = \frac{1}{2}\frac{P^2}{k},$$

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial k}=\frac{1}{2}\Delta^2, \qquad \frac{\partial U^{\text{доп}}(P)}{\partial k}=-\frac{1}{2}\frac{P^2}{k^2}=-\frac{1}{2}\Delta^2.$$

Відповідні екстремальні задачі для перетворення Лежандра дають двоїсті за Лаґранжем постановки екстремальних задач (принципи Лаґранжа і Кастільяно).

Пряма задача	*Двоїста задача*
$\left\{\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K}\mathbf{\Delta}-\overline{\mathbf{P}}^T\mathbf{\Delta}\right\}\to\min$,	$\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P}+\overline{\mathbf{\Delta}}^T\mathbf{P}\right\}\to\max$,
за умови $\mathbf{\Delta}=\overline{\mathbf{\Delta}}$.	за умови $\mathbf{P}=\overline{\mathbf{P}}$.

7.2. До історії методу сил[1] і методу переміщень

Величезне значення принципу можливих переміщень для механіки твердого тіла і системи твердих тіл було цілком оцінене після появи «Аналітичної механіки» Лаґранжа (1788).

Початком широкого енергетичного напряму в розробці питань теорії пружності і розрахунку статично невизначуваних систем слід вважати момент публікації теореми Клапейрона про дійсну роботу пружних сил (1852).

Наступний знаменний етап в теорії пружного тіла полягав у відкритті принципу взаємності робіт.

Вперше принцип взаємності був виведений у суто алгебраїчному вигляді О.Л. Коші, який в 1857 р. довів наступну властивість всякої однорідної квадратичної функції декількох змінних, якщо

$$y_1=F(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\ldots,\theta_1),\; y_2=F(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\ldots,\theta_2),$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_1}\alpha_2+\frac{\partial y_1}{\partial\beta_1}\beta_2+\ldots=\frac{\partial y_2}{\partial\alpha_2}\alpha_1+\frac{\partial y_2}{\partial\beta_2}\beta_1+\ldots$$

Але, якщо ми розумітимемо під y_1 і y_2 потенціальні енергії, відповідні двом станам навантажень, а саме $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\ldots,\theta_1)$ і $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\ldots,\theta_2)$, то написані вище частинні похідні по силам виражатимуть собою відповідні переміщення, і теорема взаємності робіт стане лише окремим випадком теореми Коші. Проте сам О.Л. Коші, хоча і був вельми близький до питань теорії пружності, не зробив такого висновку зі своєї теореми. Зазначимо про очевидний зв’язок наведеної теореми з відомою теоремою Ейлера для однорідних функцій (1779).

Властивість взаємності, що відноситься до пружного тіла, була відкрита в 1864 р. Дж.К. Максвеллом у формі теореми про взаємність переміщень:

$$\delta_{mn}=\delta_{nm}.$$

У тій же роботі Дж.К. Максвелл довів для ферми наступну лему: якщо при дії сили «одиниця», прикладеної між двома вузлами B і C, в деякому стержні s виходить зусилля $S=p$, то при заданому подовженні цього стержня $\Delta s=1$

---

[1] Докладний історичний нарис розвитку спеціальних прийомів методу сил наведений в книзі: Рабинович И.М. «Методы расчета рам» [Рабинович, 1934, стор. 10-25].

подовження відрізка *BC* буде також рівне p. Застосовуючи сучасні позначення, можна сказати, що для такої системи при $P = 1$ виходить співвідношення

$$r_{1P} = -\delta'_{P1}\,.$$

Доведення принципу взаємності робіт для будь-якого пружного тіла було дано в 1872 р. Е. Бетті. Він розглядав два стани тіла, що знаходиться під сумісною дією поверхневих і об'ємних сил, і виразивши роботу через напруження і переміщення, показав, що множники, що відносяться до обох станів, входять у вираз віртуальних робіт симетрично. При цьому він брав до уваги також роботу сил інерції. Зі своєї теореми він зробив ряд важливих для теорії пружності висновків.

Майже одночасно з Е. Бетті, але пізніше за нього на один - два роки, Релей опублікував ряд робіт, присвячених питанням взаємності.

Релей виходив з міркувань, значно більш загальних і, в той же час, простіших, ніж у Е. Бетті. У своїх перших статтях він не дійшов до самого кінця і замість того, щоб довести взаємність *робіт,* обмежився доказом взаємності переміщень і реакцій.

У 1873 р. він довів, що якщо періодична сила гармонійного типу із заданою амплітудою і періодом діє на систему в точці *A*, то амплітуда і фаза переміщень іншої точки *B* будуть такі ж, як вийшли б в точці *A*, якби сила діяла в точці *B*. Наступного року він зробив з цієї теореми висновок статичного характеру, припустивши, що період сили дуже великий, а ефект розсіювання, а також сил інерції - дуже малий. Тоді у будь-який момент тіло матиме таку конфігурацію, яку воно мало б при дії тих же сил, що залишаються незмінними. Звідси він отримав три статичні співвідношення, які в наших позначеннях запишуться так:

$$\delta_{12} = \delta_{21}\,;\ r_{12} = r_{21} \text{ і } \delta'_{P2} = -r_{2P}\,.$$

Друге з цих рівнянь, за словами Релея, розповсюджується також на коливання систем. Не дивлячись на це, він в 1875 р. окремо довів теорему взаємності переміщень для балки будь-якого змінного перерізу, опертої на кінцях. Тільки у 1877 р. в першому виданні своєї книги по теорії звуку він дав закон взаємності робіт у формі співвідношення

$$\Psi_1\psi_1' + \Psi_2\psi_2' + \ldots = \Psi_1'\psi_1 + \Psi_2'\psi_2 + \ldots\ ,$$

де через Ψ позначені узагальнені сили, а через ψ - узагальнені переміщення.

Чисто алгебраїчне, а тому загальне трактування принципу взаємності було знову сформульоване в 1927 р. П.Л. Пастернаком. Він розглядає взаємність як властивість, яка притаманна всякій системі *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими, що має симетричну матрицю (тобто симетрію коефіцієнтів). Хай система має вигляд

$$a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \ldots + a_{1n}Y_n = c_1;$$

$$a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \ldots + a_{2n}Y_n = c_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$a_{n1}Y_1 + a_{n2}Y_2 + \ldots + a_{nn}Y_n = c_n,$$

де $a_{ik} = a_{ki}$.

Якщо замінити праві частини рівнянь $c_1, c_2, \ldots, c_n$ новими $c_1', c_2', \ldots, c_n'$, а корені нової системи позначити через $Y_1', Y_2', \ldots, Y_n'$, тоді завжди задовольнятиметься наступне співвідношення

$$Y_1 c_1' + Y_2 c_2' + \ldots + Y_n c_n' = Y_1' c_1 + Y_2' c_2 + \ldots + Y_n' c_n .$$

Принцип взаємності робіт є тільки частинною ілюстрацією цієї загальної алгебраїчної теореми, якщо під Y_i і Y_i' розуміти дві сукупності сил (або переміщень), а під c_i і c_i' - відповідні їм сумарні переміщення (або сили). Але для того, щоб скористатися таким методом міркувань, необхідно наперед довести взаємність коефіцієнтів, тобто довести теорему $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ або $r_{ik} = r_{ki}$.

Вже після того, як принцип взаємності став відомий і отримав застосування, з'явилася книга К.А. Кастільяно. Вона була опублікована італійською в 1875 р. і французькою в 1879 р. Проте його книга також присвячена загальним властивостям пружного тіла і подібно до названих робіт заснована на властивостях потенціальної енергії деформацій.

І.М. Рабінович [Рабинович, 1954, (том 2)] зазначає, що дивлячись з нашого історичного віддалення на ту епоху, не можна не дивуватись тій силі, з якою пробиваються до життя наукові ідеї, коли потреба в них цілком назріла. Ідея енергетичного методу вивчення пружного тіла, методу, який різноманітними способами використовує властивості роботи деформацій, - ось що об'єднує роботи усіх названих авторів, які незалежно один від одного в цю найважливішу для будівельної механіки епоху заклали основи сучасної теорії статично невизначуваних систем.

Що стосується принципу найменшої роботи, то він проголошувався як універсальний, всеосяжний закон природи П.Л. Мопертюї ще в XVIII ст., але не міг бути строго доведений. У XIX ст. (1858 р.) його висунув в більш обмеженому формулюванні Л.Ф. Менабреа, доведення якого було також недостатньо строгим. Кастільяно дав більш задовільне доведення, справедливе для лінійно деформівних систем.

У Росії енергетичні ідеї, що збагатили будівельну механіку, знайшли блискуче трактування в праці В.Л. Кирпичова «Лишние неизвестные в строительной механике», що вийшла в 1903 р. Всі твори В.Л. Кирпичова були неабиякими по ясності, наочності і в той же час загальності викладення. У названій праці він дав стислий, але вичерпний виклад суті принципу взаємності робіт, теорем про похідні потенціальної енергії і про мінімум роботи деформації. Застосування цих принципів він проілюстрував прикладами. Невелика за об'ємом, але багата за змістом праця В.Л. Кирпичова ввела російських інженерів в коло передових для тодішнього часу ідей будівельної механіки і суттєво вплинула на розвиток цієї науки в Росії.

У подальшому системне викладення цих принципів в курсі, призначеному для вищої школи, було дано в більш сучасному вигляді М.М. Філоненко-Бородичем [Филоненко-Бородич, 1932]. Однією з перших робіт, присвячених дослідженню властивостей потенціальної енергії, було дослідження П. Бехтєрєва, що вийшло в

1925 р. [Бехтерев, 1925] Грунтуючись на властивості потенціальної енергії завжди зберігати додатність, Бехтєрєв вивів ряд цікавих нерівностей між константами, які пов'язують напруження і деформації анізотропного пружного тіла. Деякі властивості потенціальної енергії, що мають значення для задач стійкості і динаміки споруд (наприклад, енергетичні властивості складених систем, що утворюються скріпленням двох основних систем), вказані Я.Л. Нудельманом [Нудельман , 1949]. Я.М. Ріппенбейн [Риппенбейн, 1927] розширив вираз роботи зовнішніх і внутрішніх сил, ввівши в розгляд новий вид навантажень: «пари *n-го* порядку», що мають розмірність $кг{\cdot}м^n$.

Принципу взаємності робіт О.А. Уманський [Уманский, 1935, стор. 39] дав формулювання, що випливає з розширеного уявлення про два «стани» системи: передбачається, що разом із зовнішніми силами задані певні кінцеві деформації. Наприклад, в деяких перерізах задані розриви в пружній лінії або в її похідній. При складанні виразу взаємної роботи кожна сила і місцева деформація одного стану множиться на відповідне переміщення або відповідну внутрішню силу іншого стану.

Теореми енергетичного характеру отримали відомий розвиток також в іншому напрямі: у розповсюдженні їх на тіло, що деформується нелінійно. Перша спроба в цьому напрямі була зроблена В.Е. Новодворським (1889-1933). Наступна значна робота належить М.І. Безухову.

Метод розв'язання статично невизначуваних задач, при якому за невідомі беруться зусилля в зайвих в'язях (метод сил), виник давно. В усякому разі в неявному вигляді він фігурував при розрахунку нерозрізних балок вже в 1808 р. Канонічні рівняння методу сил вперше в літературі були надані Дж.К. Максвеллом в 1864 р. Він вивів ці рівняння для статично невизначуваної ферми, користуючись принципом можливих переміщень і розглядаючи послідовно можливу роботу сил $X_1 = 1,\ X_2 = 1, \ldots$ на дійсних переміщеннях системи.

Подальший розвиток ці рівняння отримали в 70-х і 80-х роках XIX ст. в працях О. Мора і ряду інших авторів. У Росії ознайомленню широких інженерних кіл із загальною теорією розрахунку статично невизначуваних стержневих систем в кінці XIX і на початку XX сторіч, як зазначалось, багато сприяв своїм блискучим і часто оригінальним викладанням В.Л. Кирпичов.

Спеціальні прийоми методу сил, призначені для подолання труднощів розрахунку статично невизначуваних систем з великим числом невідомих, почали розроблятися досить давно. Першим результатом таких досліджень було виведення рівняння трьох моментів для нерозрізної балки.

Ідея перетворення на нуль коефіцієнтів деяких канонічних рівнянь за допомогою введення нескінченно жорстких стержнів і перенесення на них зайвих невідомих вперше знайшла своє застосування в 1881 р. (О. Мор), ідея використання групових невідомих з'явилася в 1892 р. (Г. Мюллер-Бреслау). Як найбільш просте групування спочатку застосовувалося поєднання зайвих невідомих в симетричні і зворотно симетричні групи, потім з'явилися складніші групи невідомих, утворені за принципом лінійного однорідного перетворення із застосуванням довільних коефіцієнтів.

У XX ст. розрахунок статично невизначуваних рам розроблявся багатьма авторами. Спочатку основна задача полягала в розрахунку рам з паралельними горизонтальними поясами і вертикальними стійками (безроскісні ферми, як їх тоді називали). Лише згодом, коли рамні каркаси різних видів почали широко застосовуватися в промисловому і цивільному будівництві, ця тема була розширена.

Одна з перших робіт належить професорові Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення Л.Ф. Ніколаї [Николаи, 1904]. Наступне вагоме дослідження належить Г.П. Передерію [Передерий, 1906]. Він вивів основні формули для рами, що має вид прямокутного замкнутого контуру, при різних співвідношеннях жорсткості стержнів і потім розповсюдив їх на багатоярусні безрозкісні однопанельні рами з паралельними поясами.

У 1909 р. вийшла оригінальна книга І.С. Подольського [Подольский, 1909], в якій було подано простий наближений розрахунок безрозкісних рам з паралельними і непаралельними поясами на нерухоме і рухоме навантаження.

У 1913 р. з’явилася праця М.С. Стрелецького, присвячена методам розрахунку таких самих рам з паралельними поясами і вузловим навантаженням.

В цей же час вийшла книга, що займає особливе місце в літературі, присвяченій теорії розрахунку статично невизначуваних стержневих систем, - книга В.В. Башинського [Башинский, 1913]. У ній розрахунок будь-якої рамної системи починається з того, що для кожного прямого стержня пишеться рівняння пружної лінії, як алгебраїчний багаточлен; степінь останнього на 4 одиниці вище за степінь кривої, що виражає інтенсивність навантаження. Коефіцієнти багаточленів визначаються потім з системи рівнянь, що виражають нерозривність деформацій в місцях перетину стержнів і умови закріплення на опорах. Книга В.В. Башинського мала корисний ідейний вплив на подальший розвиток теорії пружної лінії. Початком нового етапу в теорії рам можна вважати появу в 1921 р. книги М.С. Стрелецького, присвяченої розрахунку складних статично невизначуваних систем [Стрелецкий, 1921].

Перші ідеї методу переміщень зустрічаються в літературі лише як натяки, неясні ще самим авторам. Так, наприклад, Е. Вінклер в 1862 р. для розрахунку нерозрізної балки вивів формули, в яких згинальні моменти в стержні виражені як функції від кутів повороту його кінців і від повороту стержня, але він не дійшов до розуміння того, що цей метод можна узагальнити, і в подальшому викладенні він постарався звільнитися від цих змінних, виразивши їх через моменти. Ж.А.Ш. Бресс пішов дещо далі і в 1865 р. вивів для нерозрізної балки рівняння трьох кутів. Проте він тут же відмітив: «*нам здається зайвим розвивати далі ці міркування, практичне використання яких буде дуже обмеженим*». Як бачимо, він відмовився від розвитку ідей, які могли привести його до відкриття методу переміщень, і не помітив їх цінності.

Окрім зазначених робіт Е. Вінклера (1862) і Ж.А.Ш. Бресса (1865) слід згадати виконані раніше дослідження Д.І. Журавського [Бернштейн, 1967] з розрахунку ферм. Він вважав, що ділянка поясу ферми між двома «*перерізами розділу вантажів*» (за термінологією Д.І. Журавського) знаходяться у таких же самих умовах, як стержень, защемлений з обох нерухомих кінців, по довжині якого прикладені осьові сили. Ця задача, яка стала класичною, статично невизначувана і Д.І. Журавський розв’язує її за допомогою методу деформацій.

Михайло
Митрофа́нович
Філоне́нко-Бороди́ч
(1885 — 1962)
рос. Михаил
Митрофа́нович
Філоне́нко-Бороди́ч

Еміль Вінклер
(1835 - 1888)
нім. Emil Winkler

Жак Антуан
Шарль Бресс
(1822 – 1883)
фр. Jacques Antoine
Charles Bresse

Дмитро Іванович
Журавський
(1821 — 1891)
рос. Дмитрий
Иванович
Журавский

В узагальнюючій статті А.В. Перельмутера «К столетию метода перемещений» [Перельмутер, 2014] зазначено, що у другій половині 19-го століття метод сил визначав обличчя класичної будівельної механіки. Сьогодні цю роль виконує метод переміщень — один з найважливіших оплотів сучасної будівельної механіки, який лежить в основі практично всіх розрахункових програм для ЕОМ. Внутрішня структура цього методу виявилася ідеально відповідною для формалізованого підходу, орієнтованого для виконання на комп’ютерах. Метод переміщень для розрахунку рам розробив в 1914 р. данський інженер Аксель Бендінксен [Bendixsen, 1914].

Сім років потому професор Копенгагенського технічного університету Асгер Остенфельд представив рівняння для зсувів в тій же самій формі, що і рівняння для методу сил, які були тоді вже відомі. А. Остенфельд відмовився від кінематичного підходу А. Бендіксена і поклав в основу міркувань рівняння рівноваги вузлів, в які ввів реакції стержнів, що сходяться у вузлі, на одиничний поворот вузла. Заздалегідь вивчені реакції окремих стержневих елементів системи були, на думку А. Остенфельда, тими «цеглинами», які дозволяють не починати аналіз кожного разу із самого початку і, як ясно тепер, стали прообразами сучасних скінченних елементів. А. Остенфельд ввів сам термін «метод переміщень» і вказав на його формальну двоїстість з методом сил [Ostenfeld, 1921].

А в 1927 р. практично одночасно Людвіг Манн [Mann, 1927] і О.О. Гвоздьов [Гвоздев, 1927], виходячи з класичних рівнянь другого роду в аналітичній механіці Лаґранжа, надали методу переміщень остаточну форму, що збереглася до цього дня. Зокрема в книзі О.О. Гвоздьова дана чітка характеристика основної системи методу переміщень, викладені властивості коефіцієнтів системи канонічних рівнянь і угрупування невідомих.

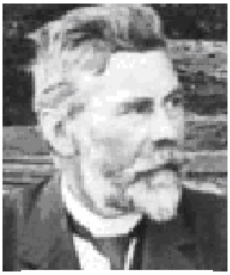
Фундаментальна робота А. Бендіксена базувалась на деяких попередніх роботах. Наприклад, А. Клебш у 1862 р. у своєму курсі теорії пружності, який містив у собі і теорію стержневих систем, писав: «*… будемо розглядати зміщення вузлів як заздалегідь відомі параметри, визначати від них пружні сили, з якими стержні реагують у своїх кутах, і нарешті, встановимо умови рівноваги для зовнішніх і пружних сил, які діють у вузлах; ці рівняння тоді дозволять обчислити зміщення*» [Clebsch, 1883].

Після робіт Л. Манна і О.О. Гвоздьова метод переміщень розвивався в наступних напрямках:

• був детальніше проаналізований зв’язок методу сил і методу переміщень, в 1934 р. Г. Крук [Kruck, 1934] запропонував варіант методу зі складною основною системою, коли в якості «будівельного матеріалу» використовувалися не окремі стержні, а стержневі підсистеми, тобто по суті, були закладені ідейні підвалини методу суперелементів;

• двоїста природа основних методів будівельної механіки вивчалася в роботах П. Пастернака [Pasternak, 1922] і А. Хертвіга [Hertwig, 1933], а А. Шлеуснер аналізував їх зв’язок з варіаційними підходами [Schleusner, 1933];

• Е. Флігель розширив область застосування методу переміщень на задачі стійкості [Fliegel, 1938], а В. Колоушек — на задачі динаміки [Kolousek, 1941].


Асгер Сковгаард Остенфельд *(1866-1931)*
дат. Asger Skovgaard Ostenfeld


Олексій Олексійович Гвоздьов *(1897–1986)*
рос. Алексей Алексеевич Гвоздёв


Людвіг Манн
(1871-1959)
нім. Ludwig Mann

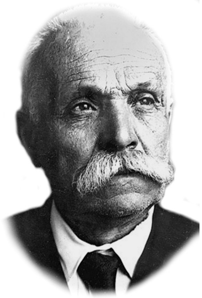

Август Хертвіг
(1872-1955)
нім. August Hertwig

Помітною віхою в розвитку методу переміщень стала робота Ю.М. Ріппенбейна [Риппенбейн, 1933]. Вочевидь, він перший застосував метод переміщень до просторових стержневих систем. Пізніше в монографії Д.В. Вайнберга і В.Г. Чудновського [Вайнберг, Чудновский, 1948] просторова задача методу переміщень була представлена в тензорній формі, яка пізніше була успішно використана в теорії пружності і в теорії оболонок і послужила одним з шляхів інтеграції будівельної механіки і теорії суцільних середовищ.

Наступним принциповим кроком в розвитку методу переміщень був перехід до матричного формулювання, розвинений в 50-х роках Дж. Аргіріс [Argyris, 1954, 1957], що по суті в подальшому зумовило перехід до методу скінченних елементів - безумовному переможцеві цієї історичної гонки.

Три найважливіші події наукової революції в будівельній механіці відбулися протягом XX ст. - матричне переформулювання алгебри обчислень в будівельній механіці [Argyris, 1954], винахід поняття «*скінченний елемент*» [Turner et al., 1956] і прямий метод жорсткостей, що представляє подальший розвиток методу переміщень [Turner, 1959]. Вони прорвалися через ланцюги класичних фундаментальних дисциплін технічних наук і радикальним способом змінили розрахункові технології у ряді нових галузей.

У Росії задачі про розрахунок ферми з жорсткими вузлами також привертали до себе увагу інженерів. Однією з перших робіт була книга Є.О. Патона [Патон, 1901], яка вийшла в 1901 р. У ній даний огляд всіх опублікованих до того часу способів розрахунку і за допомогою одного з них проведено широке дослідження, що мало на меті знайти відносний приріст напружень, що виникають у фермах завдяки жорсткості вузлів. Всі методи, наведені в книзі Є.О. Патона, є, по суті, різними варіантами методу переміщень.



Євген Оскарович Патон
(1870–1953)

Ісаак Мойсеєвич Рабінович
(1886–1977)
рос. Исаак Моисеевич Рабинович

Володимир Колоушек
(1909-1976)
чеш. Vladimir Koloušek

Давид Веніамінович Вайнберг
(1905–1973)

У 1907 р. Н.В. Некрасов опублікував книгу [Некрасов, 1907], в якій наведена схема точного розв’язання задачі, вільна від спрощуючих допущень, що приймалися його попередниками. Для розв’язку системи рівнянь з великою кількістю невідомих, яка неминуче виникає при такому розв’язанні, автор запропонував користуватися способом Ґаусса, який застосовується при урівноваженні помилок за методом найменших квадратів. У 1909 р. С.І. Белзецький [Белзецкий, 1909] запропонував більш просте, але наближене розв’язання задачі. Воно представлене в загальній формі, яка може бути використана для будь-якої ферми. Число невідомих кутів повороту у нього вийшло рівним k -2, де k - число вузлів ферми. Слід відмітити теоретичне і експериментальне дослідження К.М. Дубяги [Дубяга, 1914], який також дав критичний огляд російської і зарубіжної літератури.

В подальшому метод переміщень отримав всебічний розвиток. Були розвинені поняття про прості і групові реакції, спричинені пружними переміщеннями, температурою і навантаженням, і виведені формули для них; представлені в канонічній формі і в розгорнутому вигляді рівняння цього методу; розроблені способи спрощення рівнянь і використання симетрії. Розроблений комбінований спосіб розрахунку рам. О.О. Гвоздьов запропонував змішаний метод, що є синтезом методу сил і методу переміщень. Метод переміщень отримав закінчену форму класичного методу. У його розробці брали участь О.О. Гвоздьов, П.Л. Пастернак, В.Н. Жемочкін, М.І. Безухов, І.М. Рабінович, А.В. Рабцевич та інші.

7.3. Матричне формулювання. Аргіріс

Розробка методу переміщень та пов'язане з цим виявлення двоїстої природи теорії споруд забезпечило найпотужніше просування знань у цій фундаментальній будівельній теоретичній дисципліні під час її консолідації. Загальна теорема роботи (рівність робіт зовнішніх і внутрішніх сил), яку з успіхом застосовував О. Мор починаючи з 1874 р. для розкісних систем, має двоїсту структуру: принцип можливих змін напруженого стану (основа методу сил) і принцип можливих переміщень (основа методу переміщень, рис. 13.9) [Kurrer, 2008].

У теорії статично невизначуваних систем і практиці розрахунку конструкцій метод сил, що базується на принципі можливих змін напруженого стану, швидко став домінувати в прямій або опосередкованій формі теорем Кастільяно (друга теорема Кастільяно). Це було зумовлено загальною тенденцією до формалізації аналізу споруд, яка знайшла своє втілення у δ-символах. Хоча О. Мор і його студент Роберт Ланд визнавали фундаментальну роль принципу можливих переміщень, цей метод залишався на другому плані. Одна з причин полягала, звісно, в тому, що формулюванням на основі умов рівноваги надавали перевагу, як більш знайомим для інженерів. Тим не менш, δ – символи, близько зв'язані з методом сил, передбачили метод переміщень в формальних термінах і сприяли його висуненню на передній план.

Зауважимо, що метод переміщень, іноді згадується як рівняння пружності 2 типу. Л. Манн вперше використав принцип можливих переміщень для визначення зусиль у в'язях. Формальний розвиток методу переміщень йшов за методом сил. Двоїста природа стала очевидною вже в 1902 р., коли вийшла вже згадувана книга В.Л. Кирпичова «Лишние неизвестные в строительной механике». У ній В.Л. Кирпичов розвивав теоретичні основи як методу сил, так і методу переміщень. Друге видання цієї зовні невибагливої, але дуже змістовної роботи вийшло через 21 рік після смерті її автора.

На жаль, книга В.Л. Кирпичова так і не вийшла ані англійською, ані французькою, ані німецькою мовами. На заході вона була проігнорована внаслідок незнання російської мови. Тільки після запуску першого штучного супутника (1957) почалося поступове визнання на заході наукового прогресу, досягнутого в Росії. Одним із прикладів цього визнання було видання книги І.М. Рабіновича «Строительная механика в СССР 1917–1957» англійською в перекладі Дж. Херрманна. У цій роботі І.М. Рабінович окрім іншого робить огляд найважливіших публікацій по методу сил і методу переміщень, які з'явилися в

СРСР за 40 років. Видатною в цьому відношенні є монографія О.О. Гвоздьова, датована 1927 р., оскільки в ній вперше в російській технічній літературі був в повному обсязі представлений метод переміщень.

Рис. 7.4

До 1933 р. Я.М. Ріппенбейном була закладена основа тривимірного методу переміщень, який через три роки Б.М. Горбунов і Ю.В. Кротов представили за допомогою тензорної алгебри у формі «моторної символіки»[2,3] Ріхарда фон Мізеса[4].

---

[2] Слідуючи за поняттям «мотора», введеного Е. Штуді в 1903 р. математик Ріхард фон Мізес розвинув математичну допомогу механікам у формі «моторної символіки».

[3] Штуді, Едуард (1862–1930) – німецький математик, геометр. Приймав участь у розвитку символічних позначень у теорії інваріантів.

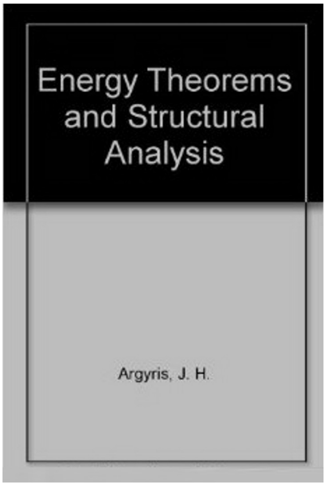
[4] Ріхард Е́длер фон Мі́зес (1883–1953) – математик і механік австрійського походження. Народився у м. Лемберг, Австро-Угорщина (тепер Львів, Україна). Основні роботи присвячені аеродинаміці, прикладній механіці, механіці рідин, аеронавтиці, статистиці і

Продовження формалізації методу переміщень було зроблене Д.В. Вайнбергом і В.Г. Чудновським. У монографії, яка вийшла в 1948 р., було представлено тривимірний метод переміщень в тензорній формі. У цій роботі відображена також важливість обчислювальних аспектів теорії розрахунку споруд.

У 1938 р. вийшла робота Арно Шлеуснера, в якій за допомогою апарату варіаційного числення ясно показана концептуальна розбіжність між принципом можливих змін напруженого стану і принципом можливих переміщень при малих переміщеннях.

Роботи Г. Пранге (1919 р.) завершили перше використання формалізованої теорії в усій будівельній механіці на основі варіаційного числення. Друге застосування формалізованої теорії у механіці споруд було досягнуте Дж.Х. Аргірісом на основі матричної алгебри. Обидві теорії мають двоїсту природу. МСЕ – це сплав будівельної механіки і обчислювальної математики при переході від фази інновації до фази розповсюдження у середині 1970-х рр.

Зміст почуття Йогана Вольфганга фон Гете (1749-1832), яке він відчував по відношенню до Іммануїла Канта (1721-1804) і яке описане у розмові з молодим Артуром Шопенгауером (1788-1860), може бути застосований до обох робіт: «*Коли я читав Канта, в мене було відчуття, наче я ступаю у виблискуючу кімнату*». Дж. Аргіріс був прочитаний, а Г. Пранге значною мірою ні. Набагато пізніше у 1942 р. А. Шлеуснер, Маргуер, Хамель, Граммель, Клоттер запропонували видати кваліфікаційну роботу Г. Пранге, але зробити це не вдалося. І тільки у 1999 р. ця робота, що містила спробу обґрунтувати теорію пружності за допомогою варіаційних методів, була видана.



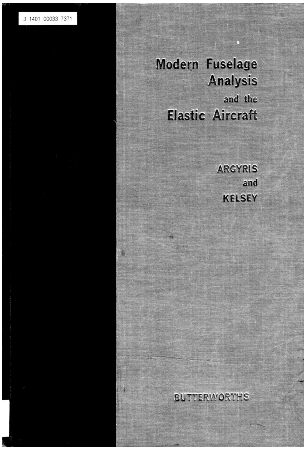
Дж. Аргіріс.
Енергетичні теореми і розрахунок конструкцій (1960)

Перші ідеї використання матриць в аналізі споруд були виражені Едуардом Штуді ще в 1903 р.

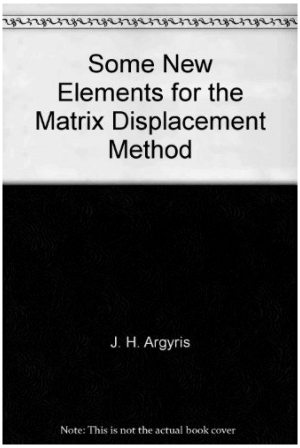
У 1957 р. Джон (Іоанніс) Хаджі Аргіріс представив матричне формулювання теорії статично невизначуваних систем і сформулював теорію розрахунку споруд в матричному вигляді. Описуючи спонукальні мотиви своєї роботи, Дж. Аргіріс відмічав, що жоден із звичайних статичних методів не може ефективно застосовуватися для визначення полів напружень і матриці податливості сильно статично невизначуваних систем сучасних авіаконструкцій. Подібні труднощі мають місце і в інших додатках статики. Корисними в деяких випадках можуть виявитися ітераційні методи, але в цілому вони занадто трудомісткі для розрахунку несучих авіаконструкцій мембранного і оболонкового типу. Здолати ці труднощі виявилося

теорії ймовірностей. Досліджував стійкість циліндричних оболонок, ввів «моторну символіку».

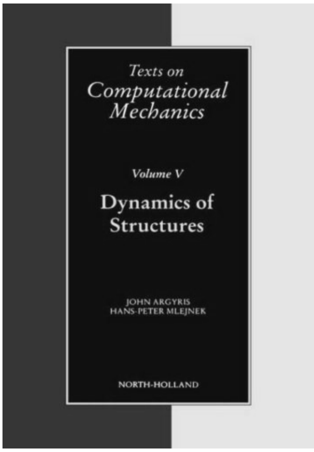
можливим за допомогою матричного формулювання статики, орієнтованого на використання електронно-цифрових обчислювальних машин.


Modern Fuselage Analysis and the Elastic Aircraft
ARGYRIS and KELSEY
BUTTERWORTHS

Сучасний розрахунок і пружність фюзеляжу літака. Дж. Аргіріс, С. Келсі (1963)


Some New Elements for the Matrix Displacement Method
J. H. Argyris
Note: This is not the actual book cover

Деякі нові елементи матричного методу переміщень. Дж. Аргіріс (1968)


Texts on Computational Mechanics
Volume V
Dynamics of Structures
JOHN ARGYRIS
HANS-PETER MLEJNEK
NORTH-HOLLAND

Динаміка конструкцій. Дж. Аргіріс, Х.-П. Млежнек (1991)

Матричне формулювання не лише дозволяє робити обчислення найбільш ясним способом, але є також ідеальною формою запису для цифрових комп'ютерів. Викладки матричної теорії настільки прозорі і зрозумілі, що нові, практично цінні співвідношення, котрі за звичайного запису були б неможливими і важко осяжними, тепер вдається отримати дуже легко.


Іоанніс (Джон) Хаджі Аргіріс *(1913–2004)* *грецьк. Ιωάννης Αργύρης*


Борис Миколайович Горбунов *(1901–1944)*

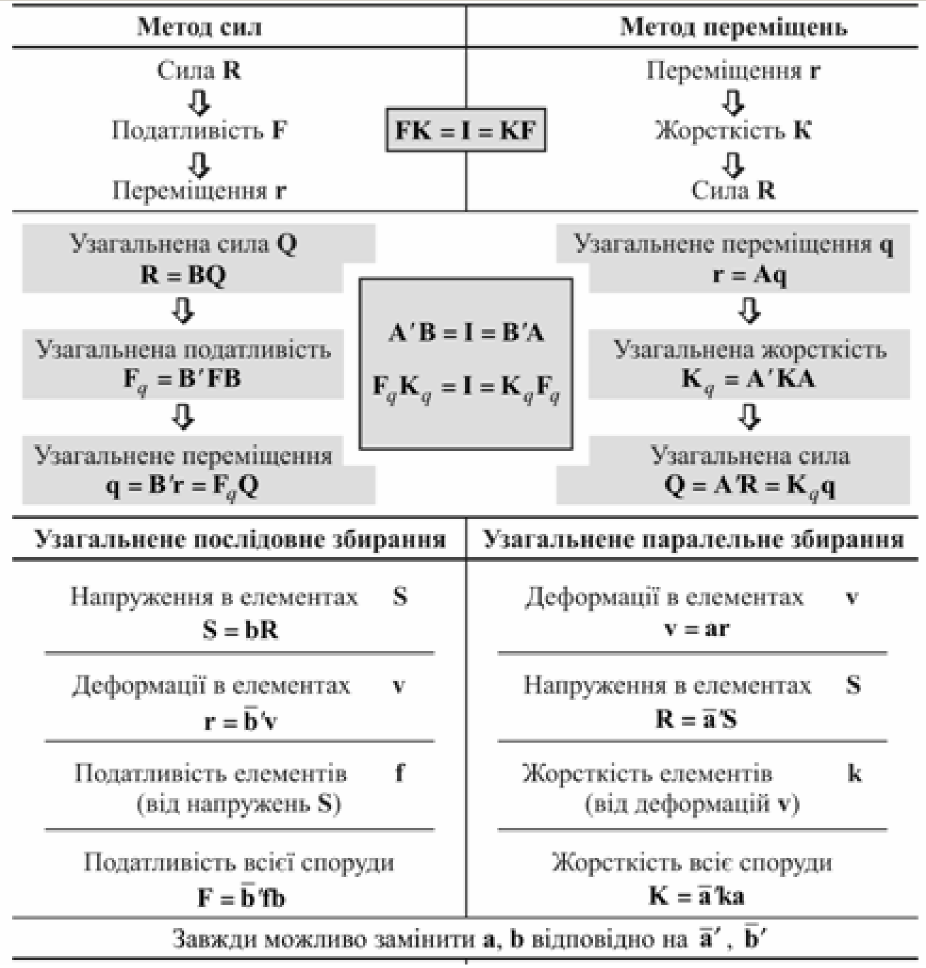

Ріхард Едлер фон Мізес *(1883–1953)* *нім. Richard Edler von Mises*


Едуард Штуді *(1862–1930)* *нім. Eduard Study*

Для розрахунку конструкції тепер необхідні лише три основні прості матриці плюс вектор-стовпець навантаження. Крім того, аналіз в матричній формі дозволяє також впоратися з нелінійно-пружними і динамічними задачами. Дж. Аргіріс сформував словник практичних термінів:

Метод сил	↔	*Метод переміщень*
Сили	↔	Переміщення
Напруження	↔	Деформації
Внутрішні сили	↔	Переміщення вузлів
Податливість = Переміщення: Сила	↔	Жорсткість = Сила: Переміщення
Метод одиничного навантаження	↔	Метод одиничного переміщення
Статично визначувана система	↔	Кінематично визначувана система
Статично невизначувана система	↔	Кінематично невизначувана система
Матриця податливості	↔	Матриця жорсткості
Узагальнені сили	↔	Узагальнені переміщення
…	↔	…

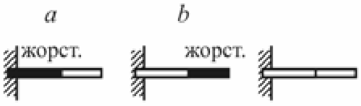
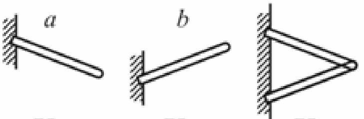
і показав в матричному формулюванні двоїсту природу теорії споруд:



Метод сил		**Метод переміщень**
Сила $\mathbf{R}$ ⇩ Податливість $\mathbf{F}$ ⇩ Переміщення $\mathbf{r}$	$\mathbf{FK} = \mathbf{I} = \mathbf{KF}$	Переміщення $\mathbf{r}$ ⇩ Жорсткість $\mathbf{K}$ ⇩ Сила $\mathbf{R}$
Узагальнена сила $\mathbf{Q}$ $\mathbf{R} = \mathbf{BQ}$ ⇩ Узагальнена податливість $\mathbf{F}_q = \mathbf{B}'\mathbf{FB}$ ⇩ Узагальнене переміщення $\mathbf{q} = \mathbf{B}'\mathbf{r} = \mathbf{F}_q\mathbf{Q}$	$\mathbf{A}'\mathbf{B} = \mathbf{I} = \mathbf{B}'\mathbf{A}$ $\mathbf{F}_q\mathbf{K}_q = \mathbf{I} = \mathbf{K}_q\mathbf{F}_q$	Узагальнене переміщення $\mathbf{q}$ $\mathbf{r} = \mathbf{Aq}$ ⇩ Узагальнена жорсткість $\mathbf{K}_q = \mathbf{A}'\mathbf{KA}$ ⇩ Узагальнена сила $\mathbf{Q} = \mathbf{A}'\mathbf{R} = \mathbf{K}_q\mathbf{q}$

Узагальнене послідовне збирання	**Узагальнене паралельне збирання**
Напруження в елементах $\mathbf{S}$ $\mathbf{S} = \mathbf{bR}$	Деформації в елементах $\mathbf{v}$ $\mathbf{v} = \mathbf{ar}$
Деформації в елементах $\mathbf{v}$ $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{b}}'\mathbf{v}$	Напруження в елементах $\mathbf{S}$ $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{a}}'\mathbf{S}$
Податливість елементів $\mathbf{f}$ (від напружень $\mathbf{S}$)	Жорсткість елементів $\mathbf{k}$ (від деформацій $\mathbf{v}$)
Податливість всієї споруди $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{b}}'\mathbf{fb}$	Жорсткість всіє споруди $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{a}}'\mathbf{ka}$

Завжди можливо замінити $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ відповідно на $\bar{\mathbf{a}}'$, $\bar{\mathbf{b}}'$

Додавання податливостей (Спеціальне послідовне збирання)	**Додавання жорсткостей** (Спеціальне паралельне збирання)
 $\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b = \mathbf{F}$	 $\mathbf{K}_a + \mathbf{K}_b = \mathbf{K}$

Дж. Аргіріс таким чином досяг успіху в перетворенні аналізу споруд у закінчену формалізовану теорію; він підвів підсумки серії своїх піонерних статей в 1960 р. в спільній з С. Келсі монографії «Енергетичні теореми і розрахунок конструкцій» [Argyris, Kelsey, 1960]. Описуючи історію створення методу скінченних елементів, Р.В. Клаф дуже справедливо оцінив цю монографію як найбільш важливу роботу, коли-небудь написану по теорії аналізу споруд (див. есе Дж. Аргіріса «Комп'ютер формує теорію» [Argyris, 1965]).

Література

Абовский Н.П., Андреев Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. - Красноярск, 1973. – 190 с.

Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М., 1978. – 287с.

Абрикосов А.А. Академик Л.Д. Ландау: краткая биография и обзор научных работ. — М.: Наука, 1965. — 46 с.

Александров А.В. Метод перемещений для расчета плитно-балочных конструкций // Труды МИИТ. 1963. вып. 174.

Александров А.В., Шапошников Н.Н. Об использовании дискретной модели при расчете пластинок с применением цифровых автоматических машин // Труды МИИТ. вып. 194. - М.: МИИТ, 1966.

Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭЦВМ. — М.: Стройиздат, 1976. —ч.1, 248 с., ч.2, 238 с.

Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М., 1990.

Александров А.М. Расчет пологих оболочек вращения методом прямых. // Строительная механика и расчет сооружений. №1.1968. - С. 11-14.

Баженов В.А., Гуляр А.И. Полуаналитический метод конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды. - Успехи механики. В 6 томах // Под ред.. А.Н. Гузя, т. 4, 2008. - С.221-257.

Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання. – К.: Віпол, 2013. – 895 с.

Баженов В.А. Варіаційні основи будівельної механіки. Підручник. - К.: Каравела, 2014. – 877 с.

Баженов В.А. Варіаційні принципи будівельної механіки. Історія становлення та розвитку / В.А. Баженов, В.О. Геращенко, М.В. Гончаренко; під загал. ред. проф. В.А. Баженова. - К.: Каравела, 2015. – 762 с.

Башинский Н.Н. Новый метод расчета балок и жестких рамных систем. - Киев, 1913; 2-е изд., М., 1930.

Белзецкий С.И. Теория ферм, Известия С.-Петербургского политехнического института, т. XI и XII. 1909.

Вайнберг Д.В., Чудновский В.Г. Пространственные рамные каркасы инженерных сооружений — К.: Гостехиздат Украины, 1948.

Вайнберг Д.В., Сахаров А.С. Киричевский В.В. Вывод матрицы жёсткостных характеристик дискретного элемента произвольной формы // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1971. Вып. 14. - С. 37 - 44.

Гвоздев А.А. Общий метод расчета статически неопределимых систем. Теория и примеры ее применения к расчету рамных конструкций — М.: МИИТ, 1927.

Дубяга К.М. Расчеты и испытания раскосных ферм с жесткими соединениями в узлах. - Сп.-б., 1914.

Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Мир, 1981. – 383 с.

Евграфов Г.К. Журавский Дмитрий Иванович (1821-1891) // Ученые и изобретатели железнодорожного транспорта. — М.: Государственное транспортное железнодорожное издательство. Сборник статей, 1956. — С. 51 — 60.

Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. - 541 с.

Кирпичев В.Л. Лишние неизвестные в строительной механике. Расчет статически неопределимых систем. К.: Изд-во Кульженка, 1903.

Кирпичев В.Л. Собрание сочинений. Т. 1. Петроград, ППИ, 1917.

Кирпичев В.Л. Основания графической статики. — М.: ГТТИ, 1933. — 227 с.

Кирпичев В.Л. Лишние неизвестные в строительной механике. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 140 с.

Кирпичев В.Л. Лишние неизвестные в строительной механике: расчет статически-неопределимых систем. – Москва, 1934.

Кирпичев В.Л. Беседы о механике. М.- Л.: ГИТТЛ, 1951, 360 с.

Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. − М.: Стройиздат, 1979. - 320 с.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.

Кудрявцев П.С. Курс истории физики. — М.: Просвещение, 1974.

Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966.– 432 с.

Національна. Академія наук України. – К.: "Фенікс", 1998.

Некрасов Н.В. К теории ферм с жесткими соединениями в узлах. - Сп.-б., 1907.

Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 365 с.

Николаи Л.Ф. Определение усилий в безраскосных балочных фермах с жесткими узлами, Журнал Министерства путей сообщении, книги 2 и 3. 1904.

Нудельман Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, 1949.

Папкович П.Ф. Теория упругости. – Л.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.

Патон Е.О. Расчет сквозных ферм с жесткими узлами. - М. 1901. – 159 с.

Патон Е.О. Воспоминания. – К.: Гослитиздат Украины, 1955. - 324 с.

Патон Е.О. Воспоминания. — Киев: Державне видавництво художньоі литератури, 1956. — 320 с.

Передерий Г.П. К теории безраскосных ферм. - М. 1906.

Перельмутер А.В. Жили-были.— К.: Изд-во «Сталь», 2002.— 188 с. [2-е изд. исправленное и дополненное — К.: Изд-во «Сталь», 2004.— 192 с.]

Перельмутер А.В. Очерки по истории металлических конструкций.— М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2011.— 184 с.

Перельмутер А.В. Управление поведением несущих конструкций. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2011. – 325 с.

Перельмутер А.В. К столетию метода перемещений. - International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 10(4) 18-21 (2014).

Писаренко Г.С. Бібліографія вчених Української РСР. – К.: Наукова думка, 1990.

Писаренко Г.С. Степан Прокопович Тимошенко. - М.: Наука, 1991. - 239 с.

Подольский И.С. Безраскосные фермы. Их расчет и применение к металлическим и железобетонным конструкциям. - М.: Изд. инженер. путей сообщения, 1909. - 270 с.

Рабинович И.М. Методы расчета рам, ч. 1, 1934.

Рабинович И.М. Курс строительной механики стержневых систем. Т.1. Статически определимые системы, 1950. - 387 с. Т. 2. Статически неопределимые системы, 1954. - 544 с. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре.

Рабинович И.М. Воспоминания 1904-1974. - М.: Наука, 1984. — 158 с.

Ржаницын А.Р. Представление сплошного изотропного упругого тела в виде шарнирно-стержневой системы // Исследования но строительной механике и теории пластичности —М.: Госстройиздат. 1956—С. 19-24.

Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.

Риппенбейн Я.М. Обобщение понятия нагрузка и вытекающий из этого обобщения новый метод расчета статически неопределимых систем, Труды Московского института инженеров транспорта, вып. 111, 1927.

Риппенбейн Ю.М. К расчету плоских и пространственных статически неопределимых систем // Рамы и фермы, пространственные и плоские — М.: Гос-стройиздат. 1933.

Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – С.-Петербург: изд. СПбГТУ, 1998. –530 с.

Рэнкин У.Д.М. Руководство для инженеров-строителей. — СПб.: 1870.

С.П. Тимошенко – механік XX століття. Матеріали наукових читань з циклу: «Видатні конструктори України». – К.: ЕКМО, 2004. – 86 с.

Светлицкий В.А. Механика стержней. — М.: Высшая школа, 1987. — Ч. 1. Статика. — 320 с. Ч. 2. Динамика. — 304 с.

Справочник по теории упругости // Под ред. П.М. Варвака и А.Ф. Рябова. – К., 1971. – 418 с.

Стрелецкий Н.С. К расчету сложных статически неопределимых систем. - М., 1921

Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащенников, Н.Н. Шапошников. — М.: Стройиздат, 1984. — 415 с.

Строительная механика. Стержневые системы / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащенников. Н.Н. Шапошников. — М.: Стройиздат, 1981. — 512 с.

Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем (перевод с английского). – М.-Л.: ОГИЗ, 1946. – 532 с.

Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки (перевод с английского). – М.: Гостехиздат, 1948.

Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. - М.: Гостеориздат, 1957. - 536 с.

Тимошенко С.П. Курс сопротивления материалов. — Киев: Изд-во кн. маг. Л. Идзиковского, 1912. — 519 с.

Тимошенко С.П. Воспоминания. Издание объединения С.-Петербургских политехников. E.A. Vetehorine 15, Boulevard Anatole — Paris, France, 1963.

Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. — М.: Наука, 1975. — 704 с.

Тимошенко С.П. Статические и динамические проблемы теории упругости. – К.: Наукова думка, 1975. – 561 с.

Тимошенко С.П. Теория висячих мостов. // С. П. Тимошенко. Статические и динамические проблемы теории упругости. — Киев: Наукова думка, 1975. — С. 418 — 447.

Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. — М.: Мир, 1976. — 669 с.

Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. – 560 с.

Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.

Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975, — 172 с.

Филин А.П. Очерки об ученых-механиках. М.: Изд. дом «Стратегия», 2007. – 784 с.

Шапошников Н.Н. Строительная механика и ее роль в современных расчетах зданий и сооружений. // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Исследования по теории сооружений: сб. статей. Вып. 1 (XXVI). 2009 — С. 216-222.

Argyris J.H. Die Matrizentheorie der Statik. // Ingenieur-Archiv, 1957, vol. 25, —P. 174-192.

Argyris J.H., Kelsey S. Energy theorems and structural analysis, 1960, Butterworth, London. – 86 p.

Argyris J.H. Energy Theorems and Structural Analysis. // Aircraft Engineering. Published in a series of articles in Okt, Nov. 1954, Vol. 26 and Feb., March, Apr., May 1955, Vol. 27. [Русск. перевод: Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций // Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем — Л.: Судпромгиз, 1961. — С. 37-293.]

Argyris J.H., Kelsey S. Modern Fuselage Analysis and the Elastic Aircraft, Basic Theory. – London, 1963. - 176 s.

Argyris J.H. Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method // J. Royal Aero. Sci. Tech. 1965. Note 69. — P. 711 —713.

Argyris J.H. The computer shapes the theory // Journal of the Aeronautical Society, Band 65, 1965, S. XXXII

Argyris J.H. Some New Elements for the Matrix Displacement Method. – PN, 1968.

Argyris J.H. ASKA—Automatic system for kinematic analysis // Nucl. Eng. Design. 1969. Vol. 10. P. 441-455.

Argyris J.H., Mlejnek H.-P. Dynamics of Structures (Texts on Computational Mechanics, Book 5). - North Holland; 1 edition, 1991. – 606 p.

Appell P. Traité de Mécanique, III. – 1900.

Bendixsen A. Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rah-menkon-struktionen. — Berlin:Verlag von Julius Springer, 1914.

Cheung Y.K. Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs // J of Eng Mech. ASCE. 1968. Vol. 94, No. 6.-P. 1365-1378.

Cheung Y.K. Finite Strip Analysis of Bridges—Spon E&I'N. 1996. - 347 p.

Ciarlet P.G. Conforming and nonconforming finite clement methods for solving the plate problem // Conference on the Numerical Solution of Differential Equations – Berlin: Springer. 1974 – P. 21-31.

Clough R.W. Stress analysis of a gravity dam by the finite element method // Proceedings of the Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon. Portugal, 1962 (see also RILEM Bull. No. 19: June 1963).

Clough R.W. The Finite Element Method in Structural Mechanics. Philosophy of the Finite Element Procedure. In: Stress Analysis. Ed. O.C. Zienkiewicz & G.S. Holister. - New York: John Wiley & Sons, 1965.

Clough R.W. The Finite Element Methods in Plane Stress Analysis // Proceedings of 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburg, 1960. [Русск. перевод: Клаф Р.У. Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости // Расчет строительных конструкций с применением электронных машин — М.: Стройиздат, 1967 — С. 142-170].

Clough R.W., Wilson E.L. Early finite element research at Berkelay // Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics. Aug. 4-6. 1999.

Clough R.W. Early history of the finite element method from the viewpoint of a pioneer. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, pp. 283–287. 2004.

Engesser F. Uber die Durchbiegung von Fachwerktragern und die hierbei auftreten-den zusatzlichen Spannungen // Zeitschrift fur Baukunde, 1879, vol. 2. — P. 590-602.

Engesser F. Ueber Knickfestigkeit gerader Staebe // Zeitschrift des Architekten und Ingeniuer Verein zu Hannover. 1889. — Bd. 35 — S. 456 — 468.

Engesser F. Ueber Knick Flagen // Schweizerishe Bauzeitung. — 1895. — Bd.26. — S. 24.

Kirchhoff G.R. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // Crelle Journal fur die reine und angewandte Mathematik. — 1850. — Bd. 40. — S. 51 — 88.

Kirchhoff G.R. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Staben // Crelle Journal fuer die reine und angewandte Mathematik. - 1858. - Bd. 56. - S. 285-313.

Kirchhoff G.R. Vorlesungen ueber Mathematisch Physik. V. I, II, III, IV. — Leipzig: Verlag von B. G. Teubner. – 1874-1894.

Kirsch E.G. Die Fundamentalgleichungen der Theorie der Elasticitat fester Korper. hergclcitct aus der Betrachtung eines Systems von Punkten. welche durch elastische Streben verbunden sind. // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. 1868. Vol. 12, No. 8 (S. 481-488). No. 9 (S. 553-570), No. 10 (S. 631- 638).

Koiter W.T. General theorems for elastic plastic solids // Progress in solid Mechanics. 2. North–Holland, P. C.– 1960.– P. 165–221.

Kolousek V. Anwendung des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen und des Rezip-rozitatssatzes in der Stabwerksdynamik. // Ingenieur-Archiv. 1941. vol. 12,—P. 363— 370.

Kruck G.E. Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter, biegungsfester Trag-werke. Dissertation, Zurich ET1I, 1934.

Kurrer K.-E. The History of the Theory of Structures. – Berlin: Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2008. – 848 p.

Ostenfeld A. Berechnung statisch unbe-stim-mter Systeme mittels der "Deformations-methode // Der Eisenbau, 1921, vol. 12, No. 11 - P. 275-289.

Pasternak P. Beitrage zur Berechnung vielfach statisch unbestimmter Stabsystc-me. // Der Eisenbau, 1922, vol. 13, No. II. — P. 239-254.

Perelmuter A.V., Slivker V.I. Numerical Structural Analysis: Models: Methods and Pitfalls.– Bejlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo: Springer Verlag, 2003.– 600 p.

Schwedler J.W. Theorie der Brueckenbalkensysteme // Zeitschrift. Bauwesen. – Berlin: – 1851. – T. 1.

Signorini A. Questioni di elasticiti non linearizzata o semilinearizzata // Rend. di Matem. e. delle sue appl.– 1959.– P. 17–31.

Stüssi F. Über die Entwicklung der Wissenschaft im Brückenbau. In: Neujahrsblatt, ed. Naturforschende Gesellschaft in Zurich, 1839. 1964.

Timoshenko S.P. History of strength of materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. - New York: McGraw-Hill, 1953. – 452 p.

Timoshenko S.P. History of the development of strength of materials in Russia // Problemi attuali di scienz e di culdura. Rome, 1953, Quaderno, № 29, - 8 p.

Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures//J. Aero. Sci. 1956. Vol. 23. No. 9. —P. 805-824.

Turner M.J. The direct stiffness method of structural analysis. // Structural & Materials Panel Paper, AGARD Meeting, Aachen. 1959.

Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. - Pergamon Press, U.S.A., 1975.

Wilson E.L. Matrix Analysis of Nonlinear Structures // Proc. 2nd ASCE Conf. On Electronic Computation, Pittsburg, Pa. Sept. 1960.

Wilson E.L. Automation of the finite element method, a personal historical view. // Finite Elements in Analysis and Design, vol. 13. — Amsterdam: Elsevier, 1993. — P. 91-104.

Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K. The Finite Element Method in Engineering Science — London: McGraw-Hill, 1967. 272 p. [Русск. перевод: Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред - М.: Недра, 1974. - 240 с.]

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 1. The Basis. - Oxford: Butterworth-Heineann; 5 edition, 2000. - 689 p.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 2. Solid Mechanics. The Basis. - Oxford: Butterworth-Heineann; 5 edition, 2000. - 457 p.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 3. Fluid Dynamics. The Basis. - Oxford: Butterworth-Heineann; 5 edition, 2000. - 334 p.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. - Butterworth-Heineann; 6 edition, 2005. - 736 p.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P. The Finite Element Method for Fluid Dynamics. - Butterworth-Heinemann; 6 edition, 2005. – 400 p.

Нарис 8

ШТРИХИ ІСТОРІЇ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Divide et impera (розділяй і володарюй).

Людовік XI

Ця проста думка, поділити тіло і керувати його окремими частинами, виявилася дуже плідною, вона випередила за ефективністю багато глибоких і тонких думок, просто скасувала низку раніш визнаних методів та поховала для практики деякі теоретично гарні побудови аналітиків.

М.І. Рейтман

Сучасному інженерові важко собі уявити розрахунок навіть не дуже складної конструктивної системи без використання комп'ютерної програми, переважна більшість з яких заснована на методі скінченних елементів (МСЕ). Дивно, але зародження цього методу відбулося відносно недавно, і його розвиток зайняв не більше трьох десятиліть. За цей час МСЕ ступив далеко за межі своєї колиски (будівельної механіки), і предметом його застосування стала майже вся сфера наукових і технічних проблем, які описуються рівняннями в частинних похідних.

Відбувалося це паралельно з розвитком обчислювальної техніки, супроводжувалося науковими дискусіями, конкурентною боротьбою розробників, неминучими помилками і несподіваними знахідками. Деяким елементам історії становлення та розвитку МСЕ в рамках задач будівельної механіки присвячений цей нарис.

8.1. Передісторія

Метод скінченних елементів, безумовний фаворит будівельної механіки нашого часу, з'явився в середині 20-го століття і був законним спадкоємцем ряду більш ранніх ідей, що народилися в надрах класичної будівельної механіки – ідей фундаментального порядку типу варіаційних принципів і ідей чисто технологічних, викликаних до життя інженерною практикою. Вони виступили в ролі попередників (може, варто було б сказати – провісників) деяких істотних рис методу скінченних елементів.

8.1.1. Фізична дискретизація

Перехід від континуальної розрахункової моделі до деякого близького до неї дискретного аналогу (або до континуальної схеми меншої розмірності) є давньою традицією в механіці деформівного твердого тіла. Досить згадати, наприклад, що ще Ейлер зіставляв мембрану із сукупністю систем струн, натягнутих в двох взаємно перпендикулярних напрямках [Euler, 1789].

У 1868 р. Густаву Кіршу вдалося отримати основні рівняння для однорідного, ізотропного і лінійно-пружного тіла зі стержневої моделі. Кірш розглядає систему точок, "з'єднаних пружними в'язями", щоб дослідити питання, "чи можливо сформувати пружну систему точок, що мають характер ізотропного середовища, якщо число точок буде нескінченним" [Kirsch, 1868]. Замість того, щоб отримати умови рівноваги для нескінченно малого куба, вирізаного з континууму, Кірш пропонує лінійно-пружну просторову ферму, що складається з 12 стержнів периметра, чотирьох діагональних стержнів і восьми сферичних шарнірів (рис. 8.1).

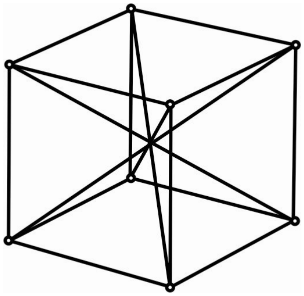


Рис. 8.1. Модель Кірша

При цьому Кірш вважає, що дві пружні константи Ламе

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E\nu}{2(1+\nu)}$$

дорівнюють одна одній, що відповідає значенню коефіцієнта Пуассона ν=0,25.

Через тридцять дев'ять років в 1927 році В. Рідель [Riedel, 1927] повернувся до зворотної операції дискретизації двовимірного пружного континууму при розрахунку напруженого стану пружного диска, завантаженого двома сімействами абсолютно жорстких штоків, за допомогою еквівалентної ферми, заснованої на квадратних стержневих ячейках. Рис. 8.2 показує недеформований стан (пунктири) еквівалентної ферми і її деформоване заключне положення при стисненні, викликаному зближенням верхніх та нижніх штоків.

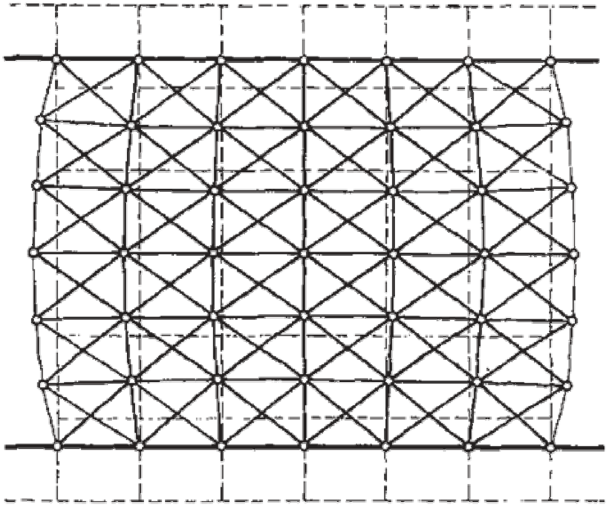


Рис. 8.2. Схема Рiделя

Але в якості загального робочого розрахункового прийому ця ідея була запропонована лише в 1941 році О. Хренніковим [Hrennikoff, 1941]. Він обчислював величини поперечних перерізів елементів ферми з умови, що вузлові переміщення розкісної моделі з тотожною границею збігаються з переміщеннями кутових точок замінюваного суцільного об'єкта.

Хренніков виконав такі розрахунки для наступних стержневих ячейок: кубоїда, рівностороннього трикутника, прямокутника і квадрата. Він досліджував, наприклад, пружні пластини за допомогою квадратної стержневі ячейки. Більш того, він моделював пружну пластину як балочну мережу. О.Хренніков таким чином закінчив перехід моделювання в аналізі споруд від плоскої пластини і оболонкових структур через розкісні рамні системи до ферм.

Пізніше О. Хренніков також використовував решітковий метод для лінійного аналізу втрати стійкості прямокутних плит і розробив трапецієподібні стержневі ячейки для розрахунку пружних пластин.

Міркування О. Хреннікова зводилося до наступного: якщо для стержневої системи скласти скінченнорізницеві рівняння і шляхом граничного переходу, пов'язаного із спрямовуванням до нуля розміру характерної ячейки, отримати диференціальні рівняння, що збігаються з відомими диференціальними рівняннями, які описують поведінку континуальної системи, то взята за основу стержнева модель може служити наближеною моделлю задачі і при скінченних розмірах ячейки.

Подібні міркування використовувалися в інших роботах. Були сконструйовані різні моделі регулярних стержневих решіток, що моделюють поведінку пружного суцільного середовища. Наприклад, в роботі О.Р. Ржаніцина [Ржаницын, 1956] досліджується два варіанти просторових ферм, які можуть розглядатися як дискретні аналоги ізотропного пружного тіла.

Олександр Павлович Хренніков *(1896-1984) англ. Aleksandr Pavlovich Hrennikoff (Khrennikov)*

У першому варіанті решітка просторової ферми є кубом з діагоналями граней, але без діагоналей куба, у другому варіанті присутні і діагоналі куба.

Для плоскої задачі використовується стержнева апроксимація, показана на рис. 8.3,*а*. Порівнюючи рівняння рівноваги, що виникають при заданому подовженні (рис. 8.3,*б*) і зсуві (рис. 8.3,*в*) з відповідними рівняннями теорії пружності, О.Р. Ржаніцин отримав зв'язок між параметрами дискретної моделі і пружними константами ізотропного пружного тіла в формі:

$$E=\frac{E_1F_1}{a}\cdot\frac{2\eta+\sqrt{2}}{\eta+\sqrt{2}},\quad \nu=\frac{\eta}{\eta+\sqrt{2}},\quad \eta=\frac{E_2F_2}{E_1F_1}.$$

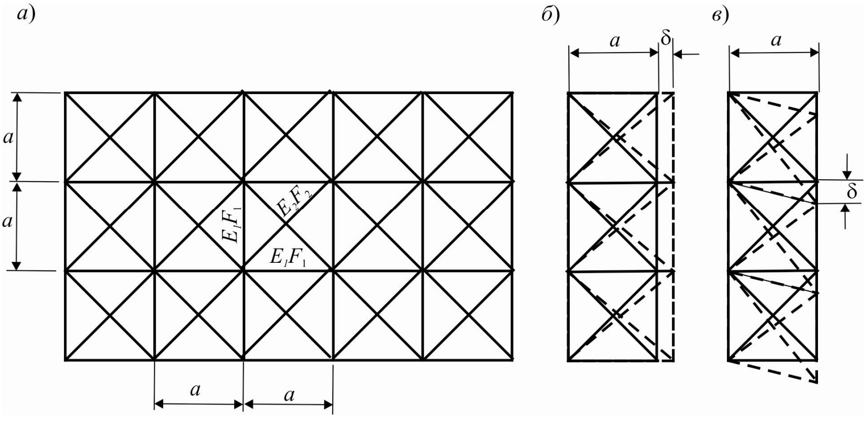


Рис. 8.3. Модель О.Р. Ржаніцина

Інший підхід використовували автори робіт [Длугач, 1956], [Музыченко, 1961], які обґрунтовували дискретну модель збігом її рівнянь рівноваги із скінченнорізницевими поданнями диференціальних рівнянь суцільного середовища.

Так, для бігармонічного рівняння плоскої задачі, записаного через функцію Ері $\varphi(x, y)$, при використанні решітки, яка показана на рис. 8.4,*а*, типове різницеве рівняння виглядає наступним чином:

$$20\varphi_{0,0} - 8(\varphi_{1,0}+\varphi_{-1,0}+\varphi_{0,1}+\varphi_{0,-1}) + 2(\varphi_{1,1}+\varphi_{-1,1}+\varphi_{1,-1}+\varphi_{-1,-1}) + \varphi_{2,0}+\varphi_{-2,0}+\varphi_{0,2}+\varphi_{0,-2} = 0.$$

Це рівняння можна трактувати як канонічне рівняння методу сил, складене для статично невизначуваної ферми, структура якої приведена на рис. 8.4,*б*, якщо кут α=0, горизонтальні і вертикальні елементи мають площу *F,* елементи під кутом α мають площу 2*F*, а елементи орієнтовані уздовж діагоналей – площу $2F\sqrt{2}$.

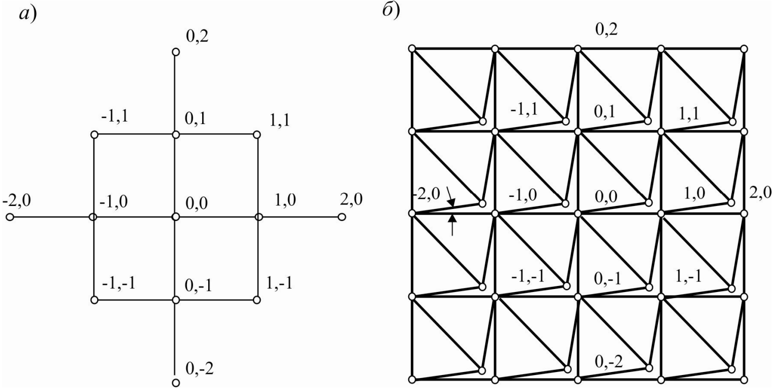


Рис. 8.4. Моделювання скінченнорізницевого рівняння

У зазначених роботах повторювані ячейки є прообразом скінченних елементів і відрізняються від них лише тим, що такі ячейки засновані на дискретному елементі (стержні), тоді як всі конструктивні моделі в МСЕ засновані на континуальних скінченних елементах.

8.1.2. Метод переміщень

Альфред Клебш
(1833-1872)
нім. Alfred Clebsch

Мабуть, першим, хто послідовно використовував переміщення в якості основних невідомих задачі і побудував на цьому принципі курс теорії пружності, був А. Клебш. У 1862 році він опублікував підручник теорії пружності [Clebsch, 1862], в якому застосував рівняння в переміщеннях не тільки до континуальних задач, але і до пружних розкісних систем. Клебш описує основну ідею методу переміщень, що полягає в обчисленнях переміщень вузлів в пружних розкісних системах наступним чином:

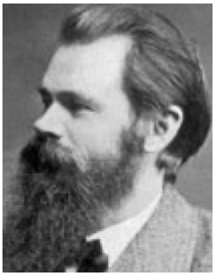
“Загальний принцип полягає тут в тому, що потрібне буде трактувати переміщення вузлів спочатку як відомі параметри, щоб визначити через них пружні сили, з якими стержні діють

на свої вузли, і, нарешті, щоб установити умови рівноваги для зовнішніх і пружних сил, що діють у вузлах, тоді ці рівняння дозволять обчислити переміщення” [Clebsch, 1862, p. 413].

Але метод переміщень для аналізу пружних розкісних систем в формулюванні Клебша не був прийнятий інженерами, оскільки в той час теорія розкісних систем приділяла більше уваги зусиллям в елементах, ніж вузловим переміщенням, а для статично визначуваних шарнірних ферм було набагато легше отримати розв’язок, використовуючи методи графічного аналізу.

Елементи ферми, що сходяться в клепаних з'єднаннях, не тільки піддаються осьовим силам розтягу-стиску, але також і згинальним моментам; останні викликають додаткові напруження згину. Визначення величин додаткових напружень пов'язане з досить громіздкими обчисленнями, тому що конструктивні системи розкісних споруд з жорсткими вузлами мають високу ступінь статичної невизначуваності.

У 1878 р. Генріх Мандерла, представив розв’язок задачі про напруження, які виникають в елементах балочної ферми в результаті викликаних навантаженнями зміни кутів в з'єднаннях ферми. Розв’язання Мандерли [Manderla, 1880] дозволило обчислити додаткові напруження в простих фермах з жорсткими вузлами на основі теорії другого порядку. По суті, після того, як Клебш першим ввів невідомі параметри переміщень в математичну теорію пружності для розрахунку наскрізних систем в 1862 р, Мандерла зробив те ж саме в 1879 році в теорії споруд.



Еміль Вінклер
(1835-1888)
нім. Emil Winkler

Хрістіан Отто Мор
(1835-1918)
нім. Christian Otto Mohr

Дотримуючись ходу думок Мандерли, Е.Вінклер вводить зміну кутів нахилу кінцевих дотичних до поясів в вузлах, що призводить до k лінійних рівнянь для k вузлів з k моментних умов рівноваги [Winkler, 1881]. На відміну від Мандерли Е.Вінклер використовує теорію першого порядку для моментів в елементах. Заключний шматочок в складену картинку теорії додаткових напружень вставив Отто Мор в 1892/93 р. у своїй роботі [Mohr, 1892, 1893].

Вирішальний внесок Мора полягав у ясному поділі кутів повороту вузлів φ і кутів перекосу елементів ψ для однозначного визначення деформованого стану наскрізних споруд з жорсткими вузлами.

У 1914 датський інженер Аксель Бендиксен поширив підхід Мора на закріплені і гнучкі рами [Bendixsen, 1914]. Для закріплених рам в припущенні відсутності переміщень вузлів Бендінксен використовує добре відомий вираз для згинального моменту M_{mn}, який діє на кінець m стержня mn

$$M_{mn} = \frac{2EI_{mn}}{l_{mn}}\left(2\varphi_{mn} + \varphi_{nm}\right) + M_{mn}^{0},$$

де $\varphi_{mn}, \varphi_{nm}$ - кути повороту кінців стержня, а M^0_{mn} - момент від місцевого навантаження, що діє на стержень.

Для незакріплених рам Бендіксена вводить повністю нову другу стадію розрахунку, яка використовує стани одиничних переміщень. Бендіксен потім визначає кути перекосу елемента, що спричинені переміщеннями w_m і w_n його кінців, і підставляє ці величини в кінематичні рівняння. Результуючі кути повороту вузлів і кути перекосу елементів використовуються, щоб обчислити реакції за допомогою умов рівноваги вузлів.

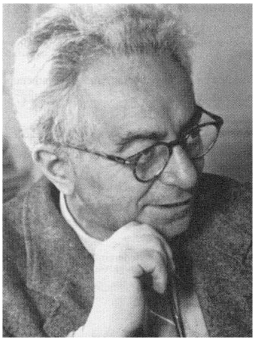
Асгер Остенфельд
(1866-1935)
дат. Asger Ostenfeld

В районі 1920 р. Асгер Остенфельд розвивав метод переміщень Бендіксена. У методі переміщень Остенфельда усунені неузгодженості, властиві підходу Бендиксена, тобто, такі як роздільне визначення кутів повороту вузлів та елементів і двоступеневе визначення величин кутів повороту вузлів і кутів перекосу елементів.

Значний прогрес методу переміщень Остенфельда [Ostenfeld, 1921] полягає в тому, що в основній системі методу переміщень він вводить у вузлах закріплення як за напрямком лінійних переміщень, так і за напрямком кутів повороту. Це дозволяє розділити цілу споруду на скінченні елементи. "*Тому можна очікувати*," робить висновок Остенфельд, "*що цей метод дозволить без зусиль обробляти навіть досить складні системи, тому що, на відміну від методу сил, тут не потрібно починати кожного разу з нуля*" [Ostenfeld, 1921].

8.1.3. Використання локалізованих функцій

Дискретне подання розрахункової схеми у вигляді стержневої системи було дуже наочним прийомом, і саме своєю наочністю воно приваблювало інженерів. Але в 1943 році видатний математик Ріхард Курант продемонстрував принципово інший прийом дискретизації задачі [Courant, 1943].



Ріхард Курант
(1888-1972)
нім. Richard Courant

Розв’язуючи задачу про кручення полого стержня коробчастого перерізу, Р. Курант вніс у класичний метод Релея-Рітца ідею використання розкладання по системі функцій, кожна з яких визначена в локальній області (рис. 8.5).

Цей прийом, який передбачив багато в чому підхід методу скінченних елементів, міг би змінити історію МСЕ, але ідея Куранта не зацікавила дослідників, оскільки її реалізація вимагала небувалих обсягів обчислювальної роботи. Двох вирішальних елементів не існувало в 1943 році:

- першим і найважливішим, була відсутність програмованого комп'ютера, без якого МСЕ був би не більше ніж згадуванням в науковій книзі;

- також була відсутня піонерна публікація загального вигляду, яка могла привернути увагу вчених і інженерів, зайнятих у сфері досліджень і розробок.

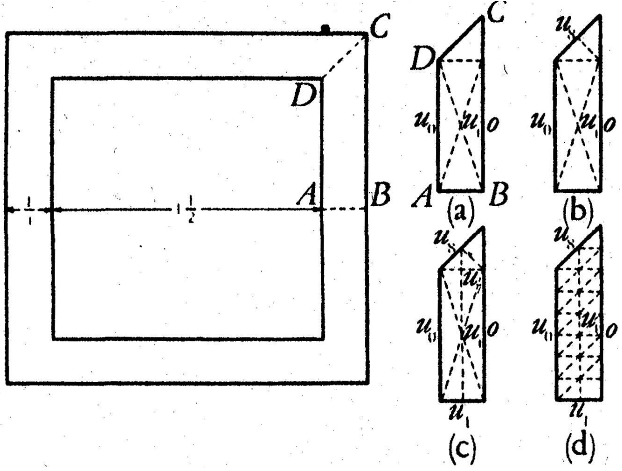


Рис. 8.5. Перше скінченно-елементне розбиття (Курант, 1943)

Аерокосмічна галузь надала ці можливості лише в п'ятдесяті роки, хоча необхідний апарат будівельної механіки (зокрема, метод переміщень) був доступний з кінця 1930-х років, а пропозиція Куранта - з 1943 року.

8.1.4. Матричне формулювання

Першою публікацією, в якій рівняння руху механічної системи були представлені в матричній формі, була стаття Дункана і Коллара [Duncan & Collar, 1934], де вводилися поняття матриці жорсткості, матриці демпфірування і матриці інерції.

Озираючись назад, Коллар так описує перші спроби застосування матричної алгебри для формулювання задач про механічні коливання: "*Фрейзер вивчав матриці як розділ прикладної математики в Кембриджі; і він визнав що постановка, наприклад, задачі про флатер системи з трьома ступенями свободи в матричних термінах є акуратною і лаконічною. Проте, формальні маніпуляції і перетворення, пов'язані з переходом до інших координат, займали його більше, ніж чисельні результати. З іншого боку, Дункан і я шукали саме чисельні характеристики коливань лопатей пропелера; і ми усвідомлювали, що можемо просунутися вперед, тільки розбивши лопать, скажімо, на 10 сегментів і розглядаючи її як таку, що має 10 ступенів свободи. При цьому також зручнішим виявилось формулювання в матричних термінах, від яких завжди можна перейти до чисельних значень. Потім ми з'ясували, що, помістивши наближену форму коливань в одну частину рівняння, в іншій частині після обчислень ми отримаємо краще наближення; і в результаті народилася матрична ітераційна процедура*".

Лише після тринадцятирічної перерви була опублікована робота С. Леві [Levy, 1947], де була представлена матрична теорія у зв'язку з розрахунком окремих систем конструкції літака, розбитих згідно із методом сил на стержневі та зсувні елементи. У цьому ж році була опублікована монографія А.Ф. Смирнова [Смирнов, 1947], де були визначені і досліджені властивості матриці переміщень, матриці реакцій і матриці впливу. Багато елементів цієї монографії були піонерними.

Матрична символіка багатьма була визнана зручною для організації обчислень. Слідом за першою публікацією [Levy, 1947], яка була присвячена силовому аналізу крила літака, з'явилися роботи Т. Ренда [Rand, 1951], Б. Лангефорса [Langefors, 1952] і П. Денке [Denke, 1954].

Розвиток цього напрямку досягає найвищої точки в серії статей Джона (Іоанніса) Аргіріса [Argyris, 1960]. Тут в матричній формі був детально представлений весь апарат класичної будівельної механіки, простежено двоїсті співвідношення між методом сил і методом переміщень і показано, що обидва ці методи проходять одну і ту ж послідовність кроків в процесі виведення розрахункових формул. Наукові праці Аргіріса і його колег стали відправною точкою для матричного відображення відомих в той час чисельних методів і дозволили застосовувати їх за допомогою електронно-обчислювальних машин для розрахунків конструкцій. Цим роботами був повністю підготовлений інструментарій для методу скінченних елементів. І перехід (рис. 8.6) від матричного розрахунку дискретних систем до розрахунку континуальних систем, характерному для методу скінченних елементів, не змусив на себе чекати.

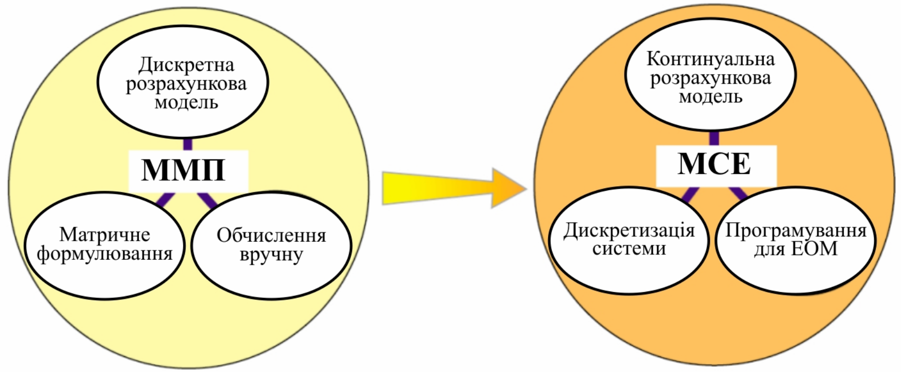


Рис. 8.6. Зв'язок матричного методу переміщень (ММП) і методу скінченних елементів (МСЕ)

Описуючи історію створення методу скінченних елементів, Рей В. Клаф [Clough, 2004] справедливо оцінив роботи Дж. Аргіріса, зібрані у виданій в Лондоні книзі [Argyris, 1955], в таких словах: «*На мою думку, ця монографія є найважливішою роботою, коли-небудь написаною з теорії структурного аналізу, і коли я прочитав її під час своєї відпустки, то негайно зробив висновок, що для мене вже немає ніякої потреби у створенні теорії для обґрунтування своїх досліджень*».

Слід, однак, зауважити, що матричні перетворення, які так чітко і прозоро описують сутність задачі, в першу чергу вплинули на розуміння проблеми і на загальну організацію обчислень, а не на сам обчислювальний процес. У всіх нетривіальних випадках для виконання обчислень матричні формули, в тому вигляді, в якому вони описуються в підручниках лінійної алгебри, не застосовувалися. Практично всі обчислення виконуються не над матрицями, а поелементно над їх компонентами і в тій послідовності, яка диктується зручністю обмінів між дискової і оперативною пам'яттю комп'ютера. Ніхто не обертає матрицю жорсткості для отримання матриці податливості і в переважній більшості випадків саме формування матриці жорсткості реалізується не як добуток $\mathbf{K} = \mathbf{AFA}^{\mathrm{T}}$ (**A** - матриця умов рівноваги, **F** - матриця внутрішньої жорсткості), а шляхом складання (ассемблювання) матриць жорсткості окремих елементів, коефіцієнти яких обчислюються за формулами.

8.2. Зародження методу

8.2.1. Перші кроки

У доповіді з характерною назвою «Рання історія методу скінченного елемента з точки зору піонера» [Clough, 2004] Рой Клаф пише: «*... в червні 1952 р. мене призначили у відділ Динаміки під керівництво Джона Тернера. Він був дуже компетентним інженером з освітою в області прикладної математики і досвідом декількох років роботи у фірмі Боїнг. Тернер доручив мені роботу, яку полягала в аналізі коливань досить великої моделі конструкції дельтавидного крила, яка була виготовлена Боїнгом. Ця проблема дуже відрізнялася від аналізу типової структури крила, яку можна було аналізувати, використовуючи стандартну теорію стержня, і я провів літо 1952 р., намагаючись сформулювати математичну модель дельтовидного крила, представляючи її як сукупність типових одновимірних балочних компонент. Результати, які зміг отримати до кінця літа, були дуже невтішні, і я був дуже збентежений, коли пішов попрощатися зі своїм босом Джоном Тернером. Але він запропонував мені повернутись до досліджень влітку 1953 р. Він запропонував мені зробити нову спробу оцінки коливальних властивостей моделі дельта-крила, а для цього сформулювати математичну модель як сукупність двовимірних пластинчастих елементів, взаємопов'язаних у кутах. Цією пропозицією Джон по суті визначив поняття методу скінченних елементів*».

Тут слід звернути увагу на сказане мимохідь «взаємопов'язаних у вузлах», яке слід було б читати як «взаємопов'язаних тільки у вузлах». Саме цей факт призводить до розв’язувальних рівнянь відносно вузлових переміщень, характерних для МСЕ в переміщеннях, іріднить його з методом переміщень в будівельній механіці стержневих систем[1].

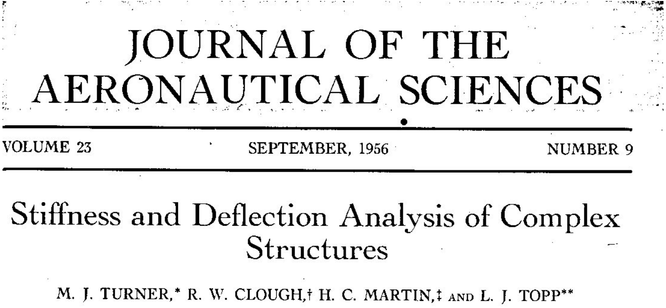
Рой Клаф отримав розв’язок для прямокутного і трикутного пластинчастого елемента в стані плоского напруження в 1953 році, а Джон Тернер зробив про це доповідь на щорічних зборах Інституту аерокосмічних досліджень (Institute of Aeronautical Sciences) в січні 1954 р. Але чомусь ця доповідь не була відразу

---

[1] Часто метод переміщень для розрахунку стержневих систем також називають методом скінченних елементів, хоча це невірно. Все ж МСЕ це метод наближеного розв’язання задач, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Так що тут існує саме спорідненість, але не більше.

представлена до публікації, і лише видання 1956 року [Turner et al., 1956] майже через три роки після того, як робота в Боїнгу була виконана, стала першою публікацією з методу скінченних елементів (рис. 8.7).

А свою назву метод отримав ще через чотири роки в доповіді Клафа на 2-й конференції Американської асоціації цивільних інженерів (ASCE), присвяченій використанню ЕОМ [Turner, 1960].



JOURNAL OF THE
AERONAUTICAL SCIENCES

VOLUME 23 SEPTEMBER, 1956 NUMBER 9

Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures

M. J. TURNER,* R. W. CLOUGH,† H. C. MARTIN,‡ AND L. J. TOPP**

Рис. 8.7. Перша публікація

Джон Тернер
англ. John Turner

Тернер, Клаф, Мартін і Топп коротко викладають МСЕ в формі методу переміщень у вигляді шестикрокової процедури [Turner et al., 1956]:

«(1) *Складну конструкцію потрібно спочатку замінити еквівалентною ідеалізованою конструкцією, що складається з базових несучих частин, які пов'язані одна з одною в обраних вузлових точках.*

Рей Клаф
англ. Ray W. Clough

(2) *Матриця жорсткості для кожного базового конструктивного елемента, що входить до складу ідеалізованої конструкції, повинна бути або відома заздалегідь, або легко визначатися.*

(3) *В той час як всі інші вузли вважаються зафіксованими, даному вузлу надається переміщення в одному з обраних координатних напрямків. Сили, необхідні для цього, і реакції, що виникають у сусідніх вузлах, визначають, комбінуючи відомі компоненти матриць жорсткості окремих елементів. Ці сили і реакції складають один стовпець повної матриці жорсткості. Як тільки у такий спосіб будуть розглянуті всі компоненти переміщень у всіх вузлах, буде отримана повна матриця жорсткості. У загальному випадку ця матриця буде мати порядок 3n × 3n, де n дорівнює числу вузлів. Матриця жорсткості, отримана таким способом, буде сингулярною.*

(4) *Бажані умови закріплення можуть бути накладені шляхом викреслення з матриці жорсткості стовпчика і відповідного рядка, для номерів яких були*

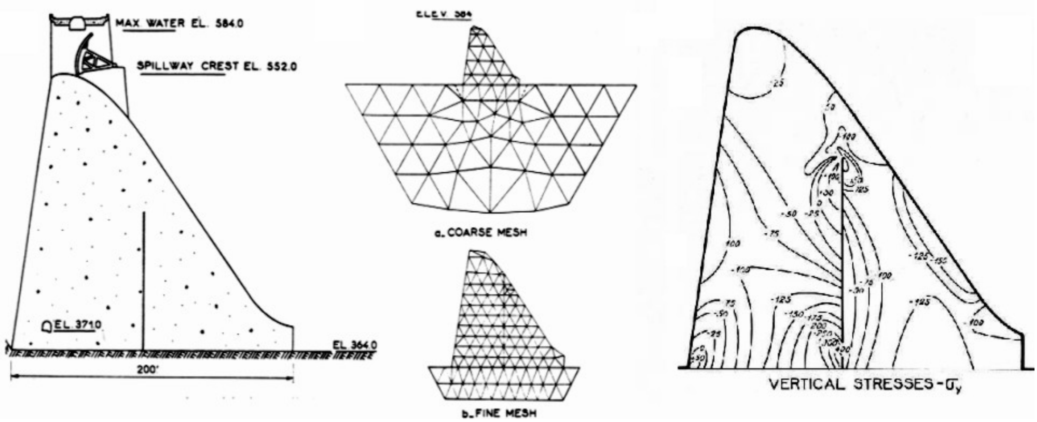
визначені нульові переміщення. Це зменшує порядок матриці жорсткості і робить її несингулярною.

(5) *При будь-якому заданому наборі зовнішніх сил у вузлах, виконавши матричні операції над матрицею жорсткості, отримаємо всі компоненти вузлових переміщень та зовнішні реакції.*

(6) *Внутрішні зусилля в елементах можуть бути знайдені з відповідних залежностей між силами і вузловими переміщеннями*».

Хоча піонерна публікація [Turner et al., 1956] була орієнтована на розв’язання задач динаміки, було очевидно, що запропонована процедура «прямого методу жорсткостей», як її тоді назвали творці методу, цілком придатна і для аналізу статичної поведінки конструкції. Особливо це стало очевидним у зв'язку з раніше опублікованою серією робіт Дж. Аргіріса [Argyris, 1954-55], про які Клаф, що познайомився з ними в 1956 році, писав «... *коли я прочитав ці статті, то негайно зрозумів, що для мене не було ніякої потреби щось створювати, щоб далі перейти до теорії структурного аналізу*».

Мабуть, першим з досліджень напружено-деформованого стану, виконаних з використанням МСЕ, був розрахунок греблі в Норфолку, у якій температурні напруження викликали вертикальну тріщину біля центру перерізу (рис. 8.8). Про результати цього дослідження було повідомлено 1960 році [Clough, 1960]. У цій роботі, виконаній ще в 1958-1959 роках, була використана перша в світі комп'ютерна програма, що реалізує МСЕ, яку розробив аспірант Клафа Ед Вільсон [Wilson, 1960].



а *б* *в*

Рис. 8.8. Перша скінченно-елементна схема (*а* – об’єкт розрахунку, *б* – СЕ-модель, *в* – результат)

Стаття 1956 року Тернера, Клаффа, Мартіна і Топпа, що дала старт методу скінченних елементів, поряд з серією робіт Аргіріса визначила образ першого покоління МСЕ, яке охоплює 1950 - 1962 роки. Піонери методу були інженерами, вихованими в традиції класичної механіки, які сприймали елементи несучої конструкції як пристрої для передачі сили. Елементи, розглянуті в [Turner et al., 1956], були характерними для конструкцій літальних апаратів. Відповідно тонкі пластинчасті елементи розглядалися як механічні пристрої, в яких у відповідь на вузлові переміщення виникають внутрішні сили, тобто в стилі методу переміщень. І хоча класичний метод сил в 1950-х роках домінував, метод переміщень був досить поширеним у динаміці і теорії коливань (зауважимо, що Тернер був фахівцем з аеропружності).

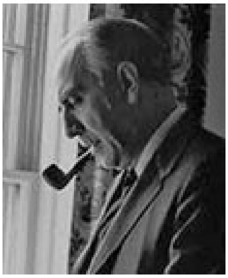
Подальший розвиток методу скінченних елементів підтвердив переваги методу переміщень, головним чином з точки зору зручності алгоритмізації розрахункової процедури. І основну роль тут зіграла та обставина, що в методі переміщень можна досить довільним чином вибрати систему вузлів (їх число і положення на конструкції), переміщення яких є основними невідомими.

8.2.2. Ланцюгова реакція

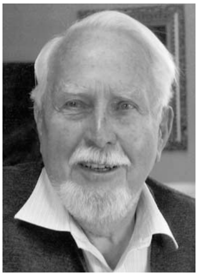
Піонерами і популяризаторами МСЕ були: Дж. Аргіріс, Р. Клаф, Г. Мартін, і О. Зенкевич, в значній мірі відповідальні за "передачу технології" від авіакосмічної промисловості до більш широкого діапазону технічних додатків, що було зроблено наприкінці 1950-х і в 1960-і роки.

Рей Клаф і Гарольд Мартін, тоді молодші професори (доценти) відповідно в Каліфорнійському університеті в Берклі і в університеті Вашингтона в Сіетлі, впродовж літніх семестрів 1952 і 1953 років працювали в групі Тернера, що займався розрахунком дельтовидного крила літака для компанії Боїнг.

Джон Аргирис
(1913-2004)
англ. John Hadji Argyris

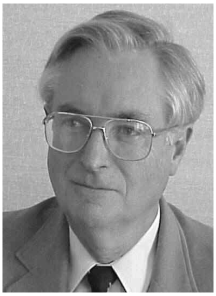


Гарольд Мартін
англ. Harold Clifford Martin

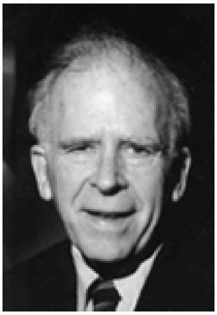


Ольгерд Зенкевич
(1921-2009)
англ. Olgierd Zienkiewicz

Перший етап методу скінченних елементів завершили роботи Р. Мелоша [Melosh, 1963] і Б. Айронса [Irons, 1964], [Irons, 1966]. У роботі Р. Мелоша було показано, що матриця жорсткості скінченного елемента може бути отримана виходячи з умов мінімізації потенціальної енергії, це дало поштовх переходу до варіаційного підходу при обгрунтуванні МСЕ і конструюванню різних скінченних елементів [Irons, 1964], [Fraeijs de Veubeke, 1968]. І, що не менш важливо, в роботах [Melosh, 1963], [Irons, 1966] були сформульовані вимоги для інтерполюючих функцій, які використовуються при побудові скінченних елементів



Едвард Вільсон
англ. Edward L. Wilson



Роберт Мелош
англ. Robert J. Melosh

Брюс Айронс
(1924 - 1983)
англ. Bruce Irons

Було доведено, що для збіжності достатньо, щоб набір інтерполюючих функцій скінченного елемента задовольняв умову повноти і забезпечував сумісність деформацій на міжелементних границях. З умов повноти витікали вимоги до поліномів, якими представлені інтерполючі функції. Але, як було встановлено згодом, ці умови можуть бути сформульовані в термінах механіки, а саме – вимоги повноти виконуються, якщо, по-перше, апроксимуючі функції містять переміщення скінченного елемента як жорсткого цілого і, по-друге, якщо вони забезпечують можливість реалізації в елементі однорідного (тобто не залежного від координат) деформованого стану з довільними компонентами деформації.

8.2.3. Поширення на пластини і оболонки

Впродовж наступного десятиліття після цього було опубліковано безліч робіт з конструювання та використання скінченних елементів для двовимірних і тривимірних розрахункових моделей. І якщо розв’язання просторової задачі теорії пружності не поставило нових питань, і всі підходи, випробувані для плоскої задачі, вдалося зберегти, то об'єкти типу пластин і оболонок вимагали застосування нових ідей.

Кілька підходів було випробувано для конструювання скінченного елемента пластини, що згинається, тобто при переході від розв’язання гармонічного рівняння плоскої задачі до бігармонічного рівняння згину. Мабуть, першою тут була магістерська робота В. Папенфуса з університету Вашингтона в Сієтлі [Papenfuss, 1959], і майже відразу за нею з'явилися роботи [Adini & Clough R, 1960], [Melosh, 1961], де для цієї ж задачі була представлена так звана схема АКМ (Адини-Клафа-Мелоша), яка є однією з найпопулярніших в методі скінченних елементів для задачі згину пластин. Модель АКМ давала точний розв’язок для всіх компонент напруженого стану, постійних в межах елемента, але не забезпечувала сумісність кутів нахилу на міжелементних границях. У той же час модель Папенфуса забезпечує сумісність на міжелементних границях, але не може реалізувати точний розв’язок для постійного по площі елемента крутного моменту.

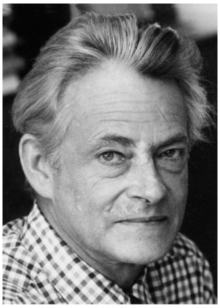
Тут, по суті, в метод скінченних елементів вперше проник, так званий, несумісний (неконформний) елемент [Bazeley et al., 1966]. І можна відзначити, що оскільки інженери в меншій мірі в порівнянні з математиками уникають застосування на практиці теоретично необгрунтованих прийомів, немає нічого дивного в тому, що неузгоджені елементи були вперше запропоновані саме інженерами. На перших порах це не викликало особливої стурбованості, тим більше, що хоча використовувані схеми були несумісними, точність розв'язків, отриманих з їх допомогою, була цілком задовільною.

Але, тим не менше, коли відмінності між сумісними (конформними) і несумісними елементами були усвідомлені, Фрайш де Вебеке зробив спробу розробити конформний скінченний елемент для плити, що згинається [Fraeijs de Veubeke, 1968].

Розробка скінченних елементів, що моделюють поведінку оболонкових конструкцій, пішла двома шляхами:

- сама геометрія оболонки також представлялася наближено, і її гладка серединна поверхня апроксимувалася багатогранником, сформованим плоскими скінченними елементами;
- використання викривлених скінченних елементів, які точно або з достатнім ступенем точності вписуються в серединну поверхню оболонки.

У першому випадку матрицю жорсткості елемента «плоскої оболонки» отримували простим підсумовуванням матриць жорсткості елемента плити, що згинається, і елемента плоскої задачі теорії пружності. Але така апроксимація дозволила отримати задовільні результати тільки при дуже великій кількості елементів в апроксимуючому ансамблі і далеко не завжди забезпечувала збіжність до точного розв'язку, навіть для випадку оболонок обертання. Тому подальші дослідження мали своїм основним завданням побудову різних типів скінченних елементів, які коректно описують геометрію оболонки і забезпечують необхідну точність розв'язку при обмеженій кількості елементів в ансамблі.



Бодуен М. Фрайш Де Вебеке
(1917 – 1976)
фр. Baudouin M. Fraeijs de Veubeke

8.2.4. Ізопараметричний елемент

Слід зауважити, що побудова функцій форм (інтерполюючих функцій), які відповідають усім необхідним умовам, для елементів з криволінійними границями є дуже складним завданням. Інтеграли, що виникають у виразах елементних матриць жорсткості і вузлових векторів, вже не можуть бути обчислені в замкнутій формі. Наявні труднощі можна здолати, якщо використовувати концепцію ізопараметричного елемента, запропоновану в 1968 році Б. Айронсом і О. Зенкевичем [Irons & Zienkiewicz, 1968]. У ізопараметричного елемента як геометрія самого елемента, так і переміщення задаються за допомогою однакових інтерполюючих співвідношень, а потім реалізується перехід до квадратур чисельного інтегрування. Саме в комбінації цих двох ідей міститься сутність пропозиції Айронса і Зенкевича.

Робота [Irons & Zienkiewicz, 1968] зробила безпосередній і істотний вплив на весь комплекс досліджень по тематиці МСЕ. За короткий час ізопараметричні елементи (рис. 8.9) завоювали популярність у інших дослідників і стали своєрідним стандартом у розробників програмного забезпечення.

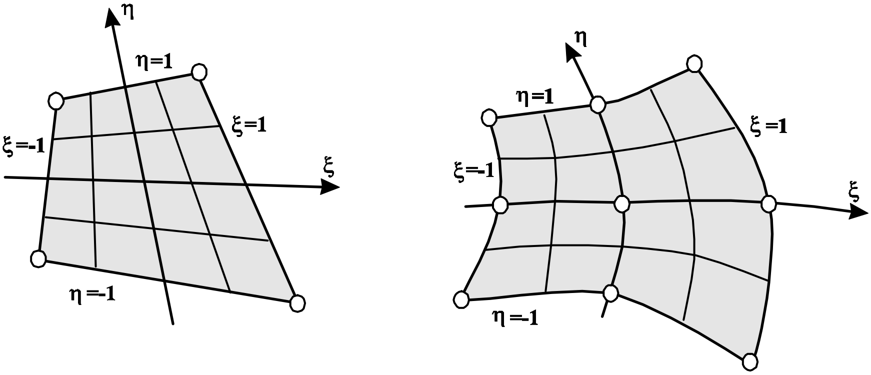


Рис. 8.9. Лінійний і квадратичний ізопараметричні елементи

Скінченний елемент циліндричної оболонки був запропонований Ф. Богнером, Р. Фоксом і Л. Шмітом [Bogner et al., 1967], він, як і елемент АКМ, не забезпечував точного збігу деформацій на міжелементних границях. Що стосується нульової реакції на зміщення елемента як жорсткого цілого, то цей елемент такою властивістю був наділений. Така комбінація властивостей елемента виявилася в достатній мірі вдалою, і він з успіхом застосовується в розрахунковій практиці. Інші варіанти скінченних елементів для розрахунку оболонок не завжди правильно враховували проблему жорсткого зміщення, крім того для багатьох з них була помічена і інша негативна властивість матриці жорсткості, названа «зсувним замиканням», коли при згині тонких пластин і оболонок, що моделюються тривимірними елементами, значно зростають похибки, пов'язані з проявом фіктивних зсувних деформацій.

Особливо ці проблеми стають істотними, коли використовуються криволінійні системи координат, які вводяться для того, щоб краще описати геометрію тіл складної форми. Тоді компоненти деформацій залежать не тільки від похідних переміщень, а й від переміщень і поворотів елемента в цілому.

Для усунення цих недоліків О.С. Сахаровим була розроблена моментна схема скінченних елементів [Вайнберг и др. 1971], [Сахаров, 1974a], [Сахаров, 1974b], яка дозволила врахувати основні властивості жорстких зсувів для ізопараметричних і криволінійних скінченних елементів ізотропних пружних тел. Суть її полягає в тому, що під час запису умов зв'язку деформацій з переміщеннями відкидаються ті члени розкладання деформацій в ряд, які реагують на жорсткі зміщення і на фіктивні зсувні деформації, що з'являються в такому разі. При цьому точні рівняння зв'язку деформацій і переміщень замінюються наближеними.

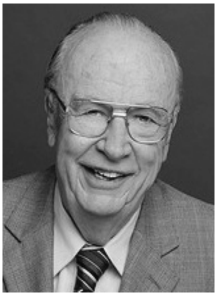
8.3. Пошуки строгого обґрунтування

Метод скінченних елементів виник з будівельної механіки і теорії пружності, а вже потім було отримано його математичне обґрунтування. Істотний поштовх у своєму розвитку МСЕ отримав в 1963 році після того, як Мелош [Melosh, 1963] довів, що його можна розглядати як один з варіантів поширеного в будівельній механіці методу Релея-Рітца, який шляхом мінімізації потенціальної енергії зводить задачу до системи лінійних рівнянь рівноваги. Після того, як було встановлено зв'язок МСЕ з процедурою мінімізації, він став застосовуватися до задач, описуваних рівняннями Лапласа або Пуассона. Трохи пізніше Фрайш де Вебеке досліджував збіжність і межі застосування різних скінченноелементних розв’язків в задачах лінійної теорії пружності [Fraeijs de Veubeke. 1965].

Слідом за цими роботами була проведена ціла низка досліджень, присвячених властивостям повноти і збіжності різних скінченноелементних апроксимацій. Так при скінченноелементному моделюванні пластин Бейзлі, Ченг, Айронс і Зенкевич [Bazeley et al., 1966] в якості критерію повноти запропонували, щоб при зміщенні елемента як жорсткого цілого не виникали деформації, і щоб інтерполюючі функції допускали постійні значення деформації і кривизни в елементі. Аналогічні вимоги забезпечення збіжності висувалися Айронсом і Дрейпером [Irons & Draper, 1965]. Доказ цієї гіпотези було дано пізніше Олівейрою [Arantes Oliveira, 1968].

До сімдесятих років відноситься поява строгої математичної теорії скінченних елементів. Тут можна виділити праці І. Бабушки, Р. Галлагера, Ж. Декла, Дж. Одена, Г. Стренга, Дж. Фікса. Корнєєв вказав на збіг математичної суті МСЕ і варіаційно-різницевого методу (ВРМ). Співставлення МСЕ з рядом варіаційних методів наведено в працях Л.О. Розіна.

Тинслей Оден
англ. Tinsley Oden



Іво Бабушка
чеськ. Ivo Babuška

Річард Галлагер
(1927-1997)
англ. Richard Gallagher

Певні труднощі при обгрунтуванні МСЕ виникли при використанні несумісних скінченних елементів. Функції форми цих елементів не належать до енергетичного простору, і стандартний метод доведення «збіжності за енергією» тут не проходить. Математичні дослідження цього методу були проведені, наприклад, в роботах Бабушки і Зламала [Babuska & Zlamal, 1973], Чайрлета [Ciarlet, 1974], Г. Стренга і

Гілберт Стренг
англ. Gilbert Strang

Дж. Фікса [Strang & Fix, 1973]. Виявилося, що збіжність істотно залежить від певних індивідуальних особливостей схем. Досить загальний метод дослідження збіжності несумісних скінченноелементних систем, а також спосіб конструювання збіжних несумісних елементів було вказано лише в 1981 році І.Д. Євзеровим [Евзеров, 1981].

Джорж Фікс
(1939–2002)
англ. George Fix

8.4. Інші варіанти МСЕ

8.4.1. Метод Рітца і метод Гальоркіна

В механіці деформівного твердого тіла використовується функціонал, який представляє собою потенціальну (функціонал Лагранжа) або доповнювальну (функціонал Кастільяно) енергію системи. Якщо у функціонал підставити апроксимуючі вирази шуканих функцій і застосувати до нього екстремальні принципи, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, розв’язанням якої будуть значення вузлових невідомих.

Сфера застосування МСЕ значно розширилася, коли Оденом [Oden, 1969] і Сабо і Лі [Szabo & Lee, 1969] було встановлено, що рівняння, які визначають елементи в задачах, можуть бути легко отримані за допомогою варіантів методу зважених нев'язок, таких як метод Гальоркіна або метод найменших квадратів.

Дійсно, для отримання розв’язувальних рівнянь використання варіаційних принципів не обов'язково (зокрема, потенціальна функція може не існувати). Тоді в розгляд вводиться нев’язка - відхилення наближеного апроксимативного розв’язку від точного розв’язку диференціальних рівнянь для даної задачі. Щоб отримати "найкращий" розв’язок, необхідно мінімізувати деякий інтеграл від нев'язок по розрахунковій області. Для підвищення ефективності в підінтегральний вираз поряд із самою нев'язкою зазвичай вводиться так звана вагова функція. Вибір схеми мінімізації та вагових функцій визначає різні варіанти методу нев’язок. Найбільш часто вживаним є метод Гальоркіна, який, за наявності енергетичного функціонала, призводить до тих самих рівнянь, що і варіаційний підхід.

Обгрунтування МСЕ за допомогою методу Гальоркіна зіграло важливу роль в теоретичному обґрунтуванні методу, оскільки дозволило застосовувати його при розв’язанні багатьох типів диференціальних рівнянь [Demkowicz & Oden, 1986]. Таким чином, метод скінченних елементів перетворився в загальний метод чисельного розв’язання диференціальних рівнянь або систем диференціальних рівнянь.

8.4.2. Використання інших функціоналів

У задачах з особливостями (таких як урахування слабкої стисливості, розрахунок пластин і оболонок на базі тривимірних скінченних елементів) при використанні традиційних схем МСЕ в формі методу переміщень виникають суттєві труднощі [Irons, 1970]. Для їх подолання використовуються інші варіаційні принципи - Кастільяно (метод сил), Хеллінгера - Рейсснера, Ху - Васідзу (змішаний метод).

МСЕ в формі методу сил спочатку застосовувався де Вебеке [Fraerijs de Veubeke, 1965], проте пізніше цей варіант методу не отримав значного розвитку в силу складності при апроксимації напруженого стану. Ширше застосування знайшли змішані схеми МСЕ. Перша робота за змішаним методом була опублікована Л. Германном в 1965 р. [Herrmann, 1965] і була пов'язана з аналізом пластинки, що згинається. Згодом було розроблено цілу множину змішаних скінченних елементів для пластин і оболонок (Прато [Prato, 1968], Дж. Коннор [Connor & Will, 1971], А. Поцескі [Poceski, 1975, 1979], Ф. Бреззі [Brezzi et al. , 1985, 1987]). У цих та подальших роботах за змішаним методом теорія будувалася на застосуванні варіаційних принципів і використанні функціоналів повної потенціальної і доповнювальної енергії. Поля переміщень і зусиль в об'ємі СЕ передбачалися незалежними одне від одного. Вперше абстрактний математичний аналіз таких методів був проведений в роботах [Aubin & Burchard, 1970], і [Babuska & Zlamal, 1973].

Маючи позитивні особливості, такі елементи мають і низку недоліків, як, наприклад, збільшення порядку розв'язувальної системи рівнянь в порівнянні з МСЕ у формі методу переміщень, порушення позитивної визначеності матриці системи. Тому для задач із зазначеними особливостями більш перспективним є розвиток гібридних схем МСЕ в формі методу переміщень на базі варіаційного принципу Лагранжа. Першою роботою, присвяченою гібридним скінченним елементам, була публікація Т. Піана і П. Тонга [Pian & Tong 1969]. Ці автори побудували набір функціоналів, у яких поля одних функцій (скажімо, переміщень) незалежно варіюються в усій області визначення розв'язання задачі, тоді як інші функції (наприклад, напруження) варіюються тільки на деяких поверхнях (лініях), що розділяють цю область на підобласті, які не перетинаються. Відповідні цим функціоналам схеми методу скінченних елементів названі авторами гібридними схемами МСЕ. Цікаво відзначити, що ця ж ідея незалежного варіювання різних функцій (прогинів і поворотів) в області і на міжелементних границях скінченних елементів використовується в роботах японських вчених Кікучі і Андо [Kikuchi & Ando 1972], що дозволило їм простими засобами подолати відомі труднощі МСЕ в теорії згину тонких пластин, пов'язані з вимогою безперервності першої похідної від функції прогинів.

Слід зазначити, що допоміжні невідомі, які використовуються в змішаних і гібридних варіантах МСЕ, як правило, пов'язані з похідними від шуканих переміщень і мають певний фізичний зміст, а їх обчислення іноді представляє навіть більший практичний інтерес, ніж дані про основні невідомі.

Але змішані функціонали мають два серйозні недоліки:

• відсутність екстремальних властивостей (точка стаціонарності не є точкою екстремуму для рейсснеріана) породжує труднощі обчислювального характеру;

• порядок змішаної системи рівнянь складається з суми порядків, зумовлених як апроксимацією переміщень, так і апроксимацією напружень.

Ці недоліки змушують підходити обережно до використання змішаних функціоналів.

З розвитком МСЕ і зростанням числа і якості його програмних реалізацій чітко стали проявлятися і недоліки методу. Основний і давно усвідомлений недолік МСЕ в формі методу переміщень - це, як не парадоксально, продовження його основної переваги.

Справді, найважливішою особливістю варіаційної постановки задачі, що використовує функціонал повної потенційної енергії системи, є ослаблення вимог на гладкість розв’язання. Таке розширення області визначення розв’язання з одного боку допомагає будувати простір допустимих до порівняння функцій переміщень, а з іншого боку воно виявляється занадто "слабким" для напружень, оскільки операція диференціювання, необхідна при переході від переміщень до напружень, може порушити безперервність компонент напруженого стану.

Аби не відмовлятися від переваг, дослідники, стали шукати шляхи позбавлення від недоліків або хоча б згладжування їх негативного впливу.

У багатьох випадках інженер володіє апріорною інформацією про гладкість напружень при точному розв’язанні задачі і, якщо ця інформація суперечить спостережної (очікуваної) гладкості то, виникає бажання "облагородити" розв’язок.

Таким чином, суть проблеми полягає в побудові згладжуючого оператора, що проектує розривний розв’язок на деяку поверхню, гладкість якої узгоджена з наявною апріорною інформацією. Деякий час надії покладалися на ідею Барлоу, по якій напруження шукаються в деяких відмінних від вузлових "оптимальних" точках, де похибка напружень гарантовано мінімальна. Ця ідея не знайшла широкого застосування в силу труднощів, які виникають при пошуку оптимальних точок, крім того, користувач цікавиться, як правило, напруженням у вузлових точках сітки скінченних елементів.

Цікава ідея отримання вузлових значень напружень (зусиль) у МСЕ належить А.В.Вовкушевському [Вовкушевский, 1976]. Відповідно до його пропозиції разом з вузлом, в якому знаходяться напруження, розглядається "зірка" його елементів, тобто область, що складається зі скінченних елементів, які примикають до даного вузла. Сам цей вузол назвемо центром зірки. В межах зірки вводиться нова апроксимація переміщення, не пов'язана, взагалі кажучи, з тією апроксимацією, яка застосовувалася при визначенні вузлових значень переміщень, але така, що в кожному вузлі зірки нова апроксимація задовольняє тим переміщенням, які дає скінченно-елементний розв’язок. Для цього складається система рівнянь, яка є перевизначеною, тому її розв’язок слід шукати, наприклад, за методом найменших квадратів.

У зарубіжній технічній літературі великою популярністю користується так званий метод сполучених апроксимацій Одена [Oden & Reddy 1973]. На жаль, його вариаційне трактування (сам Оден не пов'язує свій метод з будь-якою варіаційною постановкою задачі) показує, що розв’язувальні рівняння випливають з умов стаціонарності функціоналу, який не має чітко вираженого фізичного сенсу. Цей недолік був усунутий в роботі В.І. Слівкера [Сливкер, 1982], де була запропонована схема побудови МСЕ, яка характеризується наступними властивостями:

- приймаються незалежні апроксимації силових і кінематичних полів;
- будуються дві рітцеви системи рівнянь, кожна з яких має додатно визначену матрицю;
- крайові умови (як статичні, так і кінематичні) задовольняються точно.

На відміну від традиційного підходу, заснованого на виконанні умов стаціонарності одного функціоналу, в розглянутому методі з диференціальною постановкою задачі зв'язуються два функціонали, умови мінімуму яких на скінченновимірних підпросторах дають шукані системи рівнянь.

При аналізі нелінійної поведінки оболонкових конструкцій одна з проблем полягає в тому, що найбільш широко представлені в комерційних пакетах програм ізопараметричні вироджені елементи, які розглядають оболонку як сукупність плоских елементів, в деяких класах задач показують невисоку продуктивність. Альтернативою виродженим є геометрично точні елементи, в яких відлікова поверхня оболонки описується аналітично заданими функціями, зокрема, сплайнами, а термін «геометрично точний» означає, що коефіцієнти першої і другої фундаментальних форм відлікової поверхні і символи Крістофеля обчислюються точно в кожному вузлі. Такі скінченні елементи оболонки, схильної до великих переміщень і поворотів, побудовані порівняно недавно в роботі [Kulikov, Plotnikova, 2011].

8.4.3.Дискретно-континуальний (напіваналітичний) МСЕ

Замість переходу від системи диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь, характерного для методу скінченних елементів, можливий перехід до системи звичайних диференціальних рівнянь. Мабуть, вперше ця ідея була висловлена академіком Л.В. Канторовичем [Канторович, 1934] і представляла собою розвиток методу Рітца. В задачах будівельної механіки, починаючи з 1931 року, підхід такого типу використовував В.З. Власов.

Його підхід має ідейну спільність з методом Бубнова-Гальоркіна. Відмінність полягає лише в формі завдання наближеного виразу для шуканої функції декількох змінних: в методі Бубнова-Гальоркіна в якості коефіцієнтів при координатних функціях беруться невідомі константи, для визначення яких складається система лінійних алгебраїчних рівнянь, тоді як в методі В.З. Власова роль коефіцієнтів грають невідомі функції по одній з незалежних змінних. Ці функції визначаються з розв’язання системи звичайних диференціальних рівнянь

З механічної точки зору цьому методу відповідає розрахункова модель конструкції, що представляє собою систему, яка має скінченне число ступенів свободи в напрямку однієї координати і нескінченно велике по іншій координаті.

Такі системи В.З. Власовим були названі дискретно-континуальними, а сам метод часто називають дискретно-континуальним методом Власова [Шапошников, 2009].

Близьким до методів Канторовича і Власова є метод прямих (диференціально-різницевий метод) - це досить ефективний метод зниження розмірності вихідних крайових задач. В даному методі похідні по одній з незалежних змінних в двовимірних задачах і по двох незалежних змінних в тривимірних задачах замінюються наближеними різницевими виразами.

Використання такої процедури забезпечує заміну крайової задачі для диференціальних рівнянь в частинних похідних крайовою задачею для звичайних диференціальних рівнянь. У цьому полягає головна особливість методу прямих. Це було запропоновано ще до появи ЕОМ і ефективних високоточних алгоритмів розв'язання граничних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Безпосередньо до розв’язання статичних задач теорії пружності (двомірних і тривимірних) метод прямих вперше адаптував М.Г. Слободянськкій [Слободянский, 1939]. У будівельній механіці в роботах Л.П. Вінокурова [Винокуров, 1951, 1956] запропонований варіант методу прямих для розв’язання просторових задач теорії пружності. Для розв’язання задач теорії оболонок даний метод вперше був використаний Я.М. Григоренко та його учнями [Влайков и др., 2001].

Цілком природним було узагальнення методу, коли при розв’язанні двовимірної задачі різницева процедура по одній координаті (або двох координатах для тривимірного випадку) замінюється скінченноелементною апроксимацією розв’язку. Такий метод скінченних смуг був запропонований в 1968 році І.Ченгом [Cheung, 1968, 1996].

Метод скінченних смуг поєднує ідею аналітичного методу Канторовича-Власова і техніку методу скінченних елементів (МСЕ). Використовується так звана дискретно-континуальна модель об'єкта. Так, наприклад, тривимірна конструкція розбивається поздовжніми перетинами (лінійними вузлами або так званими вузловими лініями) і, таким чином, діскретизується тільки в одному, поперечному, напрямку. В результаті виходить ансамбль прямолінійних або криволінійних скінченних елементів (в двовимірному випадку - смуг). За іншими (поперечним) напрямками використовується звичайне скінченноелементне розбиття.

В якості вузлових невідомих можуть бути обрані кінематичні невідомі: переміщення, кути повороту тощо. Це так званий «жорсткістний» варіант. Жорсткістний варіант має три основних подання: напіваналітичний метод, аналітичний і чисельний.

У напіваналітичному методі в якості базису в поздовжньому (аналітичному) напрямку використовуються тригонометричні ряди (особливо для випадків шарнірного закріплення граничних поперечних перерізів), балкові функції, поліноміальні функції спільно з тригонометричними функціями і інші аналітичні функції. Базис поперечного (дискретного) напрямки становлять функції форми різного виду.

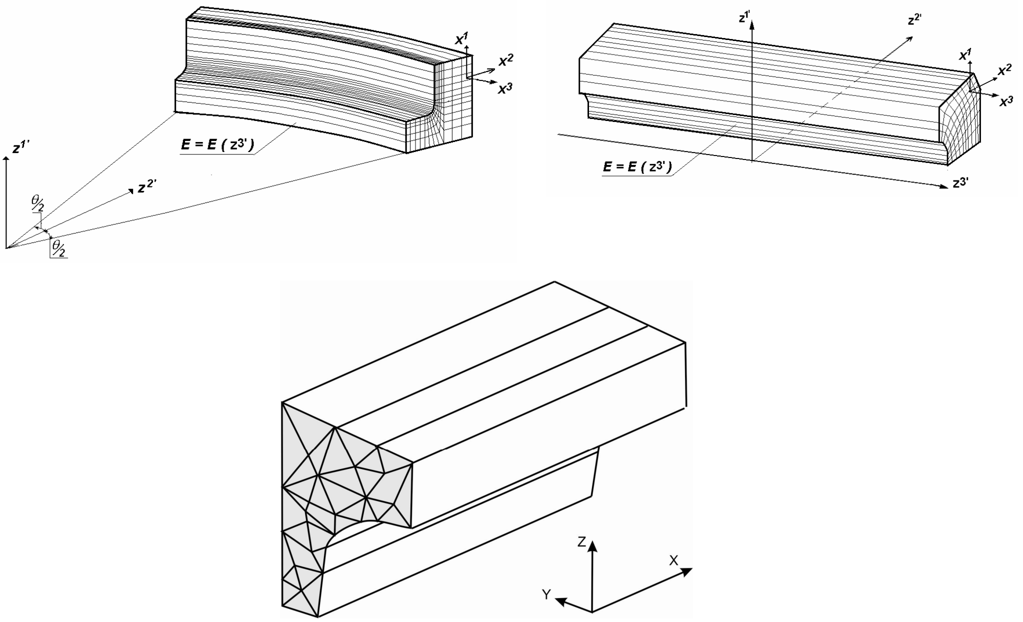


Рис. 8.10. Модель напіваналітичного методу

В аналітичному методі в якості базису в поперечному напрямку використовуються точні розв'язки відповідних диференціальних рівнянь, що моделюють задачу. В цілому, аналітичний метод не має широкого застосування. Але оскільки він є найбільш точним, його застосовують при тестуванні інших методів.

У разі чисельного варіанту для базису при апроксимації переміщень в поздовжньому напрямку вибираються сплайни, які виконують необхідні умови неперервності або розривів. У поперечному напрямку, також як і в разі напіваналітичного варіанту, використовуються функції форми. Чисельний варіант методу скінченних смуг використовується значно рідше, ніж напіваналітичний.

Основні невідомі (далі основні вузлові невідомі) розглядаються відносно вузлових ліній. На цих лініях основні невідомі змінюються безперервним способом уздовж поздовжньої координати і в класичному випадку представляються у вигляді суми деяких базисних функцій, які задовольняють граничні умови. В якості базисних використовуються тригонометричні функції, якщо, наприклад, вузлова лінія є колом, або поліноми Міхліна [Баженов и др., 1993] для вузлових ліній іншого типу.

Стандартні напіваналітичі підходи погано справляються з урахуванням навантажень, розподілених на невеликих ділянках уздовж вузлової лінії, зокрема - зосереджених навантажень. Не менш критичні в цьому ж сенсі і граничні умови: для їх адекватного урахування потрібен певний спеціальний вид таких умов, який не має місця в загальному випадку. Точність і збіжність рішень, одержуваних за такими методами, часто сильно залежить від виду обраних базисних функцій для апроксимації невідомих, а також від кількості врахованих членів ряду. В той же час збіжність в зонах крайових ефектів, зосереджених чинників, концентрацій напружень і деформацій (тобто в найбільш відповідальних зонах) вельми повільна і слабо залежить від числа врахованих членів ряду Фур'є, що частково пояснюється відомим в теорії рядів ефектом Гіббса.

Для подолання цих труднощів відносно недавно був запропонований варіант дікретно-аналітичного методу, в якому використовується пряме розв'язання багатоточкової крайової задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь. В рамках такого підходу О.Б. Золотовим та П.О. Акімовим [Золотов и Акимов, 2004] був реалізований стійкий алгоритм аналітичного розв'язання при будь-якому числі невідомих в коректній для обчислень формі.

8.4.4. Суперелементний підхід

Метод скінченних елементів швидко зарекомендував себе як потужний засіб аналізу складних інженерних конструкцій. З'явилася можливість розв'язання дуже великих задач за умови наявності ЕОМ з відповідними можливостями, і саме ця обставина встановлювала межі можливого. Звідси виникла потреба в модифікаціях МСЕ, орієнтованих на розв'язання задач підвищеної складності; однією з таких модифікацій став метод суперелементів.

В основі методу суперелементів (підконструкцій) лежить ідея незалежного розрахунку окремих частин системи (підобластей) і подальшого врахування їх взаємодії. Вважається, що всі вузли області розділені на дві множини - зовнішні і внутрішні вузли, а невідомі переміщення області розглядаються у вигляді суми двох складових. Перша складова - переміщення, викликані зовнішніми силами при закріпленні границь в підобластях. Переміщення кожної підобласті визначаються з рівнянь, що включають невідомі, пов'язані тільки з даної підобластю. Друга складова - переміщення, викликані переміщеннями границь подобласті з виключеними внутрішніми вузлами.

Розбиття системи на підконструкції було запроваджено фахівцями аерокосмічної галузі на початку 1960-х років і розглядалося тоді як спосіб «розв'язання задач по частинах» [Крон, 1972]. Для розв'язання задач теорії пружності метод підструктур вперше був використаний А.Н. Пржеміницьким [Przemieniecki, 1963],

Книга [Przemieniecki, 1968] містить досить повну бібліографію ранніх робіт, більша частина яких мала статус в значній мірі недоступних внутрішніх повідомлень компаній або лабораторій. Таким чином, фактичну історію важко простежити, тому пріоритет Пржеміцкого є досить умовним. Помітний розвиток суперелементний підхід отримав в роботі Майснера [Meissner, 1968], який формалізував метод і узагальнив його на кілька рівнів вкладених один в один суперелементов.

Найпростіші суперелементи з'явилися одночасно в багатьох з ранніх програм МСЕ (наприклад, чотирикутний елемент складений з трикутників), але суперелемент загального призначення був запропонований в кінці 1960-х років групою SESAM в компанії Det norske Veritas [Egeland & Araldsen 1974].

При розрахунку конструкції методом суперелементів спочатку відбувається скорочення розмірності задачі за рахунок виключення внутрішніх ступенів свободи (редукція), коли переміщення внутрішніх вузлів конструкції виражаються через переміщення зовнішніх вузлів. Для ідентичних підконструкцій матриця жорсткості редукується лише одного разу, що істотно знижує час розрахунку.

Виключення внутрішніх невідомих в матричній формі статичного ущільнення було запропоновано в роботі Гайяна [Guyan, 1965] в якості прийому видалення «несуттєвих» ступенів свободи в динамічному аналізі. Лише пізніше такий підхід, як і спосіб неповної факторизації, став основою багатьох суперелементних алгоритмів. Вони відрізняються один від одного головним чином способом розбиття системи на підсистеми. Тут використовуються підходи, засновані на повторюваності частин конструктивного комплексу, або ж функціональні, коли суперелементи пов'язуються з частинами конструкції (модулями), що мають однакове функціональне призначення [Постнов и Тарануха, 1990].

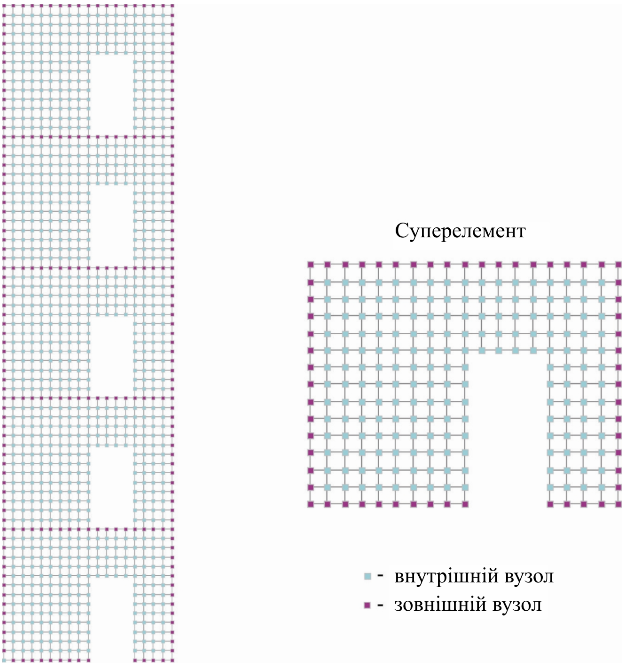


Рис. 8.11 Розбиття на суперелементи

Техніка суперелементів знайшла собі застосування в так званому локально-глобальному аналізі, запропонованому в роботі [Mote, 1971] і орієнтованому на дослідження поведінки конструкцій, що мають в локальній зоні помітне збурення напружено-деформованого стану. Ідея підходу полягає в тому, що спершу вирішується глобальна задача, в якій ігнорується локальне збурювання, а потім на виділеній підобласті (своєрідному суперелементі) відшукується розв'язок з урахуванням збурення.

Використання розбиття області на підобласті викликало нову хвилю інтересу в останні роки в зв'язку з проблемою розпаралелювання обчислювального процесу для багатоядерних комп'ютерів [Копысов, 1999].

8.5. Програмні реалізації

8.5.1. Вибір методу

В період з кінця 1950-х до початку 1960-х років, коли з'явилася можливість доступу до комп'ютерів, в проектних організаціях і в конструкторських бюро панував класичний метод сил, хоча і з'явилися прихильники методу переміщень. Інженери, виховані в 1940-х і 1950-х роках, часто були організаторами переходу до комп'ютерних розрахунків, і не дивно, що багато сил було витрачено на програмування методу сил [Robinson, 1966], [Резников, 1971].

Автор книги [Резников, 1971] Р.А. Резніков, який був прихильником використання методу сил, до глави, яка була присвячена цьому методу, подав епіграф: «*Хорошу мелодію можна зіграти і на старій скрипці*». Але в техніці, на відміну від мистецтва, «*стара скрипка*» ніколи не виграє конкурс, якщо не піддасться істотній модернізації, і, врешті-решт, в програмних реалізаціях загального призначення панівним став метод переміщень. Програми, що грунтуються на методі сил, залишилися лише в деяких об'єктно-орієнтованих розробках.

Дуже характерною є наступна історія. У 1965 році завдання NASA на розробку програми методу скінченних елементів NASTRAN містило вимогу одночасного розвитку версій методу переміщень і методу сил [MacNeal, 1988]. Як передбачалося, у кожної версії, повинні були бути ідентичні можливості моделювання і можливості розв’язання задач, включаючи задачі про динаміку і великі деформації об’єктів. В кінцевому рахунку розвиток версії методу сил було скасовано в 1969 році.

А характеризуючи результат конкурентної боротьби цих методів, можна навести відповідь Ейнштейна на запитання щодо реакції представників старої школи на нову фізику: "*Ми не переконували їх; ми їх пережили*".

Зауважимо, що говорячи тут про метод переміщень, ми весь час мали на увазі сучасне його трактування, орієнтоване на програмну реалізацію. У ті часи, коли основними інструментами обчислень інженера були олівець, папір і логарифмічна лінійка, при розрахунках рамних конструкцій, наприклад, зазвичай мовчазно вважалося, що стержні рами нестисливі. При ручних обчисленнях таке припущення зменшувало об'єм обчислювальної роботи за рахунок скорочення числа ступенів свободи вузлів стержневої системи. Порядок матриці жорсткості зменшувався, і користь від цього переважала всі недоліки, пов’язані з гіпотезою про нестисливість.

Але те, що добре було ще вчора, не є найкращим в наш час. Зокрема, деякі речі, корисні для ручного розрахунку, не обов'язково корисні і для комп'ютеризованих обчислень. Урахування податливості стержнів в поздовжньому їх напрямку дійсно призводить до збільшення числа ступенів свободи вузлів, але зате спрощує алгоритми формування загальної матриці жорсткості системи, а для розробників програмних комплексів остання обставина є більш важливою і суттєвою.

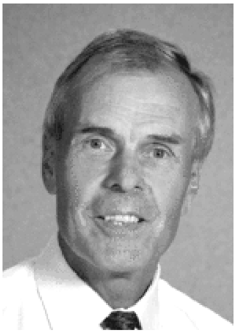
Становленння програмної архітектури

Розробка комп'ютерних программ, які реалізують МСЕ, почалася одночасно з появою цього методу. До цієї роботи долучився Ед Вільсон, аспірант Тернера. В липні 1962 року Джон Тернер згадував [Turner et al., 1964]:

"*У доповіді, представленій в 1959 році на зборах співробітників Підрозділу Конструкцій і Матеріалів AGARD*[2] *в Аахені (Німеччина), були описані суттєві особливості системи для чисельного аналізу конструкцій прямим методом жорсткостей. Характерною особливістю цієї специфічної версії методу переміщень є процедура складання, в результаті якої матриця жорсткості для складної системи заповнюється прямим доповненням матриць, пов'язаних з елементами системи*".

Це було одним з ключових елементів для всіх подальших розробок, і, до речі, першим з численних відступів від прямого використання матричних операцій. Численні інші відступи такого роду відбувалися пізніше, коли постало питання про роботу із зовнішньою пам'яттю.

Перша програма, створена Е. Вільсоном, ще не була розробкою промислового використання. Вона працювала в руках автора, і саме такими були і інші програмні розробки кінця 1950-х і початку 1960-х років. Протягом перших років кожен дослідник розвивав свою власну комп'ютерну програму або змінював програму іншого дослідника, щоб аналізувати певний тип конструкцій. Часто ці програми не були зареєстровані і не могли використовуватися будь-ким ще крім розробника. З цих причин Ед Вільсон в 1969 р. почав розвиток програми загального користування SAP (Structural Analysis Program) для цілей статичного і динамічного розрахунку [Wilson, 1970].



Клаус-Юрген Бате
нім. Klaus-Jürgen Bathe

Програма SAP використовувала існуючу технологію того часу. У кожного вузла могло бути від нуля до шести ступенів свободи переміщень. В межах SAP були створені покажчики для вузлів, які дозволили кожному вузлу мати різні невідомі переміщення. Рівняння рівноваги формувалися в процесі побудови матриці жорсткості тільки для невідомих переміщень. Отже, програма була настільки ж ефективна, як спеціалізовані цільові програми, у яких було неповне число переміщень у вузлі.

У 1973 р. Клаус-Юрген Бате оновив динамічні гілки програми і створив варіант SAP IV [Bathe et al., 1993]. На час свого завершення SAP IV була однією з найшвидших і мала найбільші в світі можливості серед аналогічних розрахункових програм.

Але першим комерційним пакетом програм загального призначення, випущеним в 1969 році, став пакет ASKA (Автоматична система для кінематичного аналізу) [Argyris, 1969]. Він був розроблений в Німеччині в Інституті статики і динаміки

---

[2] AGARD (Advisory Group for Aerospace Research and Development) – консультативна група аерокосмічних досліджень – науково-технічна агенція, яка існувала в структурі НАТО з 1952 по 1996 роки.

аерокосмічних конструкцій (Institute of Statics and Dynamics of Aerospace Structures) під керівництвом Дж. Аргіріса.

Програма ASKA була орієнтовано. на певний тип машини, але швидкі темпи розвитку обчислювальної техніки привели до необхідності створення програми на мові, зрозумілій будь-якій машині. Можливості алгоритмічного мови ФОРТРАН зумовили її широке використання для програмування при розв'язанні задач методом скінченних елементів.

Програма NASA представляла собою спробу створення гнучкої програми для широких досліджень і вирозв'язокя великих задач американської аерокосмічної промисловості. А створені в Суонсі програми FESS (Finite Element Solution Swansea) і FINESSE були більше орієнтовані на ефективне розв'язання інженерних задач будівельної механіки малих і середніх розмірів, таких, наприклад, як розрахунок мостів, гребель, ядерних реакторів. При їх розробці основна увага була приділена створенню простої системи, яку легко пристосувати до будь-яких конкретних задач.

Ця ідеологія була покладена в основу таких вітчизняних розробок, як програмна система ЛІРА або комплекс SCAD Office. Ці розробки, орієнтовані на використання масової комп'ютерної техніки, удосконалювалися разом зі зростанням технічних можливостей (але далеко не тільки за цей рахунок), і в даний час, коли їм доступні задачі з кількома мільйонами невідомих переміщень, їх уже важко вважати програмами для розв'язання малих і середніх задач. В той же час орієнтація на масового користувача позначилася на спрощенні вводу вихідних даних, розробці засобів контролю і візуалізації результатів.

8.5.2. Пошук розв'язувальників

Серед методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими матрицями в МСЕ-програмах використовуються як прямі методи, так і ітераційні. Останні зазвичай застосовуються тоді, коли матриця системи рівнянь є позитивно визначеною.

Найперші програми використовували ітераційні розв'язувальники, оскільки розміри задач, які потрібно було розв'язувати, набагато перевершували можливості перших ЕОМ. Комп'ютери першого покоління мали достатню швидкість, але невелику пам'ять. Е. Вільсон пише «... мій перший комп'ютер Univac мав 1000 45-бітових слів, а IBM-701 - 2048 36-бітових слів. Зрозуміло, що розв'язання повної системи 100 рівнянь було тоді серйозним викликом» [Wilson, 1993].

Пізніше програми стали інтенсивно використовувати прямі методи, серед яких спершу переважав стрічковий метод, а потім і профільний метод [George & Liu, 1981], заснований на гауссовому виключенні. У 90-х роках більшої популярності набули методи, які тонко враховують розріджену структуру матриці. Завдяки ефективним алгоритмам упорядкування, які істотно зменшують заповненість в процесі факторизації, вдавалося значно скоротити розмір факторизованої матриці і тривалість обчислень. Однак ці програми ефективні тільки в тому випадку, коли вся матриця розташовується в оперативній пам'яті, тобто для відносно невеликих задач.

Це змусило розробників програм звернутися до технології запропонованого Брюсом Айронсом [Irons, 1970] фронтального методу, в якому збірка і виключення повністю зібраних рівнянь ведуться паралельно. Матриця жорсткості системи в явному вигляді не збирається, а замість цього додається елемент за елементом. Як тільки черговий вузол стає зібраним, тобто всі елементи, що примикають до нього, включені в ансамбль, то відразу невідомі, що належать цьому вузлу, і асоційовані з ними рівняння виключаються. При цьому додавання наступних елементів не вноситиме до них ніяких змін. В результаті гауссове виключення проводиться в щільній (фронтальній) матриці відносно невеликої розмірності, що складається з двох частин, одна з яких є повністю зібраною. Повністю зібрані рівняння відразу виключаються, і відповідна частина матриці записується на диск. Далі додається черговий скінченний елемент, і знову зібрані рівняння виключаються.

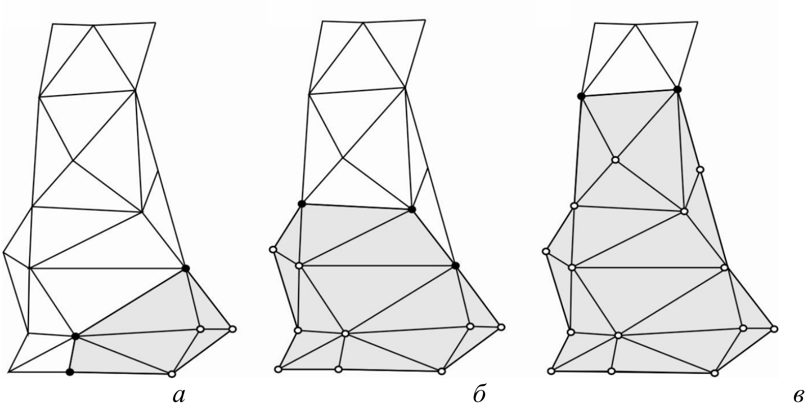


Рис. 8.12. Етапи методу Айронса (зібрана частина є затемненою):
● – вузли фронту, ○ – вузли з розв'язаними рівняннями*)*

Найвідповідальнішим моментом при використанні прямих методів є впорядкування рівнянь, націлене на зниження заповнень. В силу того, що оптимальне розв'язання проблеми є дуже затратним, на практиці використовують евристичні алгоритми, найбільш поширеними з яких є алгоритм мінімального ступеня, метод вкладених перерізів, метод паралельних перерізів і метод множинних перерізів [George & Liu, 1981].

При використанні зазначених методів впорядкування в поєднанні з технікою фронтального методу, як правило, виникає кілька фронтів, оскільки при заданій послідовності виключення вузлів скінченноелементної моделі протягом значної частини процесу збирання-виключення утворюються несуміжні групи елементів. Відповідний підхід, ефективний як для паралельних обчислень, так і для звичайних комп'ютерів, відомий як багатофронтальний (мультіфронтальний) метод. На сьогоднішній день це один з найбільш ефективних і, мабуть, єдиний метод факторизації розріджених матриць великої розмірності в програмних комплексах промислового типу [Фиалко 2009].

Розроблений С.Ю. Фіалко блоковий багатофронтальний метод відрізняється повною автоматизацією поділу вихідної конструкції на підконструкції, заснований на природному об'єднанні рівнянь в групи, асоційовані з вузлами розрахункової моделі. У цьому сенсі метод є узагальненням методу суперелементів і відрізняється від останнього автоматичним розчленуванням конструкції на суперелементи.

Не залишилися без уваги і ітераційні методи розв'язання системи розв'язувальних рівнянь МСЕ, які зазвичай застосовуються тоді, коли досліджуються дуже великі задачі будівельної механіки. Особливо це стосується задач розрахунку тривимірних об'єктів з досить густою скінченноелементною розбивкою.

Найбільшого поширення серед вдосконалених ітераційних методів, які застосовуються зараз, отримав метод сполучених градієнтів з передобумовленням. Передобумовлення - це потужний спосіб прискорення збіжності ітераційних методів. Він полягає в побудові позитивно визначеної (зазвичай симетричної) матриці, на яку множиться дана матриця коефіцієнтів, в результаті чого відбувається перехід до перетвореної матриці, число обумовленості якої повинно бути меншим, ніж у відповідної вихідної.

Відомо, що для більшості задач статичного розрахунку споруд істотний внесок в розв'язок вносять плавні складові, для задовільної апроксимації яких потрібна скінченноелементна модель з невеликим числом вузлів. Для урахування цієї особливості застосовуються багаторівневі (багатосіткові) ітераційні методи. Детальна скінченноелементна модель з високим ступенем сіткового розбиття потрібна лише для апроксимації частини розв'язку, яка швидко змінюється. Більш того, кожному «діапазону плавності» для складових розв'язку відповідає певна необхідна ступінь дискретизації скінченноелементної розрахункової схеми. У зв'язку з цим, цілком природно побудувати ітераційний процес розв'язання задачі на послідовності сіток, найдрібніша з яких збігається з самою детальною скінченноелементною розбивкою конструкції, а решта є допоміжними, причому розв'язок задачі на найбільшій сітці (моделі грубого рівня) доцільно здійснювати прямим методом.

Багатосітковий ітераційний метод розв'язання використовувався А.В. Вовкушевським [Вовкушевский, 1976], який продемонстрував значно кращу збіжність, ніж традиційні ітераційні методи. Вельми ефективний варіант багатосіткового напівітераційного методу для розрахунку тривимірних масивних конструкцій був запропонований О.Б. Золотовим, М.В. Бєлим і В.Є. Булгаковим [Золотов и др.,1985].

8.5.3. Крокова процедура

Для розв'язання нелінійних задач вже творці МСЕ в роботі 1956 року рекомендували крокову процедуру (step by step methods), що було цілком природно для розглянутої задачі динаміки, коли ця процедура застосовується для розв'язання задачі Коші.

У задачах статики ідея продовження розв'язку за параметром в обчислювальних цілях вперше була реалізована М. Лаеем [Lahaye, 1934]. Він ввів в трансцендентне рівняння параметр р таким чином, щоб при $p = 0$ можна було б легко отримати розв’язок, а при $p = 1$ рівняння перетворилося в вихідне. Просуваючись по мірі збільшення параметра p, М.Лаей запропонував будувати розв’язок для кожного значення p_i методом Ньютона-Рафсона, використовуючи розв’язок для попереднього кроку p_{i-1} в якості початкового наближення.

Інше формулювання методу належить Д.Ф. Давиденко [Давиденко, 1953], який застосував його (під назвою «метод варіації параметра») до широкого класу задач прикладної математики, які потребують розв’язання нелінійних операторних рівнянь виду $F(x,p)=0$. Він, мабуть, був першим, хто усвідомив процес продовження за параметром як рух і застосував до нього апарат диференціальних рівнянь. Ці рівняння були лінійними відносно похідних dx/dp і розв’язувались за допомогою будь-якого з відомих чисельних методів (Ейлера, Рунге-Кутта, Адамса тощо).

Найчастіше використовується метод Ейлера, який характерний тим, що в ньому не передбачена компенсація похибки обчислень, викликаної лінеаризацією нелінійних рівнянь на кожному кроці. Тому досягнення необхідної точності може бути отримано шляхом, зменшення величини приросту навантаження. Є також варіанти неявних схем інтегрування задачі Коші за параметром із застосуванням різних способів поліпшення збіжності ітераційних процесів типу методу Ньютона-Рафсона.

Незалежно від робіт Давиденка, В.В. Петровим в розвиток ідеї В.З. Власова був сформульований відомий метод послідовних навантажень для розв’язання задач геометрично нелінійного деформування оболонок [Петров, 1959]. Виходячи з припущення про малість приростів прогинів і напружень при малих приростах навантаження, В.В. Петров сформулював рекурентну послідовність лінійних крайових задач для визначення цих приростів.

Вибір параметра продовження розв’язку є головним фактором, що забезпечує можливість продовження розв’язку в околі особливих точок. У статтях [Феодосьев, 1963] і [Ворович, Зипалова, 1965], мабуть, незалежно один від одного в рамках континуальної моделі було запропоновано здійснювати продовження розв’язку вздовж кривої станів рівноваги рішень в просторі $m+1$ координат і параметра навантаження. Як параметр продовження пропонувалося використовувати довжину збільшення цієї кривої.

У задачах дискретної нелінійної будівельної механіки метод продовження за параметром, в якому в якості параметра використовується довжина дуги кривої рівноважних станів, вперше був запропонований Ріксом [Ricks, 1972] і Вемпнером [Wempner, 1971]. Наступні модифікації цього методу були виконані Крісфілдом [Crisfield, 1980]. Ним запропонована модифікація методу, в якій довжина хорди дуги кривої утримується постійною. Таким чином, розв’язок задачі відшукується на перетині істинної кривої рівноважних станів і сфери з центром в попередній обчисленій точці кривої і радіусом, рівним заданій довжині хорди.

В.І. Шалашилін і Є.Б. Кузнецов отримали математично строге доведення того, що такий вибір параметра продовження розв’язку у вигляді довжини дуги кривої, що представляє розв’язок нелінійного рівняння, є найкращим [Шалашилин, Кузнецов, 1999].

Література

Александров А.М. Расчет пологих оболочек вращения методом прямых. // Строительная механика и расчет сооружений, №1, 1968, — С. 11-14.

Александров А.В., Лещеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭЦВМ. — М.: Стройиздат, 1976 — ч.1, 248 с., ч. 2, 238 с.

Александров А.В., Метод перемещений для расчета плитно-балочных конструкций // Труды МИИТ, 1963, вып. 174.

Александров А.В., Шапошников Н.Н. Об использовании дискретной модели при расчете пластинок с применением цифровых автоматических машин // Труды МИИТ, вып.194 — М.: МИИТ, 1966.

Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел – К.: НИИ строительной механики, 1993 – 376 с.

Вайнберг Д.В., Сахаров А.С., Киричевский В.В. Вывод матрицы жёсткостных характеристик дискретного элемента произвольной формы // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1971. – Вып. 14. — С. 37–44.

Влайков Г.Г., Григоренко А.Я., Шевченко С.Н. Некоторые задачи теории упругости для анизотропных цилиндров с некруговым поперечным сечением. — К.: 2001. — 143 с.

Власов В.В. Применение метода начальных функций к расчету толстых плит. // Исследования по теории сооружений, 1961, Вып. 10, — С. 189-207.

Винокуров Л.П. Приближенные методы решения дифференциальных уравне- ний строительной механики // Труды ХИСИ, 1951. Вып. 3.

Винокуров Л.П. Прямые методы решения пространственных и контактных за дач для массивов и фундаментов. — Харьков: ХГУ, 1956. — 280 с.

Вовкушевский А.В. О решении уравнений метода конечних элементов в задачах теории упругости // Известия ВНИИГ им. Веденеева, Том 110, 1976.

Вовкушевский А.В. О вычислении напряжений при решении задач теории упругости методом конечных элементов // Известия ВНИИГ им. Веденеева, Том 133.— Л.: Энергия, 1979.— С. 18-22.

Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов.— М.: Энергия, 1981.

Ворович И.И., Зипалова В.Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // Прикл. математика и механика, 1965. Т. 29. Вып. 5. — С. 894-901.

Городецкий А.С., Гильман Г.Б. О стержневых расчетных схемах тонкостенных железобетонных конструкций // Строительство и архитектура, 1964, №10

Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. Устойчивость нелинейных механическх систем — Львів: Вища школа, 1982 —255 с.

Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ — К.: Вища школа, 1983.

Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // ДАН СССР, 1953, т. 88, №4 — С. 601-602.

Длугач М.И. Розрахункова модель методу сіток // Прикладна механіка, 1956, Т. II, Вып. 3.

Евзеров И.Д. Сходимость МКЭ в случае не принадлежащих энергетическому пространству базисных функций // Вычисления с разреженными матрицами. — Новосибирск: ВЦСО АН СССР, 1981. —С. 54-61.

Золотов А.Б., Акимов П.А. Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики — М.: Изд-во АСВ, 2004. — 200 с.

Золотов А.Б., Белый М.В., Булгаков В.Е. Полуитерационный метод решения пространственных краевых задач расчета сооружений. // Строительная механика и расчет сооружений, 1985, №6 — С. 38-40.

Канторович Л.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. // ДАН СССР, 1934.

Копысов С.П. Методы декомпозиции и параллельные схемы метода конечных элементов. Препринт ИПМ УрО РАН. — Ижевск: 1999.

Корнеев В.Г. Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости // Известия ВНИИГ им. Веденеева, Том 83.— Л., 1967 — С. 286-307.

Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1977 — 205с.

Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) — М.: Наука, 1972. — 544 с.

Масленников А.М. Приближенное решение плоской задачи теории упругости методом перемещений. // ЭЦВМ в строительной механике — Л.: Судпромгиз, 1966. — С. 183-195.

Музыченко Ю.Н. О стержневой модели метода сеток // Труды РИСИ. Строительные конструкции и строительная механика, Вып. XIX, — Ростов: 1961.

Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976 – 464 с.

Петров В.В. К расчету пологих оболочек при конечных прогибах // Научные доклады Высшей школы. Строительство, 1959, №1 — С. 27-35.

Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек — Саратов: Изд-во сарат. ун-та. 1975. — 173 с.

Постнов, В.А., Тарануха Н.А. Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций – Л.: Судостроение, 1990. – 320 с.

Расчет строительных конструкций с применением электронных машин — М.: Стройиздат, 1967— 400 с.

Резников Р.А. Решение задач строительной механики на ЭЦМ. – М.: Стройиздат, 1971. – 312 с.

Ржаницын А.Р. Представление сплошного изотропного упругого тела в виде шарнирно-стержневой системы // Исследования по строительной механике и теории пластичности — М.: Госстройиздат, 1956 —.С. 19-24.

Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов — Л.: Энергия, 1971 —214 с.

Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам — М.: Стройиздат, 1977 — 128 с.

Сахаров А.С. Модификация метода Ритца для расчета массивных тел на основе полиномиальных разложений с учетом жестких смешений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К. : Будівельник, 1974a. – Вып. 23. – С. 61–70.

Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К. : Будівельник, 1974b. – Вып. 24. – С. 147–156.

Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы – М.: Изд-во АСВ, 2005 – 736 с.

Сливкер В.И. Метод Ритца в задачах теории упругости, основанный на последовательной минимизации двух функционалов // Изв. АН СССР. МТТ, 1982, №2, — С. 57–65.

Слободянский М.Г. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости // ПММ, 1939, т. 3, вып. 1. – С. 75-82.

Смирнов А.Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений — М.: Трансжелдориздат, 1947.— 308 с.

Феодосьев В.И. Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня // Прикладная механика и математика, 1963. № 2 — С. 34—39.

Фиалко С.Ю. Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах — М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2009 — 160 с.

Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения за параметром и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.

Шапошников Н.Н. Строительная механика и ее роль в современных расчетах зданий и сооружений. // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Исследования по теории сооружений: сб. статей. Вып. 1 (XXVI), 2009 — С. 216-222.

Adini A., Clough R. Analysis of plate bending by the finite element method, Report to National Sci. Foundation, 1960.

Arantes Oliveira E.R. Theoretical Foundations jn the Finite Element Method // International Journal of Solids and Structures, 1968, Vol. 4, No. 10 — P. 929-952.

Argyris J. Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method // J. Royal Aero. Sci. Tech. 1965. Note 69 — P. 711-713.

Argyris J.H. Energy Theorems and Structural Analysis. // Aircraft Engineering. Published in a series of articles in Okt., Nov. 1954, Vol. 26 and Feb., March, Apr., May 1955, Vol. 27. Reprint: Argyris J.H., Kelsey S. Energy theorems and Structural Analysis —London: Butterworth Scientific publications, 1960 [Русск. перевод: Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций // Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем — Л.: Судпромгиз, 1961. — С. 37-293.]

Argyris J.H. Energy Theorems and Structural Analysis. // Aircraft Engineering. Published in a series of articles in Okt., Nov. 1954, Vol. 26 and Feb., March, Apr., May 1955, Vol. 27. [Русск. перевод: Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций // Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем – Л.: Судпромгиз, 1961. – С. 37-293.]

Argyris J.H. ASKA—Automatic system for kinematic analysis // Nucl. Eng. Design, 1969, Vol. 10, P. 441–455.

Aubin, J.P. Burchard H.G. Some aspects of the method of the hypercircle applied to elliptic variational problems // SYNSPADE 1970 — New York: Academic Press, 1971.

Babuska I., Zlamal M. Nonconforming elements in the finite element method with penalty // SIAM J. Numer. And., 1973, Vol. 10 — P. 863-875.

Bathe K.J., Wilson E.L., Peterson F.E. SAP IV – A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems, EERC 73/11, Earthquake Engineering Research Center, June 1993.

Bazeley G.P., Cheung Y.K. Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Triangular elements in plate bending: Conforming and non-conforming solution // Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech (Okt. 26-28, 1965) — Ohio: Wright - Petterson AFB, 1966 — P. 547-576.

Bazeley G.P., Cheung Y.K., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Triangular elements in bending—conforming and nonconforming solutions // Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80 Dayton, Ohio: Air Force Institute of Technology, 1966 – P. 547–576.

Bendixsen A. Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen — Berlin: Verlag von Julius Springer,1914.

Bogner F.R., Fox R.L., Schmit L.A. A Cylindrical Shell Discrete Element // AIAA Journal, 1967, Vol. 4. □ P. 745-750. [Русск. перевод: Богнер Ф., Фокс Р., Шмит Л. Расчет цилиндрической оболочки методом дискретных элементов // Ракетная техника и космонавтика, 1967, №4]

Brezzi F., Douglas J., Fortin M., Marini L.D. Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables. RAIRO Mod`el. Math. Anal. Numer. 1987. Vol. 21. No. 4. P. 581—604.

Brezzi F., Douglas J., Marini L.D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems // Numerische Mathematik, 1985. Vol. 47. — P. 217—235.

Brezzi F. Fortin M. Sur la methode des elements finis hybridcs pour le probleme biharmonique // Numerische Mathematik, 1975, Vol. 24 — P. 103-131.

Brezzi F. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991 — 362 p.

Cheung Y.K. Finite Strip Analysis of Bridges —Spon E&FN, 1996— 347 p.

Cheung Y.K. Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs // J of Eng Mech, ASCE, 1968, Vol. 94, No. 6. — P. 1365-1378.

Ciarlet P.G. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the plate problem // Conf. on the Numerical Solution of Differential Equations — Berlin: Springer, 1974 — P. 21-31.

Clebsch A. Theorie der Elasticitat fester Korper. — Leipzig: B. G. Teubner,1862.

Clough R.W. Early history of the finite element method from the view point of a pioneer // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004; Vol. 60. — P. 283-287

Clough R.W. The Finite Element Methods in Plane Stress Analysis // Proceedings of 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburg, PA, 1960. – P. 345-378. [Русск. перевод: Клаф Р.У. Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости // Расчет строительных конструкций с применением электронных машин – М.: Стройиздат, 1967 — С. 142-170]

Clough R.W., Wilson E.L. Early finite element research at Berkelay // Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, Aug. 4-6, 1999

Clough R.W. Stress analysis of a gravity dam by the finite element method // Proceedings of the Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal, 1962 (see also RILEM Bull. No. 19; June 1963).

Connor J., Will D. A mixed finite element shallow shell formulation // Matrix Meth. Str. Anal. Design, Univ. Alabama, 1971. — P. 105—137.

Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Bulletin of the American Mathematical Society, 1943, Vol. 49. — P. 1–23.

Crisfield M.A. Incremental/iterative solution procedures for non-linear structural analysis // Numerical Methods for Non-linear Problems. 1980. Vol. 1, — P .261-290.

Csonka P. Beitrag zur Berechnung waagerecht belasteter Stockwerkrahmen // Bautechnik/ 1962, No. 7

Demkowicz L., Oden J.T. An adaptive characteristic Petrov-Galerkin finite element method for convection-dominated linear and nonlinear parabolic problems in two space variables // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, Vol. 55, Issue 1-2, — P. 63-87.

Denke P.H. A matrix method of structural analysis // Proc. 2nd U.S. Natl. Cong. Appl. Mech, ASCE, 1954.— P. 445-457.

Duncan W.J., Collar A.R. A method for the solution of oscillations problems by matrices // Phil. Mag., 1934, Series 7, Vol. 17. — P. 865-872.

Egeland O., Araldsen P. SESAM-69: A general purpose finite element method program // Computer and Structures, 1974, Vol. 4, Issue 1 — P. 41-68.

Euler L. De motu vibratorio tympanorum // Novi Comm. Acad/ Petrop., T. X, СПб, 1789.

Fraeijs de Veubeke B. A conforming finite element for plate bending // International Journal of Solids and Structures, 1968, Vol. 4. – P. 95–108.

Fraeijs de Veubeke B., Sander G. An equilibrium model for plate bending // International // International Journal of Solids and Structures, 1968. Vol. 4. No. 4. □ P. 447—468.

Fraerijs de Veubeke. Displacement and equilibrium models in the finite element method // Stress Analisys . —New York: Wiley. 1965. — P. 145-197.

George A., Liu J. Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems— Englewood Cliffs: Prentice-Hall, NJ, 1981. — 320 p. [Русск. перевод: Джорж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений — М.: Мир, 1984 — 334 с]

Guyan R..J. Reduction of Stiffness and Mass Matrices // AIAA Journal, 1965. Vol. 3, No. 2 — P. 380

Herrmann L. A bending analysis for plates // Proc. Conf. Matrix. Meth. Str. Mech., Wright Patterson AFB, Ohio, 1965.

Hrennikoff A. Solution of problems of elasticity by the framework method // Journal of applied mechanics, 1941, Vol. 8. No 4 — P. 169–175.

Irons B., Sohrab A. Techniques of Finite Elements – Chichester: Ellis Horwood Limited, 1980 – 529 p.

Irons B.M. A frontal solution scheme for finite element analysis // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1970. Vol. 2 P. 5-32.

Irons B.M. Engineering application of numerical integration in stiffness methods // AIAA Journal, 1966, Vol. 4. – P. 20352037.

Irons B.M. Comments on 'Matrices for the direct stiffness method' by R. J. Melosh // AIAA Journal, 1964, Vol. 2, P. 403.

Irons B.M., Zienkiewicz O. C. The Isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis // Proc. Conf. Recent Advances in Stress Analysis, Royal Aeronautical Society, London, 1968.

Irons B.M., Zienkiewicz O.C., Arantes Oliveira E.R. Comment on the paper: Theoretical Foundations jn the Finite Element Method // International Journal of Solids and Structures, 1970, Vol. 6, No. 1 — P. 695-697.

Irons B.M., Draper K.J. Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending // AIAA Journal, 1965, Vol. 3, No. 5 – P. 961. [Русск. перевод: Айронс Б., Дрейпер К. Неадекватность узловых связей в решении задачи изгиба пластины методом жесткостей // Ракетная техника и космонавтика, 1965, Т. 3, №5 — С. 206-207]

Jones R.E. A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis. // AIAA Journal, 1964. Vol. 2. No. 5. – P. 821—826.

Kikuchi F., Ando Y. Some finite element solutions for plate bending problems by symplied hybrid displacement method // Nucl. Eng. and Des., 1972, Vol. 23, No 2 — P. 155-178.

Kirsch E.G. Die Fundamentalgleichungen der Theorie der Elasticitat fester Korper, hergeleitet aus der Betrachtung eines Systems von Punkten, welche durch elastische Streben verbunden sind. // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1868, Vol. 12, No. 8 (S. 481–488), No. 9 (S. 553–570), No. 10 (S. 631–638).

Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Non-linear Exact Geometry 12-node Solid-shell Element with Three Translational Degrees of Freedom Per Node // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, Vol. 88, No 13. — P. 1363 – 1389.

Lahaye M.E. Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Compter Rendus hebdomataires des séances de L'Academie des sciences, 1934, Vol. 198, No 21 – P. 1840-1842.

Langefors B. Analysis of elastic structures by matrix coefficients, with special regard to semimonocoque structures, J. Aero. Sci, 1952, Vol. 19. — P. 451-458.

Levy S. Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities and sweepback // Journal of the Aerospace Sciences, 1947, Vol. 14. — P. 547-560.

MacNeal R.H. The MacNeal Schwendler Corporation: The First Twenty Years — Buena Park, CA, Gardner Litograph, 1988.

Manderla H. Die Berechnung der Sekundarspannungen, welche im einfachen Fachwerk in Folge starrer Knotenverbindungen auftreten // Allgemeine Bauzeitung, 1880, vol. 45 — P. 27–43.

McCormick C.W. Plane Stress Analysis // Journal of the Strucrural Division, ASCE, 1963, Vol. 89, No. ST4 — P. 37-54. [Русск. перевод: Мак Кормик С.У. Решение плоской задачи теории упругости // Расчет строительных конструкций с применением электронных машин — М.: Стройиздат, 1967 — С. 142-170].

McHenry D. A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems // J. Inst. Civil Eng., 1943, Vol. 21.— P. 59–82.

Meissner C.J. A Multiple Coupling Algorithm for the Stiffness Method of Structural Analysis // AIAA Journal, 1968, Vol. 6, No. 11 — P. 2184-2185.

Melosh R.J. A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. // J. Aero. Sci. 1961, Vol. 28. — P. 34-42.

Melosh R.J. Bases for the derivation of matrices for the direct stiffness method // AIAA Journal, 1963, Vol. 1 — P. 1631-1637. [Русск. перевод: Мелош Р.Д. Основы получения матриц жесткости для прямого метода жесткостей // Ракетная техника и космонавтика, 1963, №7]

Melosh R.J. Bases for the derivation of matrices for the direct stiffness method, AIAA Journal, 1963, Vol. 1 — P. 1631–1637,.

Mohr O. Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen // Zivilingenieur, 1892, vol. 38 — P. 577–594; 1893,vol. 39 — P. 67–78.

Mote C.D. Global-local finite element // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1971, Vol. 3 — P. 565-574

Oden J.T. A general theory of finite elements – II. Applications // Int. J. Numer. Meth. Engrg, 1969, Vol. 1, No 3 — P. 247-260.

Oden J.T. Numerical formulation of a class of problems in nonlinear viscoelasticity // Advan. Astronautical Sci., 1967, Vol. 24.

Oden J.T. Some contributions to the mathematical theory of mixed finite element approximation // Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis — Tokyo: University of Tokyo Press, 1973. — P. 3-23.

Oden J.T., Reddy J.N. Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1973,Vод .6, No 1— P. 55-61.

Oden J.T., Reddy J.N. Some observation on properties of certain mixed finite element approximations // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1975. Vol. 9. No. 4. —P. 933—938.

Ostenfeld A. Berechnung statisch unbestimmter Systeme mittels der “Deformationsmethode”// Der Eisenbau, 1921, vol. 12, No. 11 — P. 275–289.

Papenfuss B.W. Lateral plate deflection by stiffness matrix methods with application to a marquee, M.Sc. thesis, Dept. Civil Engng, Univ. of Washington, Seattle, 1959.

Pian T., Tong P. Basis for finite element methods for solid continua // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1969. Vol. 1. No. 1P. 3—28.

Poceski A. A mixed finite element method for bending of plates // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1975. Vol. 9. No. 1. — P. 3—15.

Poceski A. From deformation to mixed and hybrid formulation of the finite element method // J. Theor. App. Mechanics, Yug ociety of Mechanics, Belgrade, 1979. No. 5.

Poceski A., Simonee V. Metodot na koneeni elementi i hegovata primena // Gradezen fakultet, Skopje 1972.

Prato C. A mixed finite element method for thin shell analysis // Ph. D. Th. Dept. Civil Eng. MIT, 1968.

Przemieniecki J.S. Matrix Structural Analysis of Substructures // AIAA Journal, 1963, Vol.1 – P. 138-147.

Przemieniecki J.S. Theory of matrix structural analysis. — N.Y.: McGaw-Hill, 1968.

Przemieniecki J.S., Denke P.H. Joining of Complex Substructures by the Matrix Force Method // J. Aircraft, 1966, Vol.3. – P. 236-243.

Rand T. An approximate method for computation of stresses in sweptback wings // Journal of the Aerospace Sciences, 1951, Vol. 18. — P. 61-63.

Riedel W. Beitrage zur Losung des ebenen Problems eines elastischen Korpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 1927, Vol. 7, No. 3. — P. 169–188.

Ricks E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability // Trans. ASME. 1972. E39, N4. — P. 1060-1065. (Рус. пер: Рикс. Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости // Прикл. механика. 1972. №4. — С 204-210).

Riks E. Some computational aspekt of the stability analysis of nonlinear structures // Conp. Method Appl. Mech. Eng., 1983, Vol. 47 — P. 219-259.

Robinson J. Structural Matrix Analysis for the Engineer. – New York: John Wiley & Sons, 1966. – 344 p.

Strang G., Fix G. An analysis of the finite element method — New York Prentice-Hall, 1973 — 414 p. [Русский перевод: Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов — М.: Мир, 1977 — 349 с.].

Szabo B.A., Lee C.C. Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Galerkin's methods // Int. J. Numer. Meth. Engrg, 1969, Vol. 1, No 3 — P. 301-310.

Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures // Journal of the Aerospace Sciences, 1956. Vol. 23. No. 9. — P. 805-824.

Turner M.J., Martin H.C., Weikel R.C. Further development and applications of the stiffness method // AGARDograph 72: Matrix Methods of Structural Analysis — Oxford: Pergamon Press, 1964. — P. 203-266.

Wempner G.A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids // International Journal of Solids and Structures, 1971.Vol. 7, — P.1581-1599.

Wilson E. L. Matrix Analysis of Nonlinear Structures // Proc. 2nd ASCE Conf. On Electronic Computation, Pittsburg, Pa. Sept. 1960.

Wilson E.L. SAP-A General Structural Analysis Program, UCB/SESM Report No. 70/21, University of California, Berkeley, 1970.

Wilson E.L. Automation of the finite element method, a personal historical view. // Finite Elements in Analysis and Design, vol. 13. — Amsterdam: Elsevier, 1993. — P. 91-104.

Winkler E. Die Sekundar-Spannungen in Eisenkonstruktionen // Deutsche Bauzeitung, 1881, vol. 14 — P. 110–111, 129–130 & 135–136.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Fifth edition. Vol. 1. The Basis — Oxford: Butterworth-Heineann, 2000 — 689 p.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Fifth edition. Vol. 2. Solid Mechanics. — Oxford: Butterworth-Heineann, 2000 — 457 p.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Fifth edition. Vol. 3. Fluid Dynamics. — Oxford: Butterworth-Heineann, 2000 — 334 p.

Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K. Finite Element Method of Analysis for Arch Dam Shells and Comparison with Finite Difference Procedures // Proc. Symp. on Theory of Arch Dams, Univ. Southampton. (Theory of Arch Dams, Pergamon Press, 1965) — P. 123-139.

Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K. The Finite Element Method in Engineering Science — London: McGraw-Hill, 1967. — 272 p. [Русск. перевод: Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред — М.: Недра, 1974 — 240 с.]

Нарис 9

ЕТАПИ РОЗВИТКУ ЗАДАЧ СИНТЕЗУ В ТЕОРІЇ СПОРУД

Le mieux est l'ennemi du bien (краще — ворог хорошого)

Вольтер

Справжній інженер повинен вірити своєму оку більш, ніж будь якій формулі; він повинен пам’ятати слова натураліста і філософа Гекслі: «Математика, як жорно, перемелює те, що під нього засипають», — і ось на цю засипку перш за все інженер і повинен дивитися.

О.М. Крилов

Вступ

Як зазначив відомий іспанський архітектор і інженер Едуардо Торроха [Torroja, 1967] «*Кращою спорудою є та, надійність якої забезпечується головним чином за рахунок її форми, а не за рахунок міцності її матеріалу*». При проектуванні будівельних конструкцій перед інженером постає задача дотримання таких вимог як міцність, жорсткість, стійкість, довговічність, економічність, технологічність, тривалість термінів проектування і будівництва, використання певних ресурсів і матеріалів. Всі ці вимоги мають досить суперечливий характер, тому оптимізація проекту є головною метою кожного інженера, який прагне створити окремий елемент, конструкцію або споруду, що задовольняють певним критеріям.

Проблеми оптимального проектування давно привертають велику увагу, їм присвячена значна кількість робіт, а історія розвитку оптимального проектування налічує вже майже чотири століття і походить від основної для будівельної механіки роботи Галілео Галілея [Galilei, 1638]. Даний нарис не ставить собі за мету дати вичерпну історію розвитку проблеми з усіма її відгалуженнями в різноманітні області та додатки. Звісно ж, що самостійний інтерес може становити історія виникнення та розвитку основних ідей, яку можна проілюструвати зупинившись, головним чином, на стержневих системах, які довгий час були єдиним об'єктом дослідження в будівельній механіці.

Більш того, навіть серед стержневих систем можна виділити ферми, які мають ту особливість, що кожен елемент системи характеризується тільки одним параметром, а саме площею поперечного перерізу (аналогічна ситуація реалізується в разі тришарових систем, які піддаються згину, якщо товщина заповнювача задана, а визначенню підлягають однакові зверху і знизу товщини несучих пластин [Prager, Taylor, 1968]). Ця особливість суттєво спрощує аналіз і саме на фермах відпрацьовувалися основні прийоми розв’язання задач оптимізації. Такого роду підхід дозволяє описати історію розвитку в "чистому" вигляді, тобто без впливу багатьох додаткових факторів, важливих з практичної точки зору, але суттєво ускладнюючих аналіз.

Сказане не означає, що інші задачі оптимізації в якомусь сенсі є другорядними. Більш того, цілі класи задач оптимізації, наприклад, такі, як пошук оптимальної конфігурації тривимірного пружного тіла [Баничук, 1980] або відшукання оптимального обрису поверхні тонкої оболонки [Banichuk et al., 2005], які залишаються за межами розгляду, є дуже важливими. Але задачі такого роду, де конструкція описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, пов'язані з математичними ідеями іншого роду і в цьому сенсі лежать трохи осторонь від тематики цього нарису. Виняток становлять лише ті варіанти згаданих задач, де використовується перехід до дискретних змінних, наприклад, шляхом застосування методу скінченних елементів.

9.1. Обернена задача будівельної механіки

Класична теорія споруд традиційно орієнтована на аналіз напружено-деформованого стану. Однак здавна поряд з цим напрямом були присутні елементи синтезуючого напряму, пов'язаного з такими проблемами як оптимальне проектування і як розв’язання обернених задач будівельної механіки. Зазначені проблеми не еквівалентні, оскільки при розв’язанні обернених задач будівельної механіки може бути відсутньою мета щодо досягнення деякого найкращого (оптимального) розв’язку або відшукання для даної системи деякої екстремальної якості.

Напружено-деформований стан деякої системи (для простоти обмежуємося стержневими конструкціями), пошук якого є прямою задачею будівельної механіки, можна знайти якщо відомі:

- топологічна схема і геометричні розміри конструкції;
- опорні закріплення і інші умови зв'язку;
- типи перерізів і їх розміри;
- фізична модель роботи матеріалу;
- зовнішні впливи.

Всі ці дані визначаються деяким набором параметрів, і якщо не всі вони задані, то можна задатися деякими елементами напружено-деформованого стану, а решту його елементів і невідомі параметри конструкції підібрати так, щоб задач виявилося повністю розв’язаною. Така задача будівельної механіки називається оберненою.

Обернена задача часто не має однозначної відповіді і її умови може задовольняти ціла множина значень розшукуваних параметрів. У цих випадках умови оберненої задачі часто доповнюють вимогою вибору найкращого в деякому сенсі варіанту розв’язання, і виникає задача оптимального проектування.

Найчастіше відшукується розв’язок, оптимальний з точки зору витрат матеріалу або з іншим економічним показником. Але в оберненій задачі не обов'язково виходять з умови оптимальності, тут для пошуку шуканих параметрів часто використовують умови приналежності до певного класу систем з деякими бажаними властивостями (рівноміцність, сталість розподілу по системі пружної питомої деформації, вимога про належність частот власних коливань до деякого бажаного діапазону тощо).

Однак необов'язковість не є умовою відсутності, тому відомі зворотні задачі, в яких невідомі параметри відшукуються для системи з екстремальними властивостями, і це не обов'язково властивості мінімуму ваги або вартості. Типовим прикладом може слугувати задача про пошук системи з заданою витратою матеріалу, яка витримує максимальне навантаження (так звана задача складування). Або можна ще назвати приклад задачі про пошук місць установки додаткових опор (з числа заздалегідь дозволених позицій), які максимально збільшують критичне навантаження втрати стійкості.

Якщо ж говорити про економічні цілі, то є цілий ряд задач, які послідовно ускладнюють і уточнюють постановку, утворюючи ланцюг: мінімум обсягу (ваги), мінімум вартості матеріалу, мінімум собівартості конструкції, мінімум початкових і експлуатаційних витрат протягом усього життєвого циклу. Але корисно відзначити, що всякого роду уточнення цільових показників не завжди істотно позначається на результаті, тому тут доречно вдатися до вельми цікавого зауваженням, зробленого в книзі [Хог, Арора, 1983] щодо реакції інженера і математика на результат оптимізації. В якості прикладу автори наводять відому задачу про оптимальну висоту сталевої двотаврової балки, для якої показано, що зміна оптимальної висоти h_{opt} на 20% в ту або іншу сторону призводить до збільшення маси її погонного метра всього на 3 ... 4%.

З точки зору математика нев'язка відраховується по осі h і тому точки $0{,}8h_{opt}$ та $1{,}2h_{opt}$ розглядаються як дуже грубе наближення через їх значне віддалення від глобального мінімуму функції мети (рис. 9.1). А з точки зору інженера чотиривідсоткове відхилення від глобального мінімуму функції мети можна вважати хорошим наближенням до оптимального проекту і, з огляду на прийнятність для практики отриманого результату, проектувальник не повинен упускати цю сприятливу можливість при виборі розв'язку поставленої задачі проектування.

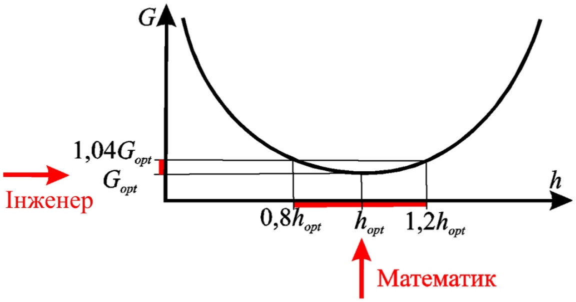


Рис. 9.1. Дві точки зору на задачу оптимізації

Ця ідея, мабуть, вперше була висловлена і широко розглядалася В.М. Гордєєвим, який запропонував замість відшукання точки екстремуму розшукувати, а потім більш детально аналізувати всю множину розв'язків, що примикають до цієї точки [Гордеев, 1974, 1987], [Шимановский, Гордеев, Гринберг, 1987]. Оскільки більшість реальних оптимізаційних задач мають «пологий екстремум», тобто навіть помітний відступ від ідеального розв'язку не набагато змінює значення цільової функції, то існує можливість, не виходячи з простору розв'язків, близьких до оптимального, враховувати додаткові умови, які важко формалізуються (наприклад, дискретність деяких параметрів).

9.2. Початок шляху

Спроби розв'язання задач оптимізації робилися ще в давнину. Так, вже у часи Піфагора було відомо, що фігура, яка має найменше відношення периметра до площі - це коло. У 1638 р. Галілей, який поклав початок науці про міцність, продемонстрував параболічну форму балки рівного опору [Galilei, 1638]. При цьому використовувалася ідея рівнонапруженості, яку Галілей, очевидно, вважав цілком природною для розглядуваної задачі, і яка в майбутньому знайшла собі численних послідовників.

У 1807 р. Томас Юнг вказав, що оптимальна форма шарнірно опертої балки є даремною через її нульову висоту на опорах. Він запропонував визначити форму

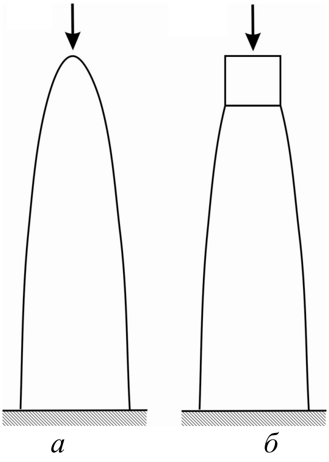


Рис. 9.2. Розв’язок задачі

балки на ділянці, суміжній з опорою, за допомогою тангенса кута нахилу до теоретичної лінії обрису зігнутої балки, передбачивши деякою мірою формулу Журавського для поперечної сили [Young, 1807].

Але перша, чітко сформульована задача оптимального проектування стержневих конструкцій була поставлена і розв’язана Лагранжем в 1770 - 1773 рр. Це була задача про колону найменшої ваги, жорстко затиснену на одному кінці і завантажену стискаючою силою на іншому [Lagrange, 1773].

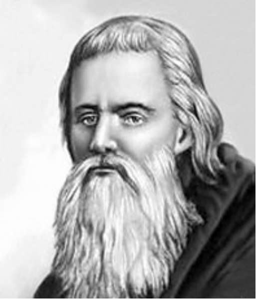
Потрібно було визначити форму колони, що відповідає мінімуму ваги при заданій поздовжній силі. Розв’язок Лагранжа був помилковим, і неточність, яка в ньому містилася, була усунена лише через вісімдесят років в роботі російського академіка Т. Клаузена [Clausen, 1851], який найшов оптимальну форму колони (рис. 9.2, а), у якій при наближенні до вершині стержня товщина прямує до нуля, а напруження необмежено зростають. Для усунення цієї особливості Е.Л. Ніколаї [Николаи, 1907] ввів додаткові обмеження на величини допустимих напружень. Отриманий в цьому випадку розподіл товщини представлений на рис. 9.2,б. Продовжили дослідження цієї задачі М.Г. Ченцов [Ченцов, 1936] та ін.[1] Було проведено докладне дослідження даної задачі для різних типів стержнів і умов закріплення. При цьому були розглянуті як зазначена задача мінімізації ваги стержня при фіксованій величині сили втрати стійкості, так і двоїста до неї задача максимізації критичної сили при заданому об’ємі.

Підхід Лагранжа, коли явно формулюється задача пошуку механічної системи, яка має певні наперед задані властивості (в даному випадку мінімальну вагу), дозволяє вважати Лагранжа засновником напряму в будівельній механіці, орієнтованого на розв’язання задач синтезу. Крім того, використання Лагранжем варіаційного числення для розв’язання таких задач надовго визначило панування цього методу при розв’язанні задач синтезу.

Роботи Галілея та Лагранжа мали академічний характер і жодним чином не були орієнтовані на технічне застосування. Ця ситуація зберігалася ще дуже довго, і задачі синтезу були скоріше деякими вправами у варіаційному численні, яке швидко розвивалось.

---

[1] У повоєнні роки задача Лагранжа стала популярною в США. Кліффорд Трусделл, не знаючи про Т.Клаузена і його російських послідовників, запропонував задачу Лагранжа американським вченим Дж. Келлеру і Г. Вайнбергеру. Обидва вчених з цим завданням успішно впоралися. Однак робота Г. Вайнбергера залишилася неопублікованою, а Дж. Келлер не тільки повторив рішення Клаузена, але і показав, що для опуклих поперечних перерізів оптимальна колона має форму рівностороннього трикутника.



Іван Петрович Кулібін *(1735-1818) рос. Иван Петрович Кулибин*

Але був один виняток, який пов'язаний з інтересом до розрахунку мостових склепінь, що стимулював дослідження арочних систем. Одним з найбільш цікавих питань теорії арок є питання про так звану раціональну форму осі арки, тобто про підбір найвигідніших геометричних параметрів осі арки і її поперечних перерізів. Це питання дуже давно привертає до себе увагу інженерів і породило велику літературу.

Одним з яскравих прикладів може служити проект моста через Неву, представлений у 1772 році І.П. Кулібіним. Він прийняв обрис арки за формою експериментально вивченого їм мотузкового багатокутника, справедливо вважаючи, що арка такої форми буде працювати тільки на осьовий стиск. Слід зауважити, що це судження Кулібіна не можна вважати піонерним. Більш ніж за сто років до Кулібіна фахівець з експериментів Королівського товариства Роберт Гук опублікував анаграму яка розшифровувалась наступним чином: “*Як провисає гнучка лінія, такою ж, але в перегорнутому вигляді, буде жорстка арка*” [Hooke, 1675].

Першу спробу аналітично визначити обрис арки по кривій тиску зробив в 1787 році Салімбені, однак його розв’язок містив помилку, оскільки він вважав, що крива тиску збігається з віссю склепіння при будь-якій його формі [Salimbeni, 1787]. Минуло ще приблизно шістдесят років, поки Вілларсо правильно розв’язав задачу про створення склепіння, вісь якого збігається з кривою тиску [Villarceau, 1846].

Вже на початку XX століття було розв’язано багато задач про оптимальні арки. Особливо інтенсивно досліджувалося питання про визначення раціональної осі арки заданого прольоту і заданої стріли підйому, при якій необхідні за умовами міцності поперечні перерізи арки будуть найменшими [Белзецкий, 1904, 1907]. Подальші дослідження цієї задачі уточнювали її постановку. Так, наприклад В.І. Руднєв висунув нову точку зору щодо раціональної осі, встановивши для арок скінченної товщини відмінність між обрисом по кривій тиску, уздовж якої $M = 0$, але $Q \neq 0$, обрисом по векторіальної кривої, уздовж якої $Q = 0$, але $M \neq 0$, і обрисом по проміжній кривій. Для тонкої арки можна шукати обрис по мотузковій кривій, уздовж якої $M = 0$ і $Q = 0$. Для ряду інтегрованих випадків В.І. Руднєв вивів рівняння цих кривих, що належать до симетричних арок з вертикальним навантаженням [Руднев, 1930].

Дослідження, присвячені пошуку раціонального обрису вісі арки, були продовжені в роботах [Смирнов, 1950], [Филин, 1953], [Киселев, 1953], [Гуревич, 1954] та ін. Але задача про арку була не єдиною, з числа оптимізаційних, якими цікавилися дослідники в кінці XIX і в першій половині XX століття. Так, наприклад, інженер Г.С. Семіколенов стосовно нерозрізних балок ставив задачу «... *придумати таку систему влаштування мостових покриттів, щоб уникнути невигод, представлених ними, і по можливості зберігати їх істотну вигоду, заощадження в матеріалі*» [Семиколенов, 1871]. У своїх «урівноважених» багатопрольотних балках він відшукував місця оптимального розміщення шарнірів, поліпшивши таким чином консольно-балочну систему мостів, запропоновану Гербером [Gerber, 1866].

У зв'язку з розробкою сортаментів металопрокату великий інтерес викликала проблема оптимізації форми поперечного перерізу стержня, що піддається згину. Однією з перших була опублікована робота Е.Р. Пацкевича [Пацкевич, 1894], в якій автор вперше обґрунтував загальний метод аналізу профілів і створив основи теорії сортаменту. Користуючись питомим моментом опору $k = W / A^{3/2}$, Е.Р. Пацкевич встановив, що «*балка тим краще працює на згин, чим більшим є k і що за k можна перевірити не тільки міцність, але і раціональність перерізу*». Розглядаючи профілі з рівними питомими моментами опору, автор робить висновок, що подібні профілі представляють частинний випадок профілів рівного питомого опору. Рівність питомих моментів опору обумовлена рівністю відношень лінійних розмірів (питомі моменти опору залежать лише від форми профілю). Пізніше підхід Е.Р. Пацкевича з деякими вдосконаленнями застосував Ф.С. Ясинський, який використовував його при створенні Російського нормального метричного сортаменту [Ясинский, 1900]. У 1924 році Н.П. Пузиревський вводить важливе поняття про теоретичну вагу споруди, яке відіграло важливу роль в подальших дослідженнях [Пузыревский, 1924].

Досить близьким до даної проблеми є пошук закономірностей, які можна знайти при вивченні вже побудованих споруд різного типу. Так систематичне зіставлення різних схем мостових споруд з метою вибору найкращого рішення почалося з роботи Е. Колінгтона [Collington, 1865], аналіз був продовжений в роботах Гейнцерлінга [Heinzerling, 1867], Дірксена [Dirksen, 1905], Н.Б. Богуславського [Богуславский, 1907], Є.О. Патона [Патон, 1914], М.С. Стрілецького [Стрелецкий, 1925]. Зокрема, у згаданій роботі М.С. Стрілецького, в основу якої покладено аналіз проектних рішень 320 мостів, були висловлені і деякі загальні теоретичні положення, які були пізніше розвинені стосовно споруд інших типів як самим автором, так і вченими його школи.

Цей напрямок досліджень в якійсь мірі є не теоретичним, а експериментальним, оскільки можна вважати, що кожна реальна споруда є одиничним, хоча і спеціально не запланованим експериментом, спрямованим на дослідження закономірності поведінки всієї сукупності однотипних конструкцій. Велика кількість такого роду експериментальних даних дозволяє їх використовувати для виявлення прихованих закономірностей.

Сам процес проектування в значній мірі є неформалізованим експериментом в сенсі розв’язання певної конкретної задачі. Дані зазначених експериментів з давніх часів склали фонд для вибору раціональних дій, хоча такі експерименти, взагалі кажучи, призводять до випадкових результатів, і час, присвячений марним або невдалим експериментам, іноді становить сотні років. Наприклад, пошук раціональної схеми для решіток мостової ферми був тривалим процесом, який почався з римських дерев'яних арок, пройшов через велику кількість дивних форми, таких як схеми Боллмана, Фінка та Лонга [Перельмутер, 2016], і нарешті прийшов до сучасних структур.

9.3. Виникнення теорії

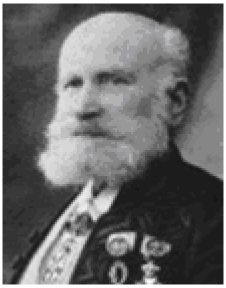
Згадані вище дослідження були розрізненими спробами підійти до створення якоїсь більш-менш загальної теорії оптимізації, теорії, потреба в якій почала відчуватися в 20-х роках XX століття і яка вже неявно, в зародковому вигляді спостерігається, наприклад, в роботах по дослідженню закономірностей, властивих побудованим раніше спорудам.

9.3.1. Рівноміцність і метод заданих напружень

В основу такої теорії була покладена ідея рівноміцності, або конструкції, у якій для всіх розрахункових перерізів вимога міцності виконується в формі рівності (реалізуються задані напруження). Тобто метою синтезу конструкції оголошувалося досягнення рівноміцності.

Попередником зазначеного підходу можна вважати Моріса Леві. В роботі [Levy, 1874] він встановив, що об'єм стержнів статично невизначуваної рівноміцної ферми буде таким же, як у стержнів статично визначуваної ферми, утвореної із заданої шляхом видалення зайвих в'язей. Крім того в цій роботі було показано, що теоретична вага рівноміцної ферми пропорційна потенціальній енергії деформації.

Варто відмітити, що сам Леві, досліджуючи властивості рівноміцної конструкції, не припускав, що пошук таких конструкцій може стати досить загальним підходом до проблеми оптимізації, деяким новим методом будівельної механіки.

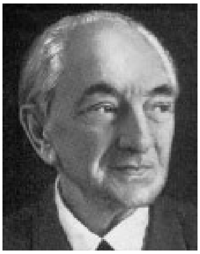


Моріс Леві *(1838-1910)*
фр. Maurice Lévy

Нагадаємо, що поняття рівноміцності ввів ще Г. Галілей, який визначив форму рівноміцної балки. Їм розглядався випадок згину консольної балки під дією зосередженої сили, яка прикладена до вільного кінця, і було показано, що умова рівноміцності виконується, якщо висота балки h змінюється за параболічним законом. Як виявилося згодом, задача про форму балки мінімальної ваги за умови, що нормальні напруження не перевищують заданої величини σ_0, зводиться до задачі, розв'язаної Г. Галілеєм. Таким чином, рівноміцна консольна балка в той же час є балкою мінімальної ваги. Були знайдені і інші приклади, коли умова рівноміцність забезпечує мінімальну вагу конструкції.

Ця обставина значною мірою визначила інтерес до відшукання рівноміцних конструкцій – задачі, яка має сенс у випадку одного навантаження.

Перші загальні роботи в області пошуку рівноміцних стержневих конструкцій належать А. Піппарду [Pippard, 1922] і Г. Гейману [Heimann, 1928]. Вони містять рецептурне описання методу розрахунку статично невизначуваних ферм, який полягає в тому, що задаються зусилля в зайвих (умовно необхідних) стержнях, з урахуванням яких перерізи всіх інших стержнів підбираються з умови рівності напружень в них граничному значенню. Таким чином ферма (за винятком зайвих стержнів) виявляється «повнонапруженою». Ні Піппард, ні Гейман не помітили можливість отримання суперечливого розв'язку, коли розрахована таким способом ферма отримує знаки зусиль в зайвих стержнях, протилежні заданим.



Ісаак Мойсеєвич Рабінович
(1886-1977)
рос. Исаак Моисеевич Рабинович

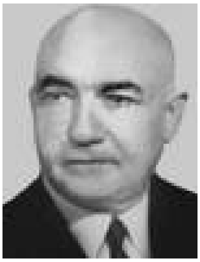
Повне обґрунтування методу і аналіз його як позитивних, так і негативних сторін були виконані в класичній праці І.М. Рабіновича, опублікованій в 1933 році. Монографія [Рабинович, 1933] справила величезний вплив на подальший розвиток синтезуючого напрямку в будівельній механіці. У ній були вивчені питання зміни деформацій, зусиль і площ поперечних перерізів стержнів і встановлені межі таких змін. Критерієм оптимальності була рівноміцність основних стержнів. Було доведена важлива пропозиція про можливість створення ферми найменшої ваги за умови використання попереднього напруження (значно пізніше цей результат був перевідкритий заново Хофмейстером і Фелтоном [Hofmeister & Felton, 1979]).

Була узагальнена теорема Моріса Леві про утворення статично невизначеної ферми найменшої ваги шляхом її перетворення в статично визначену за рахунок обернення на нуль зусиль в деяких умовно необхідних стержнях. Детально розібрані випадки виникнення протиріч при невдалому завданні зусиль в зайвих стержнях. Нетривіальною проблемою, що виникла в зв'язку з методом заданих напружень, була наступна. Оскільки для статично невизначуваних систем пропонувалося задатися зусиллями в зайвих стержнях, то слід знати допустимі границі їх зміни (вихід за ці границі приводив до від'ємних значень площ). Деякі рекомендації з цього приводу дано в 1938 році Хуберяном [Хуберян, 1938], який розвивав метод заданих напружень. Пізніше до проблеми допустимих меж зверталися і інші дослідники [Слюсарчук, 1952], [Ізраеліт, 1956].

Олексій Іванович Виноградов
(1912- 1974)
рос. Алексей Иванович Виноградов

Інша проблема методу заданих напружень пов'язана з необхідністю оперування абсолютними значеннями зусиль, оскільки саме від них залежали значення шуканих геометричних характеристик перерізів (площ, моментів опору тощо). Цій проблемі зобов'язані своєю появою «модулярні функції» Ю.А. Радцига [Радциг, 1946], за допомогою яких розв’язувалася задача про найвигідніше виключення зайвих в’язей, а також «функції змін знака» у О.І. Виноградова [Виноградов, 1948], що визначають місця нульових точок епюри моментів в оптимальних стержневих системах з переважаючим згином.

О.І. Виноградов вперше вирішив питання про розрахунок за заданими напруженням на дію тимчасових навантажень і вперше ввів поняття про найвигідніші лінії впливу. Він і надалі інтенсивно розвивав теорію обернених задач, використовуючи введене ним в обіг поняття про множину конструкцій з заданим контуром осей, серед якої розшукується найвигідніший (з точки зору мінімізації ваги) розподіл внутрішніх зусиль. Було доведено, що мінімум досягається на деякій підмножині основної множини, при цьому можуть реалізуватися не тільки системи без зайвих в'язей, а й деякі статично невизначувані рішення без попереднього напруження [Виноградов, 1954].



Костянтин Михайлович Хуберян
(1911-1994)
рос. Константин Михайлович Хуберян

Крім досліджень Виноградова ряд робіт, що розвивають метод заданих напружень, був виконаний К.М. Хуберяном. У своїй роботі [Хуберян, 1938] він запропонував при розробці практичної схеми розрахунку зберегти найвигідніший розподіл напружень, відмовившись від найвигіднішого розподілу зусиль. В іншій його роботі [Хуберян, 1949] метод розрахунку ферми по заданих напруженнях був поширений на багаторазово статично невизначувані ферми при постійному і при тимчасовому завантаженні. Пізніше К.М. Хуберян вивчав застосування методу заданих напружень до ферм з хрестоподібною решіткою і знайшов значне спрощення задачі для розглянутого їм окремого випадку [Хуберян, 1951].

Отже, статично невизначувана ферма мінімальної ваги може бути реалізована тільки у виняткових випадках, на відміну від конструкцій, елементи яких знаходяться в неоднорідному напруженому стані. Такі конструкції завжди можна зробити рівноміцними, якщо міняти форму поперечного перерізу елементів [Гольдштейн, Соломещ, 1980]. Правда, при цьому можуть бути отримані конструкції вельми екзотичного виду.

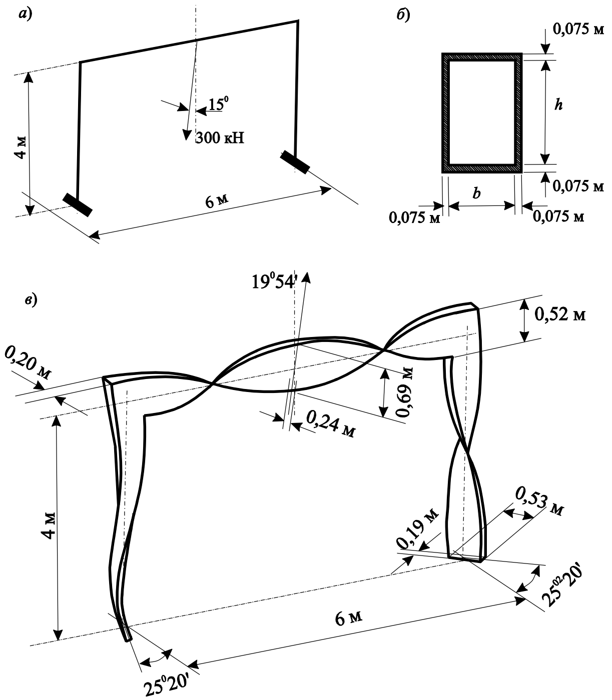


Рис. 9.3. Оптимальний розподіл матеріалу вздовж вісі рами

Приклад проектування портальної рами, для якої розшукуються розміри поперечного перерізу, і орієнтація його головних осей, показані на рис. 9.3 (*а* - схема рами, *б* - тип поперечного перерізу, *в* – розв'язок задачі).

Якщо ж відмовитися від пошуку кута повороту перерізу, вважаючи напрям головних осей фіксованим, то також можна знайти рівноміцний розв'язок, який виявляється на 23,4% важчим.

Поряд із умовою рівноміцності як критерій раціональності конструкції стали використовувати умови рівностійкості, сталості питомої потенціальної енергії пружної деформації тощо.

9.3.2. Енергетичний підхід

Енергетичні характеристики оптимальних конструкцій можуть бути використані як критерії, що забезпечують мінімальну вагу, і служити основою для побудови методів їх синтезу. При цьому задача про пошук мінімуму замінюється задачею про синтез систем з наперед заданими властивостями.

Так, наприклад, для повністю напруженої фермової конструкції, у якій площа поперечного перерізу будь-якого стержня виражається через зусилля в ньому N_i і допустиме напруження σ_0 як $A_i = |N_i|/\sigma_0$, потенціальна енергія деформації дорівнює

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \int_l \frac{N_i^2}{EA_i}\,dx = \frac{1}{2}\sum_i \frac{|N_i| l_i \sigma_0}{E},$$

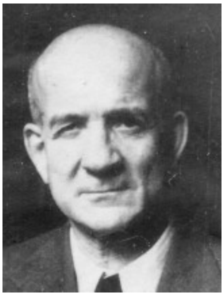
а її об'єм дорівнює

$$V = \sum_i A_i l_i = \sum_i \frac{|N_i| l_i}{\sigma_0}.$$

Порівнюючи ці вирази, неважко помітити, що $U = kV$, де $k = \sigma_0^2/2E$. На факт пропорційності, мабуть, вперше звернув увагу Мічелл [Michell, 1904]. Цей зв'язок став відправною точкою для А.І. Кефели для обчислення найменшого теоретичного об'єму ферми, який визначався з умов мінімуму енергії деформації [Кефели, 1927].

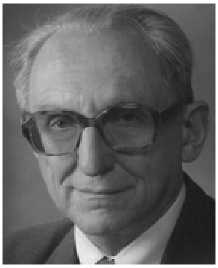
Крім умови пропорційності було виявлено, що мінімум об'єму можна отримати, якщо вдається досягти рівномірного по конструкції розподілу питомої потенціальної енергії деформації. Дійсно, постійний для всієї конструкції коефіцієнт $k = \sigma_0^2/2E = (\sigma_0/E)(\sigma_0/2) = \sigma_0\varepsilon/2$ дорівнює густині потенціальної енергії деформації.

Але дослідження Кефелі не знайшли тоді свого продовження і тільки через десятиліття книга З. Васютиньского [Wasiutynski, 1939] поклала початок цілої серії робіт в області теорії оптимальних систем, які базувались на зв'язку між перерозподілом матеріалу в пружній лінійно деформованій системі і потенціальною енергією деформації. З. Васютиньский поставив собі за мету розв'язати задачу проектування конструкції як задачу на мінімум потенціалу пружних деформацій при зберіганні постійного об'єму матеріалу [Wasiutynski, 1950].



Збігнєв Васютиньский
(1902-1974)
пол. Zbigniew Wasiutyński

Цей напрям дозволив також вивчати питання синтезу інженерних споруд, чому був присвячений ряд цікавих робіт групи польських вчених, очолюваних З. Васютиньскім (див., наприклад, [Brandt et al., 1957], [Brandt & Ignaczak, 1958], [Biernawski & Grochowski, 1960], [Grycz, 1960] та ін.). Велике значення для узагальнення результатів, виявлених спершу для фермових конструкцій, мала робота Мазура [Masur, 1970], в якій доведено, що міцність пружної конструкції заданої ваги є мінімальною, якщо питома енергія деформації в «розрахункових волокнах» постійна по всій системі. При цьому під розрахунковими волокнами розуміють нескінченно малі ділянки поперечного перерізу, на напружений стан яких мають вплив малі зміни параметрів конструкції. Деякі роботи з оптимізації лише за формою відрізнялися від досліджень, в яких оптимізація пов'язана з потенціальною енергією деформації.



Анджей Брандт
пол. Andrzej M. Brandt

Так А.О. Комаров проводив свої дослідження, виходячи з ідеї, що будь-яка конструкція призначена для сприйняття деяких зовнішніх навантажень і передачі їх на опорні закріплення, і, отже, вигідність проектованої силової схеми буде залежати від величини зусиль, що передаються, і від довжини шляхів, за якими відбувається ця передача [Комаров, 1952, 1965].

У зв'язку з цим порівняння варіантів силової схеми здійснювалося через особливу характеристику конструкції – її "силову вагу" M. Вона одночасно враховує обидві якості передачі сил – величину і протяжність дії внутрішніх зусиль в конструкції. І чим меншою є її величина, тим досконаліша силова схема.

Однак, як кажуть, нове – це ґрунтовно забуте старе. Майже на сто років раніше К. Калман [Calmann, 1866] запропонував розташовувати вузли ферми таким чином, щоб мінімізувати величину $M = \sum |N_i| l_i$. Але величина силової ваги M пропорційна потенціальній енергії. Дійсно, вираз для енергії

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \frac{N_i^2 l_i}{EA_i} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{N_i^2 l_i A_i}{EA_i^2} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\sigma_i^2 l_i A_i}{E}$$

при рівності всіх напружень граничному значенню σ_0 набуває вигляду

$$U == \frac{1}{2}\sum_i \frac{\sigma_0^2 A_i l_i}{E} = \frac{\sigma_0}{2E}\sum_i \sigma_0 A_i l_i = \frac{\sigma_0}{2E}\sum_i N_i l_i \, .$$

Таким чином, роботи А.О. Комарова також слід віднести до енергетичного напрямку оптимізації. В цілому ж використовуваний в рамках цього напрямку критерій постійної щільності розподілу енергії реалізує мінімум ваги в тих випадках, коли є лінійна залежність критерію якості (цільової функції) і функції обмежень від змінних проектування.

9.3.3. Оптимізація як задача математичного програмування

Перший метод відшукання пластичних рамних систем мінімальної ваги був запропонований Жаком Хейманом [Heyman, 1951]. Він ґрунтувався на дослідженні можливих механізмів руйнування і зіставленні відповідних їм ваг. Оскільки розглядалися нерозрізні балки і рами, на які діють тільки зосереджені сили, то побудова таких механізмів не викликало труднощів. Крім того вважалося, що вага одиниці довжини стержня пропорційна граничному пластичному моменту. Трохи пізніше В. Праґер розглянув випадок, коли вага одиниці довжини пропорційна деякому ступеню (меншому за одиницю) граничного моменту [Prager, 1956].

Важливі теореми про верхню і нижню границі для мінімальної ваги рамних конструкцій були доведені Фолкісом [Foulkes, 1953], який ввів поняття механізму, відповідного вазі. Цей механізм характеризується тим, що в рівнянні робіт коефіцієнти при кожному граничному пластичному моменті такі ж, як і у виразі для ваги. Теореми Фолкіса стверджують, що якщо механізм, відповідний вазі, не забезпечує появу статично допустимого і безпечного розподілу зусиль, то вага такої рами буде менше ваги оптимальної конструкції. І навпаки, якщо в цьому механізмі реалізується статично допустимий і безпечний розподіл зусиль, то вага такої рами більше або дорівнює мінімальній вазі.

Виходячи з цих теорем Фолкіс прийшов до використання лінійного програмування в задачах оптимального проектування. Його підхід полягав у знаходженні конструкції мінімальної ваги при недопущенні пластичного руйнування конструкції. У цих умовах значний клас задач оптимізації конструкцій можна сформулювати як задачу лінійного програмування [Foulkes, 1954, 1955], при цьому розглядається лише одна умова навантаження.

У 1958 р. Пірсон, розвиваючи теорію пластичного руйнування, звернувся до задачі проектування ферм і рам мінімальної ваги при наявності декількох варіантів навантаження [Pearson, 1958]. Ця робота зіграла важливу роль, оскільки використаний в ній підхід послужив предтечею трьох ключових ідей, які згодом лягли в основу розробки сучасних методів оптимізації конструкцій, які працюють за межами пружності. Вони полягають у тому, що одночасно розшукаються оптимальний проект і критичні схеми появи пластичних шарнірів.

Великий вплив на розвиток сучасних методів оптимізації конструкцій справила робота [Klein, 1955], в якій було показано, що для досить загального класу задач оптимального проектування можлива постановка задач нелінійного програмування, а також було визнано фундаментальне значення обмежень у вигляді нерівностей при коректній постановці задач оптимального проектування конструкцій.

Але найбільш загальний підхід .до розв'язання задач оптимізації був запропонований Шмітом [Schmit, 1960]. В межах цього підходу для створення системи автоматичного проектування вводиться ідея застосування скінченноелементного розрахунку конструкцій у зв'язці з методами нелінійного математичного програмування. В загальній постановці задачі, яка була запропонована Шмітом, наголошувалося на важливості врахування неєдиності різних умов навантаження і накладення обмежень по різним формам досягнення границі несучої здатності за допомогою системи обмежень-нерівностей.

Люсьєн Шмит
англ. Lucien A. Schmit

Іншим важливим аспектом, який враховувався в цій постановці задачі, була наявність обмежень на мінімальні і максимальні розміри елементів конструкції. Крім того, Шміт вказував, що на противагу широко поширеній думці проект статично невизначуваної конструкції мінімальної ваги, на який накладено тільки обмеження по напруженням, не обов'язково буде такою конструкцією, в якій кожен елемент навантажений повністю, принаймні, при одному з варіантів навантаження. Протягом наступного десятиліття з 1960 по 1970 р. підхід на основі нелінійного програмування застосовувався до самих різних задач оптимізації конструкцій та до розробки варіантів реалізації алгоритмів нелінійного програмування.

Були випробувані методи послідовної безумовної оптимізації [Pope & Schmit, 1971], підхід, який використовує розширені функції Лагранжа [Gruver & Shafroth, 1976], метод проекцій градієнта Розена і різні модифікації методів найшвидшого спуску [Gellatly & Gallagher, 1966], [Moses & Onoda, 1966] та інші способи розв’язання задачі нелінійного програмування. Алгоритм, що обирався автором, мав істотний вплив і на формулювання задачі, і на те, що вважалося її розв’язком, оскільки, як відомо, методи нелінійного програмування в більшості випадків не гарантують досягнення абсолютного мінімуму цільової функції через неопуклість області допустимих розв’язків. Ця ситуація призвела до застосування методів цілочисельного [Toakley, 1968], динамічного [Kalaba, 1962], [Palmer, 1968] програмування і різних ітераційних методів [Reinschmidt et al., 1966] навіть для ідентичних задач.

До початку 70-х років стало очевидно, що наявні можливості оптимізації конструкції на глобальному рівні, засновані на розрахунку за методом скінченних елементів в поєднанні з методикою математичного програмування, вимагають надзвичайно великих витрат часу для розв’язання задач проектування конструкцій доволі обмежених розмірів.

Вважали, що вихід із ситуації полягає у використанні альтернативного підходу, ідея якого була запропонована в роботі Прагера і Тейлора [Prager & Taylor, 1968] і який став відомим як "підхід критеріїв оптимальності". Цією методикою передбачено, що спочатку необхідно вивести умови, яким повинен задовольняти оптимальний проект. Потім розробляється алгоритм (як правило, ітераційний), метою якого є пошук конструкції, яка задовольняє визначеним критеріям, і водночас відбувається досягнення деякого локальний мінімум. У цьому сенсі методи, засновані на критеріях оптимальності, потрапляють в категорію непрямих методів оптимізації.

Вільям Прагер
(1903-1980)
нім. William Prager

У піонерній роботі [Prager & Taylor, 1968], наприклад, розглянута задача пошуку конструкції мінімальної ваги із заданим значенням віртуальної роботи навантаження P(x) на прогинах y(x). Оскільки віртуальна робота навантаження має задане значення C, то принцип мінімуму потенціальної енергії стає принципом мінімуму енергії деформації, а остання, як показано в [Prager & Taylor, 1968], пропорційна вазі конструкції. Далі було показано, що підхід такого роду може бути використаний, коли розглядається величина, яка характеризується мінімальним принципом будівельної механіки (наприклад, використаною в зазначеній вище задачі роботою зовнішніх сил).

Непрямі методи оптимізації використовувалися в задачах проектування систем мінімальної ваги [Venkayya, 1971], [Klusalaas, 1972], [Dobbs & Nelson, 1976], а також в ряді інших задач, де можна було спертися на варіаційні принципи будівельної механіки. До них відносяться, наприклад, такі задачі, в яких в якості критерію оптимізації виступають основна частота власних коливань [Гринев и Филиппов, 1971], коефіцієнт граничного навантаження в разі пластичного руйнування [Чирас и др., 1974], величина критичної сили втрати стійкості [Turner & Plaut, 1980].

До цього напрямку примикають також дослідження з проблеми раціональної розстановки в'язей в задачах стійкості та власних коливань. Однією з перших робіт цього напрямку була робота [Бубнов, 1912-1914]. У роботах [Нудельман, 1949], [Дольберг, 1951], [Смирнов, 1958], [Ляхович и др., 1978] були обґрунтовані правила вибору місць постановки в'язей для максимального зсуву першої власної частоти або критичної сили. Було обґрунтовано їх мінімально необхідну кількість. Показано, що установкою в стержневій системі s додаткових в'язей можна підвищити величину першої власної частоти або критичної сили максимально до значення (s+1)-ї. При цьому в'язі повинні бути поставлені у вузлові точки форми власних коливань (втрати стійкості), яка відповідає (s+1)-й власній частоті (критичній силі) системи без додаткових в'язей. Були запропоновані методи, що дозволяють максимально збільшувати величину першої власної частоти (критичної сили) при мінімальній сумарній жорсткості додаткових зв'язків.

В роботі [Ляхович, Плахотин, 1986] розглянута інша постановка задачі, згідно з якою потрібно вибрати місця установки пружних дискретних в'язей з числа можливих і визначити їх жорсткості таким чином, щоб перша власна частота (критичне навантаження) досягала б заздалегідь заданого значення, дотримувалися конструктивні обмеження і вага або об'єм матеріалу додаткових в'язей набували б мінімального значення.

Розв’язані задачі, пов'язані з необхідністю в одних випадках розміщувати на споруді додаткові вантажі, а в інших - знімати частину навантаження. При цьому зміна частоти власних коливань не повинна виходити за встановлені межі. У задачі про довантаження споруди ставиться мета про розміщення максимально можливого додаткового навантаження, що не виводить зменшену частоту власних коливань за встановлену межу. При цьому величини кожного з додаткових вантажів обмежені.

Іноді критерій оптимізації конструюється на підставі інтуїтивних міркувань. Наприклад, найважливіша вимога, якій повинна задовольняти будь-яка конструкція, зводиться до необхідності дотримання критерію міцності в кожному елементі. Обмеження міцності входить в число інших обмежень, що накладаються на проект конструкції. На практиці критерії міцності задовольняються за допомогою концепції повністю напружених (fully stressed) конструкцій; ця концепція стала одним з перших критеріїв оптимальності.

Важко назвати автора ідеї повністю напруженої конструкції, яка інтуїтивно, здавалось, приводить до системи найменшої ваги і була реалізована в багатьох розрахункових програмах, але науковий аналіз цього питання почався лише в у другій половині XX століття. Інтерес становили співвідношення між повністю напруженою конструкцією і конструкцією мінімальної ваги, оскільки ніякі очевидні відношення між ними явно не були видні. В роботі [Schmidt, 1958] стверджувалося, що проект мінімальної ваги може бути відібраний серед повністю напружених конструкцій. Але вже через два роки було показано [Schmit, 1960], що повністю напружений проект не обов'язково є проектом мінімальної ваги, і навіть при невеликій кількості умов навантаження метод повного напруження може привести до неефективного проекту.

І мабуть, першою серед робіт, які чітко проаналізували зв'язок між повністю напруженою конструкцією і конструкцією мінімальної ваги була робота Р. Разані [Razani, 1965] в якій було показано що ітераційний метод пошуку повністю напруженої конструкції не завжди сходиться до проекту мінімальної ваги, і знайдена необхідна умова для еквівалентності двох методів проектування. Пізніше О.І. Виноградов проаналізував збіжність міцнісного перерахунку, орієнтованого на пошук повністю напруженої системи, і показав на прикладах, що такий перерахунок може привести не до системи мінімальної ваги [Виноградов, 1971].

Використовуване припущення про те, що у більшості практичних конструкцій розподіл зусиль по елементам є невідчутним до розмірів поперечних перерізів цих елементів, є причиною того, що розглянутий алгоритм для деяких конструкцій призводить не тільки до неоптимальному проекту, але і до проекту з неефективним розподілом зусиль в елементах конструкції. Щоб позбутися цього недоліку, було запропоновано на кожній ітерації змінювати змінні проектування всього лише на кілька відсотків, тоді до оптимального проекту можна прийти лише за 4-5 ітерацій [Gallagher, 1973].

Але по справжньому труднощі вирішення великих задач оптимізації почали долатися лише при заміні загальної задачі оптимізації конструкції на послідовність відносно невеликих явних наближених задач оптимізації конструкцій. Реалізація цього переходу досягалася за рахунок скоординованого використання концепцій апроксимування, якими передбачалося:

- зменшення кількості незалежних змінних проектування шляхом їх об’єднання в групи;

- зменшення кількості обмежень, які враховуються на кожному етапі, шляхом тимчасового відкидання неактивних и зайвих обмежень;
- побудова високоякісних явних апроксимацій для залишених функцій обмежень.

Взагалі кажучи, це нагадує звичайну практику проектування, коли виконується ряд кроків з поступовою деталізацією та уточненням задачі.

На початку 80-х років була зроблена спроба створити новий потужний метод мінімізації ваги будівельних конструкцій, заснований на поєднанні концепцій апроксимування з двоїстим методом [Schmit & Fleury, 1980].

Аналіз цього підходу показує, що для значного класу задач оптимізації розмірів конструкцій мінімальної ваги методи, засновані на узагальнених критеріях оптимальності, і методи математичного програмування утворюють єдиний метод розв’язання задач оптимізації конструкцій. Як показав Флері [Fleury, 1982], підходи теорії математичного програмування і підходи, засновані на використанні критеріїв оптимальності, аж ніяк не виключають один одного, а труднощі, властиві звичайним методам, заснованим на критеріях оптимальності, долаються за допомогою комбінованого застосування концепцій апроксимування і подвійного підходу.

9.4. Синтез схеми

Можна простежити, як з плином часу розширювалося коло задач оптимізації конструкцій. Враховувалися всі більш складні обмеження, різноманітнішими ставали постановки задач, використовувалися різноманітні прийоми розв’язання зазначених задач Однак довгий час геометрична схема і топологія конструкції вважалися заданими.

Лише в небагатьох випадках, як в задачі про оптимізацію осі арки, коли в якості розв’язку, який заздалегідь вважався оптимальним, приймалася мотузкова крива, можна була відшукати деякі параметри геометрії системи. Типовою можна вважати задачу про визначення оптимального значення стріли підйому арки. І мабуть першою роботою, де було поставлене це питання, було дослідження [Legay, 1900]. У 1925 р І.М. Рабінович знайшов, що найвигідніше відношення стріли до прольоту вагомої гнучкої нитки або стиснутої арки, окресленої по кривій тиску від власної ваги, виражається формулою $f/l = \sqrt{3}/4 = 0,433.$ Я.Г. Пановко в своїй роботі [Пановко, 1934] дав розв’язок тієї ж задачі, але в якості навантаження прийняв вагу самої арки і суцільного заповнення, яке знаходиться над аркою. Ряд інших важливих випадків було розглянуто в роботах [Киселев, 1953], [Филин, Филалаева, 1973].

9.4.1. Суцільні перехресні системи

Однак топологія конструкції в згаданих роботах покладалася заданою і незмінною. Першим порушив цю традицію Дж.К. Максвелл [Maxwell, 1869], який поставив задачу відшукання оптимальної конфігурації ферми при заданих навантаженнях і опорах. Максвеллу належить теорема, яка стверджує, що в такій фермі при заданих навантаженнях і без урахування втрати стійкості виконується умова

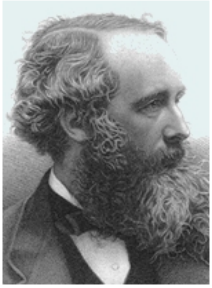
$$V^+R^+ - V^-R^- = const\ ,$$

де V^+, V^- – об’єм розтягнутих і стиснутих стержнів, R^+, R^- – границі міцності матеріалу при розтягу і стисненні.

А. Мічелл, продовжуючи роботу Максвелла, в 1904 році запропонував замінити плоску двовимірну конструкцію системою криволінійних стержнів, орієнтованих уздовж траєкторій головних напружень [Michell, 1904].

В результаті було отримано конструкції, які є статично визначуваними і можуть не забезпечувати несучу здатність при навантаженні альтернативними силами.

Мічелл довів, що з усіх конструкцій ферм, які передають на опори задане навантаження, мінімальний об’єм має та, для якої виконується умова



Джеймс Клерк Максвелл *(1831-1879)*
англ. James Clerk Maxwell

$$V^+R^+ + V^-R^- = \sum_{i=1}^{m} P_i u_i\ ,$$

де u_i – переміщення за напрямком сили P_i, а модуль деформації всіх стержнів є постійною величиною.

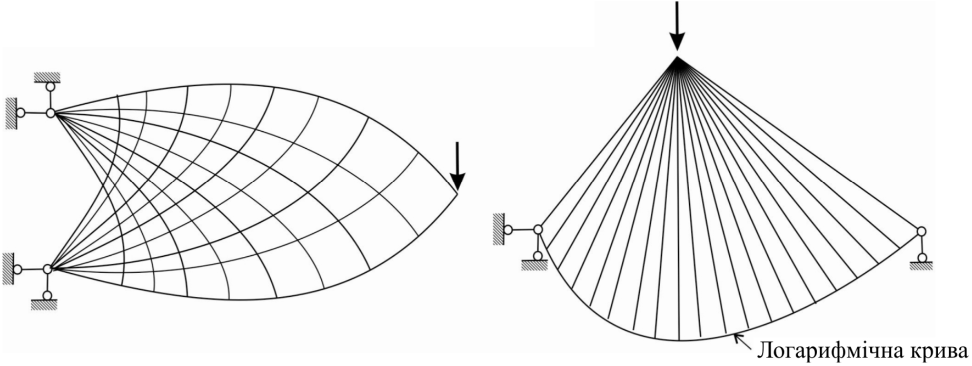
Сама форма конструкції Мічелла виявляється подібною до звичайних пластичних ліній ковзання (сітки Генки – Прандтля) при плоско-напруженому або плоско-деформованому стані [Strang & Kohn, 1983].

У конструкції Мічелла зазвичай входить невизначено велика кількість нескінченно довгих елементів, тому вони в окремих випадках можуть бути безпосередньо використані при проектуванні інженерних конструкцій. Проте, конструкції Мічелла можуть бути корисні при проектуванні, особливо при домінуванні однієї умови навантаження і наявності, головним чином, обмежень по напруженням. Подальшим розвитком підходу Мічелла до проектування конструкцій мінімальної ваги виявилися роботи Хемпа [Hemp, 1958] і Чана [Chan, 1960], проте пізніше цей напрям досліджувань потроху було згорнуто, оскільки одержувані розв’язки мало задовольняли практичні запитим (рис. 9.4, *а*), хоча деяке застосування схеми такого роду знайшли собі в задачах конструювання склопластиків.

Антоні Мічелл
(1870 – 1959)
англ. Anthony George Maldon Michell

Але підхід Мічелла залишався привабливим тим, що він мало пов'язаний з апріорними припущеннями про структуру системи і не залежав від матеріалу конструкції. Саме в рамках такої постановки задачі було виконано дослідження

О.Р. Ржаніцина, в якому автор робить спробу синтезуючого підходу до розрахунку стержневих систем [Ржаницын, 1949]. Використовуючи поняття віріалу сил, Ржаніцин встановив деякі загальні закономірності властиві оптимальним системам, зокрема було доведено, що в оптимальній фермі об'єми стиснутих і розтягнутих стержнів дорівнюють один одному (цей результат ще в 1890 році отримав Максвелл [Maxwell, 1890]). Для деяких задач були отримані схеми мінімальної ваги (рис. 9.4,*б*), які, як і схеми Мічелла, мало нагадували реальні конструкції.



а *б*

Рис. 9.4. Оптимальна конфігурація: *а* – ферма Мічелла, *б* – ферма Ржаніцина

Приблизно через сімдесят років після Мічелла його теорія була поширена на системи, що піддаються згину (ростверки). Вільям Праґер і Георгій Рожвани сформулювали першу загальну теорію оптимізації топології, яку називають "теорія оптимізації конфігурацій" [Prager & Rozvany, 1977]. Вони застосовували це перш за все до точної, аналітичної оптимізації конструкцій подібних перехресним балковим клітинам, але вона також має важливе значення для чисельних методів і структур типу континууму.

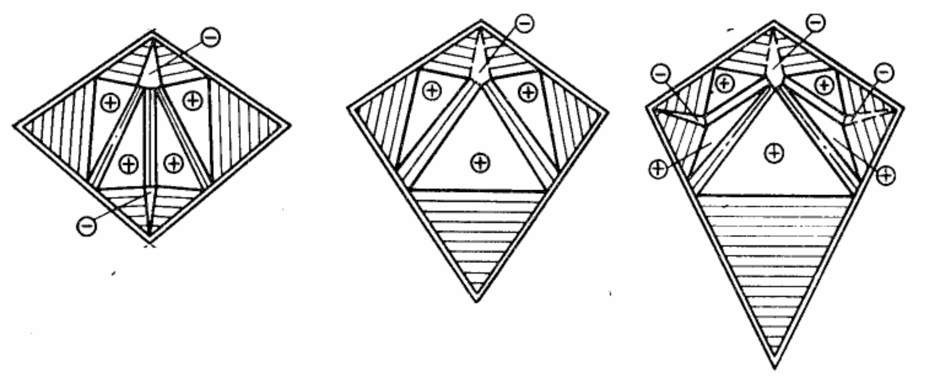


Рис. 9.5. Приклади компоновки ростверку для ромбовидної області

Для ферми Мічелла функція питомої вартості визначається як $\psi = k\left|N\right|$, де ψ — вага одиниці довжини, N — зусилля, k — задана константа, а для балочного ростверку функція питомої вартості записується вигляді $\psi = k\left|M\right|$, де M — згинальний момент [Prager, 1974], що дозволяє підійти до розв'язання задачі про оптимальну компоновку таких конструкцій. Так само як і в фермах Мічелла розв'язок складається з нескінченного числа компактно розташованих елементів (фермоподібний континуум в разі задачі Мічелла і ростверкоподібний континуум в задачі Прагера). Детально проблема оптимальної компоновки представлена в монографії Рожвани [Rozvany, 1976]. Деякі приклади отриманих компоновок показані на рис. 9.5.

9.4.2. Використання спеціальних моделей методу скінченних елементів

Більш реалістичною виявилася наступна постановка задачі структурного синтезу. Якщо задано множину вузлів ферми з діючими на них навантаженнями, то поєднуючи всі ці вузли стержнями, складаючи для всіх вузлів рівняння рівноваги і мінімізуючи об'єм матеріалу, отримаємо задачу лінійного програмування для синтезу ферми мінімального о об'єму. Такий підхід до задачі вперше вказано Пірсоном [Pearson, 1958]. Дещо більш загальний підхід розвинений в статті У.С.Дорна, Р.Е. Гоморі і Дж.Грінберга [Dorn et al., 1964], де використано поняття про множину допустимих вузлів (в тому числі і ненавантажених), з'єднаних попарно стержнями, а також Д.А. Мацюлявічюсом [Мацюлявичюс, 1965], який запропонував кілька модифікацій задачі при урахуванні багатьох завантажень. Аналогічну просторову задачу трохи раніше розглянув Г.С. Чен [Chan, 1964].

Урахування власної ваги було запропоновано в роботі [Мацюлявичюс, 1969]. Було виявлено існування критичного габариту конструкції, досягнення якого викликає настільки великий ріст власної ваги, що конструкція з матеріалу заданої міцності не спроможна його сприйняти. А саме по собі явище «нестійкості за вагою» було, мабуть, вперше описано за десять років до цього в роботі [Виноградов, 1959].

Детальний аналіз підходу роботи [Dorn et al., 1964] виявив залежність одержуваних розв'язків від початкової щільності сітки вузлів.

В роботі [Kohn & Strang, 1986] ця особливість пояснена тим, що в будь-якій точці допустимої геометричної області з урахуванням дискретності використовуваних математичних моделей реалізується одне з двох можливих «крайніх» станів: конструкційний матеріал або є, або відсутній. Тому в постановці задачі структурної оптимізації силових конструкцій було запропоновано використовувати специфічні пористі матеріали [Комаров, 1984], [Bendsoe & Kikuchi, 1988]. Такий підхід (метод гомогенізації), який використовує тверде деформівне тіло зі змінними за обсягом

Валерій Андрійович Комаров
рос. Валерий Андреевич Комаров

характеристиками матеріалу, допускає можливість появи в моделі конструкції «перехідних» зон між «крайніми» варіантами стану пружного середовища.

У дослідженнях цього напрямку пружне середовище, вписане в допустиму геометричну область, ділиться на скінченні елементи. За цільову функцію приймається податливість пружного середовища, а обмеженням є маса матеріалу. Враховуються обмеження на еквівалентні напруження, узагальнені переміщення і критичні зусилля втрати стійкості. Варіації проектних змінних призводять до виродження елементів, передача зусиль через які нераціональна, і, навпаки, виділяють з конструкції елементи, що забезпечують раціональні шляхи передачі сил. В результаті визначається топологія теоретично оптимальної конструкції.

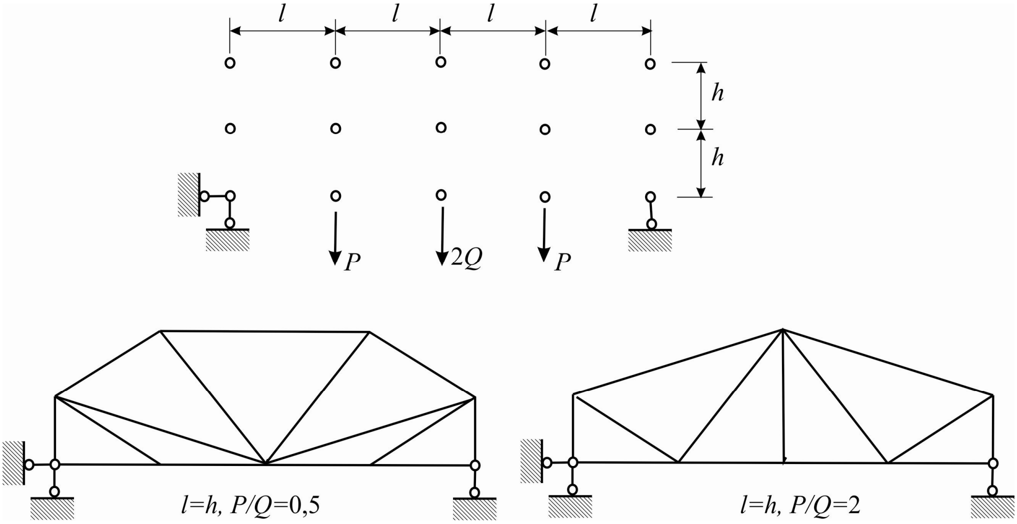


Рис. 9.6. Оптимальний обрис ферм за Дорном, Гоморі та Грінбергом (нерухомі вузли)

Перші підходи до розв’язання задач топологічної оптимізації з урахуванням обмежень на напруження були закладені в роботі [Xie, Steven, 1993], де розглядається так званий «еволюційний» метод оптимізації конструкції. При його використанні поступово збільшується граничне значення приведених напружень RR, за якого елементи з напруженнями, що не перевищують RR, виключаються зі схеми (див. рис. 9.7).

Інший підхід ґрунтувався на вирішенні задачі оптимізації анізотропних властивостей двовимірних елементів конструкцій з локально-ортотропного матеріалу [Баничук и др., 1984]. Відшукується найкраща орієнтація осей ортотропії пружного середовища з умови мінімуму функціонала інтегральної жорсткості. Отриманий розподіл орієнтації осей ортотропії може бути використано для формування конструктивно-силової схеми, оскільки знайдені лінії напрямку осей можуть розглядатися в якості зосереджених елементів (типу ребер жорсткості).

А взагалі проблема оптимального проектування тонкостінних конструкцій в повному своєму обсязі надзвичайно складна і в ряді випадків для конструкцій з композиційних матеріалів не має закінченого математичного формулювання [Баничук и др., 1988], [Немировский, Старостин, 1975], [Черевацкий, 1966]. Ця складність зумовлена тим, що задачі оптимізації конструкцій відносяться до числа нелінійних задач механіки. Також ускладнюють задачу велика кількість форм використовуваних в техніці конструкцій, широкий спектр вимог, які висуваються до них, і різноманітність умов їх експлуатації.

Найбільш поширеними критеріями оптимальності є вимоги мінімуму ваги або мінімуму вартості (коли матеріал конструкції неоднорідний), оскільки при цьому цільова функція характеризується інтегральним функціоналом. Виконані в цьому напрямку дослідження в достатній мірі відображені в монографіях [Арман, 1977], [Баничук, 1986], [Баничук и др., 1988] тощо. З аналізу зазначеної літератури випливає, що в абсолютній більшості випадків розглядаються лише плоскі конструкції або циліндричні оболонки. Це обумовлено труднощами розв’язання відповідних задач оптимізації.

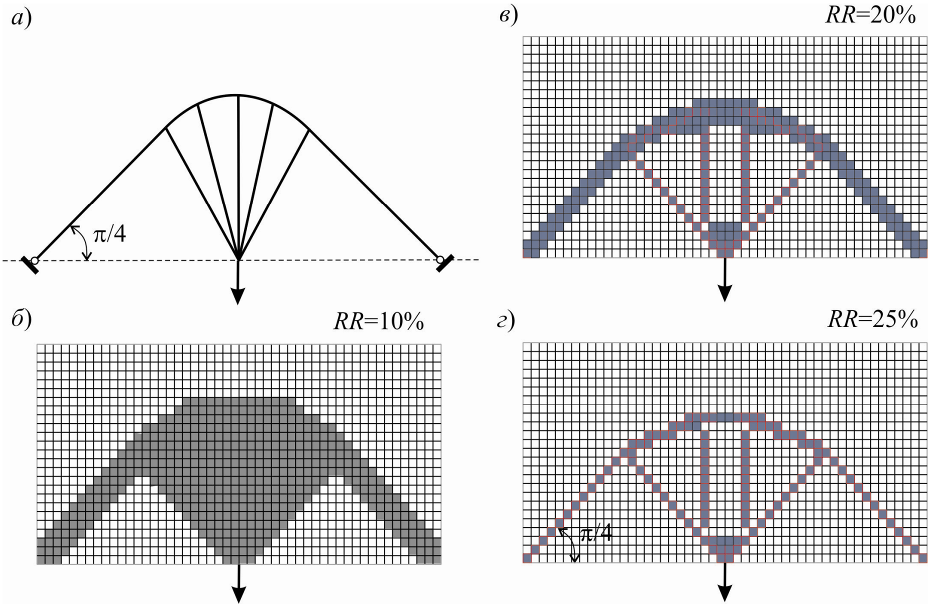


Рис. 9.7. Еволюція синтезу: *а* – розв’язок Мічелла; *б-г* – розв’язки при збільшенні порога *RR*

Що стосується результатів оптимізації, то вони часто демонструють досить витончену форму оптимальних конструкцій з незвичними для традиційних конструктивних рішень обрисами границі пружного тіла. На рис. 9.8 показані розподіли товщини квадратної пластини з шарнірно опертим (рис. 9.8, *а*) і затисненим (рис. 9.8, *б*) краєм [Баничук и др., 1980].

В рамках континуальної постановки задачі оптимального проектування умова оптимальності разом з рівняннями стану і рівняннями для сполучених змінних утворюють замкнену нелінійну крайову задачу щодо змінних стану, проектування і сполучених функцій [Арман, 1977]. Загальні аналітичні методи розв’язання таких задач відсутні, тому розвиток теорії оптимального проектування та ефективні методи розв’язання прикладних задач, як правило, пов'язані з дискретизацією задач оптимізації. Однак, щоб звузити простір параметрів проектування (і спростити тим самим задачу), дискретизація здійснюється досить грубо (зазвичай конструкцію розбивають приблизно на 10 елементів), що знижує достовірність отриманих результатів.

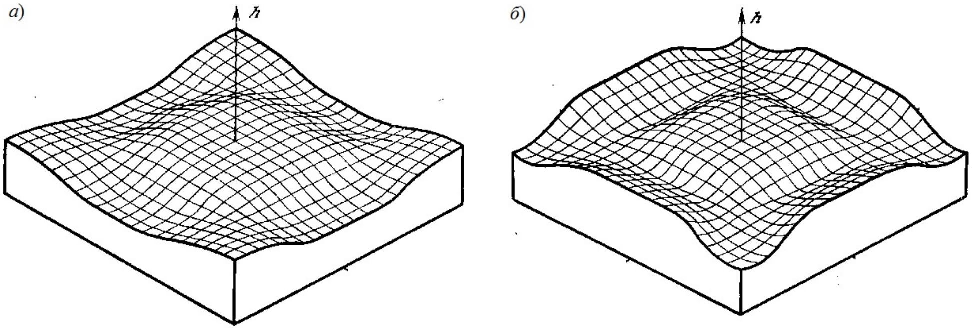


Рис. 9.8. Оптимальна пластина

Інший шлях спрощення нелінійних задач оптимізації конструкцій полягає в звуженні підпростору керуючих функцій і параметрів проектування. Це дозволяє в ряді випадків отримати розв’язок задачі оптимізації в аналітичній формі або звести до задачі мінімізації функції кількох змінних, але знижує ефективність оптимального проекту. Так, в роботах [Гололобов, Ильин, 1970], [Малков, Строгин, 1971], [Немировский, 1978], [Соболь, Статников, 1981] методами математичного програмування за рахунок відповідного вибору анізотропії матеріалу визначені оптимальні параметри пластин і оболонок.

9.5. Розрахунок, орієнтований на оптимальне проектування

Популярні програми розрахунку конструкцій за методом скінченних елементів розроблялися без урахування особливостей задачі оптимізації проекту. Маються на увазі такі особливості: необхідність отримання даних про чутливість конструкції до зміни параметрів розрахункової моделі, а також необхідність ефективного аналізу великого числа різних проектів, що мають в якійсь мірі подібні конфігурації. Наприклад, в більшості програм, заснованих на методі скінченних елементів, будується матриця жорсткості системи **K** для повного опису конкретного проекту. Однак, якщо врахувати необхідність розв’язання задачі оптимізації конструкції, то виникає задача виділення інваріантних елементів матриці **K** [Bhatia, 1971]. І вже перший досвід розв’язання задач оптимального проектування показав, що розрахунок конструкцій для вибору оптимального проекту є специфічним завданням, коли потрібно виконувати розрахунок багатьох конструкцій, які в якійсь мірі близькі одна до одної [Сергеев, 1975].

Аналіз чутливості грає важливу роль при розрахунку конструкцій і при їх оптимізації [Хог, Арора, 1983]. В рамках аналізу чутливості відшукуються градієнти розрахункових характеристик поведінки конструкції (наприклад, переміщень, напружень, власних частот і нормальних форм коливань) у вигляді частинних похідних від цих характеристик по змінним проектування (наприклад, площам поперечного перерізу, товщинам, просторовому положенню вузлів). Нагальна необхідність отримання інформації щодо аналізу чутливості як невід'ємної частини будь-якої сучасної програми розрахунку за методом скінченних елементів диктується наступними міркуваннями. При проведенні аналізу чутливості отримують цінну кількісна інформація, яка може служити орієнтиром в процесі взаємодії людини і машини, крім того, інформація про чутливість є основою побудови явних наближених виразів для характеристик поведінки конструкцій через змінні проектування.

Слід додати, що аналіз чутливості важливий ще і з точки зору перевірки стабільності отриманого оптимального рішення. Справа в тому, що є випадки, коли навіть незначна зміна параметрів задачі призводить до різкої зміни результату. Так, наприклад, в роботі [Овчинников, Бочкарев, 2003] показано, що оптимальні проекти пластин вельми чутливі до відхилень товщини від оптимальних, а для пластин, запроектованих на роботу в режимі близькому до граничного, навіть неповне прикладання проектного навантаження на деякій частині поверхні може привести до руйнування.

На цю особливість результату оптимізації може вказати перевірка чутливості розв’язку до зміни параметрів. І не тільки змінних проектування, які варіювались в процесі розв’язання, але і тих параметрів, які належали до числа заданих.

Основні напрямки в галузі досліджень з розрахунку конструкцій, орієнтованому на їх оптимальне проектування, розпадаються на три основні категорії:

1) методи обчислення градієнтів параметрів поведінки конструкції по змінним проектування, тобто аналіз чутливості конструкції [Fox, 1965] і [Fox & Kapoor, 1968];

2) методи побудови наближених розв’язків за допомогою підмножини змінних стану, відібраного за даними детального аналізу [Fox & Miura, 1971], [Noor & Lowder, 1974];

3) поліпшення методики розбиття на скінченні елементи в напрямку більшої підпорядкованості задачі оптимізації проектування конструкцій [Bhatia, 1971].

Дві останні категорії пов'язані з особливостями об'єкта проектування і навряд чи можуть бути універсальними.

9.6. Нетрадиційні задачі оптимізації

Традиційний підхід до оптимізації конструкцій передбачає пошук найбільш раціональної структури і розподілу матеріалу в конструкції, що знаходиться під дією заданого навантаження або декількох навантажень із заданої множини, дискретного або безперервного. Більш широкий підхід розглядає задачі, в яких поряд з визначенням оптимальної конструктивної форми з'ясовується оптимальний розподіл зовнішніх силових впливів [Мацюлявичюс, 1968], [Литвинов, 1975], [Кашковская, Ляхович, 1998]. Варіювання розподілом і значеннями силових впливів на конструкцію, в тих випадках, коли це можливо, дозволяє додатково поліпшити критерій якості без зайвої витрати матеріалу. Варіювання зовнішніми впливами можливо, наприклад, при проектуванні несучих конструкцій складських і заводських приміщень, на яких розміщується важкий вантаж і обладнання, а також при проектуванні суднових конструкцій, виробничих кранів тощо.

Ще однією особливістю традиційного підходу є та обставина, що основні параметри, що визначають призначення і спосіб використання об'єкта, вважаються заданими «згори» і, як правило, не підлягають ревізії. Вважається, наприклад, що потрібно створити проект якоїсь будівлі, де протікає певний технологічний процес, а питання про те, чи можна такий процес організувати під відкритим небом і взагалі не будувати будинок навіть не обговорюється. Разом з тим іноді корисно порушити цю традицію і розглянути ширшу постановку задачі оптимального проектування, коли одночасно розглядається задача оптимізації параметрів технологічного процесу і проектних рішень будівлі або споруди, де такий процес реалізується. Як один з небагатьох прикладів такого підходу можна вказати на роботу [Perelmuter, Yurchenko, 2013], де розглядалася задача оптимального проектування вітроенергетичної установки. У цій роботі до числа варійованих параметрів проектування були віднесені не тільки характеристики конструктивного рішення вежі (геометрія, товщина оболонки), а й основні робочі характеристики вітроагрегату (його проектна потужність, висота установки і діаметр вітроколеса).

Коло розв'язуваних задач розширюється за рахунок розгляду все більш різноманітних умов роботи конструкції. Так, наприклад, досить велика увага почала приділятися проблемі оптимального проектування елементів силових конструкцій, умови експлуатації яких пов'язані з впливом агресивних робочих середовищ [Овчинников, Почтман, 1995]. Великою різноманітністю відрізняються динамічні задачі, де шукаються оптимальні рішення по віброзахисту, сейсмоізоляції, демпфируванню коливань, оптимізуються параметри гасителів коливань тощо. (див., наприклад, [Мижидон, 1996], [Гордеев, Долгая, Уздин, 1997]).

Але розв’язуються не тільки нові задачі. Більш строгому аналізу піддаються задачі, вирішені раніше, і, крім того, ревізуються прийоми і підходи, які були знайдені раніше і стали в деякому роді священними. Так, наприклад, в роботі [Перельмутер, 2011] було виконано дослідження відомої концепції, яка вказує на економічну доцільність безперервного зростання одиничної потужності промислових об'єктів (для споруд – принцип концентрації матеріалу в основних конструкціях). Виявилося, що якщо враховувати обмеження, які визначаються умовами безпеки, то згадана концепція має межу застосовності, що є принципово важливим.

Література

Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. - М.: Мир, 1977. - 142 с.

Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. — 256 с.

Баничук Н.В., Бирюк В.И., Епураш Д.М. К задаче оптимизации конструктивно-силовых схем при использовании анизотропной модели // Ученые записки, Том XV, 1984 № 2 — С. 134-138.

Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. —303 с.

Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988 — 224 с.

Белзецкий С.И. Обобщение задачи Виларсо, поставленной им в 12 томе мемуаров французской академии наук // Известия собрания инженеров путей сообщения, т.17, №1-2, 1907.

Белзецкий С.И. Упругая линейная арка равного сопротивления для давлений, производимых на внешнюю поверхность арки сыпучим массивом.— С.-Петербург: 1904

Богуславский Н.Б. Таблицы, веса железнодорожных мостов под нагрузку // Журнал министерства путей сообщения, 1907, №8

Бубнов И.Г. Строительная механика корабля, Часть 1, СПб: 1912 ; Часть 2, СПб: 1914.

Виноградов А.И. Исследование вопросов конструирования перекрытий по заданным напряжениям. Автореферат дисс. … д-ра техн. наук — М.: МИИТ, 1948.

Виноградов А.И. О статической неопределимости стержневых систем наименьшего объема // Исследования по теории сооружений. Вып. 6 — М.: Госстройиздат, 1954 — С. 381-387.

Виноградов А.И. О сходимости прочностного перерасчета в задачах оптимизации // Строительная механика и расчет сооружений, 1971, №3 — С. 11-13.

Виноградов А.И. Об учете собственного веса в стержневых системах с заданными напряжениями // Исследования по теории сооружений, Вып 8 — М.: Госстройиздат, 1959 — С. 523-534.

Гололобов В.И., Ильин Л.А. Определение толщины равнонапряженных упругих оболочек вращения // Прикл. механика. 1970, Том 6, вып. 7 — С. 58 -63.

Гольдштейн Ю.Б., Соломещ М.А. Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1980. — 316 с.

Гордеев В.Н. Исследование множества однотипных конструкций с параметрами, близкими к оптимальным // Реф. сб. Серия VII, "Проектирование металлических конструкций", вып. 8(55). — М.: ЦНИПИАСС, 1974. — С. 12-15.

Гордеев Ю.В., Долгая А.А., Уздин А.М. Оптимизация параметров сейсмоизолирующих фундаментов с учетом многозначности решений уравнений сейсмических колебаний сейсмоизолированных сооружений // Экспресс-Информация "Сейсмостойкое строительство", Вып.4, 1997 — С. 44-47.

Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимальное проектирование конструкций, имеющих заданные собственные частоты // Прикладная механика, 1971, Том 7, №10

Гуревич Я.И. К вопросу о рациональном законе изменения сечений стержневых статически неопределимых систем Труды Хабаровского института инженеров железнодорожного транспорта. Вып. 7 — М.: Трансжелдороиздат, 1954.

Дольберг М.Д. Об одном обобщении задачи Бубнова // Украинский математический журнал, 1951, Том III, № 4. – С. 433–448.

Израэлит А.Б. О гарантии положительных решений при расчете статически неопределимых балок и рам методом заданных напряжений // Труды Всесоюзного заочного лесотехнического института, №2 — М.: 1956.

Кашковская Я.В. (Макжанова), Ляхович Л.С. Оптимальное загружение балочных систем // Известия вузов. Строительство. 1998, № 8 — С. 17-22.

Кефели А.И. О теоретических весах сооружений // Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения. Вып. 96 — Л.: 1927 — С. 247-266

Киселев В.А. Рациональные формы арок и подвесных систем. М.: Госстройиздат, 1953. — 353 с.

Комаров А.А. Основы проектирования силовых конструкций. — Куйбышев: Куйбышевское книжное изд-во, 1965. — 88с.

Комаров А.А. Силовое конструирование // Труды Куйбышевского авиационного института. Вып.1, Куйбышев: 1952 — С. 36 - 48.

Комаров В.А. Проектирование силовых схем авиационных конструкций // Актуальные проблемы авиационной науки и техники — М.: Машиностроение, 1984. — С. 114-129.

Литвинов В.Г. Некоторые обратные задачи теории упругости, связанные с оптимальным нагружением// Прикладная механика, 1975, Том XI, Вып.3 — С. 39-49.

Ляхович Л.С., Перельмутер А.В. Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014, Vol. 10, No 2.— P. 14-23.

Ляхович Л.С., Плахотин А.Н. Критерий оптимальности связей в задачах устойчивости и собственных колебаний упругих систем // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1986, N 7— С. 26-30.

Ляхович Л.С., Те А.Б., Фишер В.Ф. О рациональной расстановке связей и распределении материала в задаче о собственных колебаниях системы с конечным числом степеней свободы // Исследования по строительной механике. — Томск: Изд. ТГУ, 1978.— С. 31-34.

Малков В.П., Строгин Р.Г. Оптимизация конструкций по весу из условий прочности // Методы решения задач упругости и пластичности. Горький, 1971, Вып. 4 — С. 138-149.

Мацюлявичюс Д.А. Задача синтеза оптимальной конфигурации шарнирно-стержневой конструкции при постоянной нагрузке с учетом нагрузки от собственного веса //Литовский механический сборник, 1969. №2(50) — С. 5-23

Мацюлявичюс Д.А. К вопросу о синтезе конфигурации упругой шарнирно-стержневой конструкции, воспринимающей максимальную нагрузку при ограниченном весе и сортаменте материала // Литовский механический сборник. 1968, № 2(3). — С. 16-21.

Мацюлявичюс Д.А. К вопросу синтеза конфигурации стержневых статически определимых конструкций минимального веса // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1965, №1

Мижидон А. Д. Оптимизационные методы решения задач виброзащиты. – Улан-Удэ: БНЦ РАН, 1996. – 137 с.

Немировский Ю.В. К теории строго безмоментных упругих и термоупругих оболочек // Механика твердого тела: Докл. польско-советского симпозиума, Новосибирск, 29-31 окт. 1974 г. Варшава: Гос. научн. изд-во, 1978. — С. 231-242.

Немировский Ю.В., Старостин Г.И. Безмоментные упругие оболочки нулевой гауссовой кривизны // Прикл. механика и техническая физика, 1975, № 6. — С. 103-115.

Николаи Е.Л. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн // Известия С.-Петербургского политехнического института, Том VIII, вып. 1, 1907. — С.255-288.

Нудельман Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, – М. : Гостехиздат, 1949. – 175 с.

Овчинников И.Г., Бочкарев А.В. Оптимальные проекты гибких круглых пластин и их практическая реализуемость // Известия вузов. Строительство, 2003, №6 ─ С. 10-15.

Овчинников И.Г., Почтман Ю.М. Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа. Расчет и оптимизация. — Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1995. — 192 с.

Пановко Я.Г. К вопросу о выборе подъема сводов. // Сборник трудов МАДИ, Вып. 2, 1934 — С. 129 – 133.

Патон Е.О. Вес железных мостов для железных и линейных дорог — К.: Издательство Политехнического института, 1903 — 59 с.

Пацкевич Э.Р. Удельный момент сопротивления изгибу и его применение к расчету металлических балок — СПб.: Типография Эрлих, 1894 — 43 с.

Перельмутер А.В. Концепция концентрации материала и требования безопасности // Теория и практика расчета зданиц, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Сб. трудов. —М.: МГСУ, 2011.— С. 286-291

Перельмутер А.В. Очерки по истории металлических конструкций—М.: Издательство СКАД СОФТ, Издательский дом АСВ, 2015.— 256 с

Пузыревский Н.П. Шлюзовые ворота и пропуск судов через них М.: Стройиздат, 1924

Рабинович И.М. К теории статически неопределимых ферм. Законы распределения усилий; метод заданных напряжений; начальные усилия в статически неопределимых фермах — М.: Трансжелдориздат, 1933 — 136 с.

Радциг Ю.А. Об по заданным напряжениям. определении наименьшего объема статически неопределимых ферм // Труды Казанского авиационного института, Том 17, Вып. 1 ─ Казань:1946.

Ржаницын А.Р. К вопросу о теоретическом весе стрежневых конструкций // Исследования по теории сооружуней. Вып. IV ─ М.: Стройиздат, 1949 ─ С. 252-265.

Розов И. Опыт теории арки равного сопротивления // Инженер, 1904, №10-11, — С. 131 .

Руднев В.И. О рациональной форме сплошной упругой арки в связи с современными методами возведения // Туды МИИТ. Вып. 15 — М.: Транспечать, 1930

Семиколенов Г.С. Теория уравновешенных балок // Журнал Министерства путей сообщения, 1871.

Сергеев Н.Д. Расчет статически неопределимых систем при их многоэтапной последовательной модификации // Строительная механика и расчет сооружений, 1975, №6 С.11-16

Слюсарчук Ф.И. О регулярном расчете статически неопределимых ферм методом заданных напряжений // Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта. Вып. 8 — М.: Тансжелдориздат, 1952

Смирнов А.Ф. Стержни и арки минимального веса при продольном изгибе // Труды МИИТ, Вып 74 — М.: 1950

Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений – М.: Трансжелдориздат, 1958.

Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981. — 112 с.

Стрелецкий Н.С. Законы изменения веса металлических мостов // Избранные труды. — М.: Стройиздат, 1968. — С.335-367 [Впервые опубликовано в Сборнике трудов бюро инженерных исследований НТК НКПС. 1926 №7].

Стрелецкий Н.С. Законы изменения веса металлических мостов // Труды научно-технического комитета НКПС. Сб. 8 — М.: Транспечать, 1926 — 100 с.

Филин А.П. , Филалаева Е.С. Об отыскании оптимальной оси трехшарнирной системы при работе ее на нескольких вариантах нагрузки. Казань, Изд. КГУ, 1973 — С. 210-219.

Филин А.П. Вопросы рационального проектирования мостовых арок // Труды Хабаровского института инженеров железнодорожного транспорта. Вып. 3 — М.: Трансжелдороиздат, 1953

Хог Э, Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции. – М.: Мир, 1983. – 478 с.

Хуберян К.М. Расчет крестовых ферм на подвижную нагрузку по методу напряжений // Исследования по теории сооружений. Вып V — М.: Госстройиздат, 1951 — С. 394-403.

Хуберян К.М. К расчету статически неопределимых ферм // Труды Тбилисского научно-исследовательского института сооружений. Вып. 32, 1938

Хуберян К.М. Метод напряжений // Исследования по теории сооружений. Вып IV — М.: Стройиздат, 1949 — С. 164-176.

Ченцов Н.Г. Стойки наименьшего веса // Труды ЦАГИ, Том 265 — М.: 1936

Черевацкий С.Б. О произвольных нитевых оболочках вращения, нагруженных давлением // Прочность и динамика авиационных двигателей: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1966. - Вып. 4. - С. 20 - 30.

Чирас А.А., Баркаускас А.Э., Каркаускас Р.П. Теория оптимизации упругопластических систем Л.: 1974 — 279 с.

Шимановский В.Н., Гордеев В.Н., Гринберг М.Л. Оптимальное проектирование пространственных решетчатых покрытий. — Киев: Будивэльнык, 1987.— 224 с.

Ясинский Ф.С. О проектировании нормальных двутавровых сечений // Русский нормальный метрический сортамент фасонного железа — СПб.: 1900 — С. 13-16.

Banichuk N.V., Barthold F.J., Serra M. Optimization of axisymmetric membrane shells against brittle fracture // Meccanica. 2005. Vol. 40. № 2. — P. 135-145.

Bendsoe M.P., Kikuchi N. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988. Vol. 7. — P. 197-224.

Biernawski A., Grochowski B. O ksztaltowaniu kratownie na minimum potencjalu // Rozprawy Inźynierskie, 1960, № 2.

Brandt A., Ignaczak J. Ksztaftowanie wytrzymafosc owe belki wsporaikowej // Rozprawy Inźynierskie, 1958, XCIV, №I.

Brandt A., Kosmowski J., Wasiutynski Z. O ksztatowanlu kratovvnic na minimum potencjau przez przesuwanie nicobziazonych wezôv aczacych trzy prety // Rozprawy Inźynierskie, 1957, № 2.

Bhatia K.G. Rapid Iterative Reanalysis for Automated Design — NASA Technical Notes, 1971.

Chan A.S.L. The Design of Michell Optimum Structures // British Aeronautical Research Council R&M, № 3303, 1960.

Chan H.S. Optimum structural design and linear programming // The College of Aeronautics, Cranfield, CoA Rept. Aero, No 175, 1964.

Clausen T. Über die Form achitektonischer Säulen // Bulletin physico-mathematique de l'Academie (St. Petersburg), Bd. 9, 1851 — S. 279-294.

Collington E. Thèorie elementairwe des pouters droiltes/ Ponts mètalliques. Ponts americans, combles. — Paris: 1865.

Culmann K. Die graphische Statik.— Zurich: 1866.— 527 s.

Dirksen. Hilfwerke fur das Entwerfen der Brucken mit eisernen Unterbau. 1905

Dobbs M.W., Nelson R.B. Application of Optimality Criteria to Automated Structural Design // AAIA Journal, 1976, Vol. 14, N0 10 — P.1436-1443.

Dorn W.S., Gomory R.E., Greenberg H.J. Automatic design of optimal structures // Journal de mécanique,1964, Vol. 3, No 1 — P. 25-52.

Fleury C. Reconciliation of mathematical programming and optimality criteria approaches to structural optimization // Foundations of Structural Optimization, A Unified Approach: John Willey & Son, New York, 1982

Foulkes J. Linear programming and structural design // Proceeding 2nd Symposium Bur. Of Stand US. Dept. of Commerce, Vol 1, 1955 — P. 27-29.

Foulkes J. Minimum Weight Design and Theory of Plastic Collapse // Quarterly of Applied Mathematics, 1953, Vol. 19, No 4 — P. 347-358.

Foulkes J. The minimum weight design in structural frames // Proceeding of Royal Society, 1954, A223, No 1155 — P. 482-484.

Fox R.L. Constraint surface normals for structural synthesis techniques // AIAA Journal, 1965, Vol. 3 — P. 1516-1517.

Fox R.L., Kapoor M.P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors // AIAA Journal, 1968, Vol. 6 — P. 2426-2429.

Fox R.L., Miura H. An approximate analysis technique for design calculations // AIAA Journal, 1971, Vol. 9 — P. 177-179.

Galileo Galilei. Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a duo nuove scienze attenenti alla mecanica e I movimenti locali — Leida: Appreffo gli Elseviri, 1638 [Русский перевод: Галилео Галилей. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934]

Gallagher R.H. Fully-stressed design // Optimum Structural Design. Theory and Applications ─ London: John Wiley and Sons,1973 — P. 19-32.

Gellatly B.A., Gallagher R.H. Procedure for Automated Minimum Weight Structural Design // Aeronaut. Quarterly, 1966, Vol. 14 P. — 332-342.

Gerber G.H. Balkenträger mit freiliegenden Stützpunkten Bavarian patent, 1866

Gruver W.A. Shafroth C. Gradient Projection and Reduced Gradient Algorithms Based on an Augmented Lagrangian // Proceedings of Operations Research Society of American Natural Convention, Piadeldia, March-Apriek, 1976.

Grycz J. O przeksztaceniach ustroju szterowezlowego przez wymiane pretow // Rozprawy Inżynierskie, 1960, № I.

Heimann H. Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke ─ Berlin: 1928 ─ 24 s.

Heinzerling A. Theorie und Berechnung der gestüssten and aufgehängten Charnierbrückenträger // Der Civiling, 1867, Band 13.

Hemp W.S. Theory of Structural Design. ─ Cranfield College of Aeronautics, 1958, COA Report, № 115.

Heyman J. Plastic Design of Beam and Plate Frames for Minimum Material Consumptions // Quarterly of Applihed Matematics, 1951, Vol. 8, No 4 ─ P. 373-381.

Hofmeister L., Felton L. Prestressing in Structural Synthesis // AIAA Journal, 1970, Vol. 8, No 2.— P. 363-364

Hooke R. Lectures de potentia restitutiva, or of spring explaining the power of springing bodies — London: John & Martin Printer to the Royal Society, 1678.

Hopkins H.G., Prager W. Limits of Economy of Material in Plates // Journal of Applied Mechanics, 1955, Vol. 22, No 3 ─ P. 372-374.

Kalaba R. Design of minimal weight structures for given reliability and cost // Journal of Aero/Space Sciense, 1962, Vol. 29, No 3

Klein B. Further remarks on the direct use of extremal principles in solving certain optimizing problem involving inequalities // Journal of the Operations Research Society of America, 1955, Vol. 3, — P. 548-554.

Klusalaas J. Minimum Weight Design of Structures via Optimality Criteria // NASA Technical Notes D-71715, 1972.

Kohn, R.V., Strang G. Optimal Design and Relaxation of Variational Problems // Communic. Pure and Appl. Math. 1986. V. 39. P. 113-137 (part 1), P. 139-182 (part 2), P. 333-350 (part 3).

Lagrange J.-L. Sur la figure des collonnes // Mescellanea Taurinensia, Vol. 5, 1770-1773 ─ P.123

Legay. Memoire sur la trace et le calcul des voates en maconnerie // Annales des ponts et chaussees, 1900, No 4 — P.19-34.

Levy M. La statique graphique et ses applicatuions aux constructions. IV partie – Paris, 1874

Masur E.F. Optimum Stiffness and Strength of Elastic Structures // Journal Eng. Mich. Division. Proc ASCE, 1970, Vol. 96, No EM5 — P. 621-640.

Maxwell J.C. Scientific papers II — Cambridg: Univer. Press, 1869 — P. 175-177.

Michell A. The limits of economy in frame-structures // Phyl. Mag,, 1904, Vol. 8, No 47 — P. 589-597.

Moses F. Onoda S. Minimum Weight Design of Structures with Application to Elastic Grillages // Internationa Journal of Numerical Methods in Engineering, 1966, Vol. 1, No 4 — P.311-331.

Noor A.K., Lowder H.E. Approximate techniques of structural reanalysis // Computer and Structures, .1974, Vol. 4 — P. 801-812

Palmer A. Optimal structural design by dynamic programming // Journal of Structural Division. Proceeding ASCE, 1968, No ST8

Pearson C.E. Structural design by high-speed computing machines // Conference on Electronic Computation of ASCE,Kansas-SitY, 1958.

Pearson C.W. Structural design by high speed computing machines // Proceedings of the First Conference on Electronic Computation, ASCE, 1958, New York ─ P. 417-436.

Perelmuter A., Yurchenko V. Parametric Optimization of Steel Shell Towers of High-Power Wind Turbines // Procedia Engineering. —2013, Vol. 57— P. 895 – 905

Pippard A.J.S. On a method for the direct design of framed structures, having redundant bracing // Aeronautical Research Committee, Reports and memoranda No. 793, 1922.

Pope G.G., Schmit L.A. Structural Design Applications of Mathematical Programming Techniques // AGARD-AG-149-71. Nort Atlantic Treaty Organization, Rue Ancelle 9Z, Neuilly-Sur-Seine, France. 1971.

Prager W. Minimum-weight design of a portal frame // Journal of the Engineering Mechanics Division/ Proceeding of ASCE, 1956, Vol. 82, No EM4 ─ P. 1073-1… 1073-10

Prager W. Introduction to Structural Optimization. — Springer-Verlag, Vienna, 1974 [Русский перевод: Прагер В. Основы теории оптимального проектирования конструкций — М.: Мир, 1977 — 109 с.].

Prager W., Taylor J.E. Problems of Optimal Structural Design // Journal of Applied Mechanics, 1968, Vol. 35, No. 1 — P. 102-106.

Prager W.; Rozvany G.I.N. Optimization of the structural geometry // Dynamical Systems (proc. Int. Conf. Gainsville, Florida) — New York: Academic Press, 1977 — P. 265-293.

Razani R. Behavior of Fully Stressed Design of Structures and Its Relationship to Minimum-Weight Design // AIAA Journal, 1965, Vol. 3, No. 12 P. 2262-2268 [Русский перевод: Разани Р. Поведение равнонапряженной конструкции и ее отношение к конструкции минимального объема // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Том 3, №12. ─ С. 115-124]

Reinschmidt K.F., Cornell C.A., Brotchie J.F. Iterative design and structural optimization // Journal of Structural Division. Proceeding ASCE, 1966, No ST6

Rozvany G.I.N. Optimal Designof Flexural Systems: beams, grillages, slabs, plates and shells. – Oxford: Pergamon Press, 1976 [Русский перевод: Рожваны Д. Оптимальное проектирование изгибаемых систем — М.: Стойиздат, 1980 — 316 с.]

Salimbeni. Degli archi e delle volte —Verona: 1787 — 320 p.

Schmidt L.C, Fully-stressed design of elastic redundant trusses under alternative load systems // Australian J. Appl. Sci. 1958, №9, ─ P. 337-348.

Schmit L.A. Structural design by systematic synthesis // Proceedings of the 2nd National Conference on Electronic Compuation (American Society of Civil Engineers, New York, 1960) ─ P. 105-132.

Schmit L.A. Structural design by systematic synthesis, Proceeding of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation — New York: ASCE, 1960 — P. 105-132. Cours of Lectures on

Natural Philosophy Cours of Lectures on Natural PhilosophySchmit L.A., Fleury C. Structural synthesis by combining approximation concepts and dual methods // AIAA Journal, 1980, Vol. 18, P. 1252-1260.

Strang G., Kohn R. Henky-Prandtl nets and constrained Michell trusses // Comp. Meth. in Appl. Mech. Engrg., 1983, Vol. 36, No. 2 — P. 207-222.

Toakley A.R. Optimum design using available sections // Journal of Structural Division. Proceeding ASCE, 1968, No ST5

Torroja E. Pholosophy of structures, Berkeley, USA: University of California Press, 1967.

Turner H.K., Plaut R.H. Optimal design for stability under multiple loads // Proceeding ASCE, 1980, Vol. 106 — P 1365-1382.

Venkayya V.B. Design of Optimum Structures // Computer and Structures, 1971, Vol. 1, No 1-2 — P. 265-309.

Villarceau. Sur l'etablissement des arches de point, envisage de point de vue de la plus grande stabile // Comp. Rend. de l'Acad. des Science de Paris, T. III, No. 9, 1846

Wasiutynski Z. O ksztaltowaniu wytrzymalosciowym Warszawa: Academia Nauk Technicznych, 1939

Wasiutynski Z. On the congruency of the forming according tj the minimum potential energy with that according to the equal strength // Bull. Acad. Pol. Sci. Techn., 1960, Vol. 8, No 6 — P. 259-268.

Wasiutynski Z. O przeksztalcaniu kratovvnic przez wprowadzenie nowych pretow // Inz. Budow. 1950, №11.

Xie Y. M., Steven G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization // Computers and Structures, 1993, Vol. 49, N 5 — P. 885-896.

Young T. Course of Lectures on Natural Philosophy, 1807.

Нарис 10

СТАТИКА І СТІЙКІСТЬ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ

...краща доля фізичної теорії — стати основою для більш загальної теорії, залишаючись у ній граничним випадком.

А. Ейнштейн

Воно (гидке каченя) ... згадувало той час, коли всі глузували з нього і проганяли його. А тепер усі кажуть, що він найгарніший серед прекрасних птахів.

Г.Х. Андерсен

У будівельній механіці стержнем називають тіло, один з розмірів якого набагато більше двох інших ($L >> d$). Що стосується двох інших розмірів, то вони можуть мати величину однакового порядку, і тоді говорять про масивний стержень, або ж ці розміри мають різний порядок ($d >> t$), і ми маємо справу з тонкостінним стержнем (L – довжина осі стержня, d – габаритний розмір поперечного перерізу, t – товщина стінки). Помітно відрізняється поведінка стержнів з відкритим і закритим профілем поперечного перерізу, перші більш помітно відрізняються від масивних стержнів.

Друга з наведених вище нерівностей є характерною також і для оболонок. Таким чином, тонкостінний стержень, для якого виконуються обидві нерівності ($L >> d,\ d >> t$), частково наслідує і об'єднує батьківські властивості як стержня, так і оболонки.

Досить давно було виявлено, що основна різниця в поведінці масивних і тонкостінних стержнів відноситься до їх роботи на кручення. Відомий розв’язок задачі Сен-Венана про кручення призматичного тіла точно описував поведінку масивного стержня з круглим поперечним перерізом, відносно непогано – масивних стержнів з іншими поперечними перерізами, і зовсім розходився із спостерігаємою поведінкою тонкостінних стержнів.

10.1. Тонкостінний пружний стержень

10.1.1. Класичний період

Мабуть, до перших наукових досліджень цієї проблеми можна віднести роботу Рудольфа Бредта, який розглянув особливості вільного кручення стержнів з некруглим трубчастим перерізом [Bredt, 1896]. На основі геометричних міркувань і, використовуючи гідродинамічну аналогію, в якій потік погонних зусиль $T(s) = \tau(s) \cdot t(s)$ зіставляється з постійним по довжині потоком рідини (рис. 10.1), він зробив висновок, що дотичне напруження τ не може змінюватися значно по товщині стінки і в розрахунку під τ можна розуміти середнє значення, і, таким чином, дотичні напруження є обернено пропорційними товщині стінки.

Рудольф Бредт
(1842-1900)
нім. *Rudolf Bredt*

Так було отримано правило:

«*Для замкнутого тонкостінного профілю при малій товщині стінки t дотичне напруження вважається розподіленим рівномірно по товщині стінки і визначається формулою*

$$\tau = \frac{M_t}{2At},$$

де A - площа фігури, яку охоплює серединна лінія перерізу».

Це правило виявилося досить практичним, хоча відносилося лише до одного випадку вільного кручення одноконтурного замкнутого тонкостінного стержня.

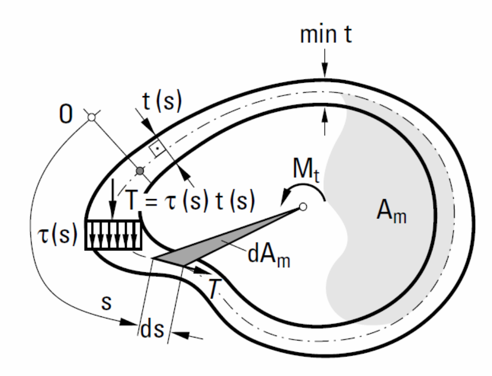


Рис. 10.1. Схема Бредта

Принципово важливий крок в теорії тонкостінних стержнів був зроблений С.П. Тимошенком, коли були опубліковані результати його досліджень кручення двотаврової балки, один з перерізів якої залишається плоским [Тимошенко, 1905-06].

Людвіг Прандтль
(1875-1953)
нім. Ludwig Prandtl

Це той рідкісний випадок, коли можна назвати точний час відкриття. Влітку 1905 року С.П. Тимошенко проходив стажування в лабораторії Людвіга Прандтля в Геттінгені. У 1899 році Прандтль розв’язав задачу про стійкість плоскої форми згину смуги, практично першу задачу про стійкість тонкостінного стержня.

У своїх спогадах Тимошенко пише: «*Прандтль запропонував продовжити його власну дисертацію. Він розглядав бічне випучування при згині балок вузького прямокутного перерізу, але для практичного застосування, звичайно, важливіше вивчити бічну стійкість двотаврової балки. У такому випадку потрібно почати з кручення двотаврової балки. Тут вперше з'ясувалося, що для розгляду цієї задачі принцип Сен-Венана не є застосовним. Кут закручування залежить не тільки від величини крутного моменту і жорсткості балки при крученні, а й від способу закріплення її кінців. Якщо кінець балки защемлений, то очевидно при крученні полки балки зазнають згину і цей згин повинен бути врахований. Тижнів зо два минуло поки я здогадався, як цей згин врахувати і зрозумів, що крутний момент врівноважується такими напруженнями, як в звичайному крученні, складеними з моментом, утвореним перерізуючими силами, що виникають при згині полиць двотаврової балки* »[Тимошенко, 2014].

Тут чітко вказана відмінність між вільним і обмеженим крученням, його демонструє рис. 10.2, запозичений з більш пізньої роботи С.П. Тимошенка [Тимошенко, 1910]. Отриманий теоретичний розв’язок задачі було перевірено експериментально, і виміряні в дослідах кути закручування добре збіглися з теоретичними значеннями, обчисленими за формулами.

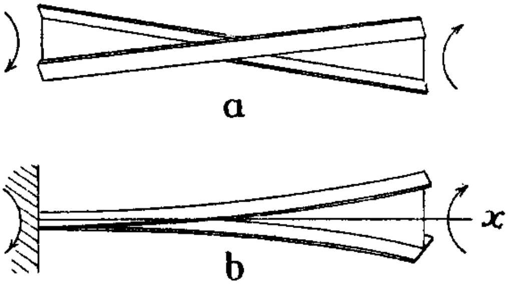


Рис. 10.2. Вільне і обмежене кручення двотавра (рисунок із [Тимошенко, 1910])

Степан Прокопович Тимошенко (1878-1972)

У роботі С.П. Тимошенка було чітко виявлено, що кручення двотаврового стержня проявляється у вигляді згину полиць і тому супроводжується утворенням самоврівноваженої системи нормальних напружень в поперечних перерізах. Такий ефект появи нормальних напружень в поперечних перерізах стержня, що зазнає кручення, важливий для всіх тонкостінних стержнів з відкритим профілем і в дещо меншій мірі для стержнів з закритим профілем. Виявилося, що в тонкостінних профілях при обмеженому крученні виникають два додаткових фактора (нормальні і дотичні напруження кручення), що не враховуються звичайними формулами опору матеріалів.

Наступним важливим досягненням в теорії тонкостінних стержнів було відкриття центру згину, після того як в 1909 році Бах опублікував результати своїх експериментів [Bach, 1909], [Bach, 1910]. Проводячи досліди із металевою балкою швелерного перерізу, Бах встановив, що поперечне навантаження, яке діє паралельно стінці швелера і проходить через його центр ваги, поряд з деформаціями згину викликає також і деформації кручення. Деформації подовжень чотирьох крайніх волокон швелера при довільному положенні навантаження не підкоряються закону плоских перерізів. При проходженні поперечного навантаження через вісь стінки швелера деформації від кручення в дослідах Баха виявилися значно меншими, ніж в разі прикладання навантаження в центрі тяжіння. Виявивши дослідним шляхом відхилення від закону плоских перерізів, Бах пояснив це відхилення несиметричністю перерізу. Пояснення невірне, але експериментально встановлений факт ініціював подальші дослідження.

Після робіт Баха і Тимошенка питання про кручення тонкостінних балок, що супроводжується згином окремих елементів, протягом ряду років в пресі не висвітлювався. Але в 1921 р, тобто через 12 років після дослідів Баха, з'явилася робота Майара [Mai1lart, 1921], присвячена питанню згину і кручення тонкостінних металевих балок. У цій роботі автор, аналізуючи досліди Баха, зазначає, що відхилення від закону плоских перерізів при крученні, супроводжуваному згином окремих елементів, може мати місце також і в симетричних профілях.

У своїх наступних статтях Майар крім результатів експериментальних досліджень приводить розрахункові дані щодо визначення центру згину [Mai1lart, 1922]. Ці дані були одержані ним на підставі методу С. П. Тимошенка. Центр згину він визначає як точку, в якій врівноважується сумарний момент рівнодійних елементарних дотичних напружень (рис. 10.3).

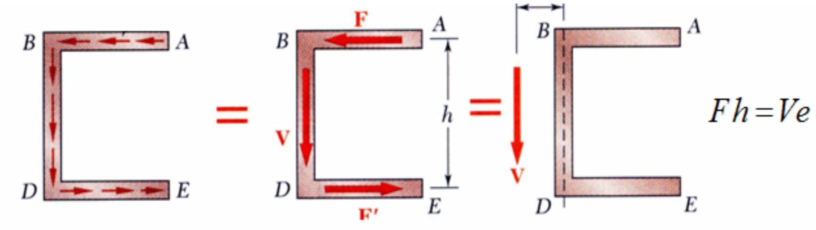


Рис. 10.3. До визначення центру згину

У 1927 р з'явилася експериментальна робота С.А. Бернштейна [Бернштейн, 1927], в якій автор, підтверджуючи результат експериментів Баха, відзначав значне відхилення характеру розподілу нормальних напружень в поперечних перерізах поясів ферм відкритих мостів від закону плоских перерізів і назвав це явище «депланація».

У період з 1921 по 1926 рр. були надруковані роботи Циммермана [Zimmermann, 1922], Егеншвілера [Eggenschwyler, 1921], [Eggenschwyler, 1924] і Вебера [Weber, 1926]. В останній роботі автор, крім методу визначення центру згину, дає узагальнення результатів Тимошенка по крученню двотаврової балки, вказуючи метод визначення додаткових нормальних напружень при крученні для будь-яких профілів з двома полицями (двотаврового з однаковими і різними полицями, швеллерного і зетового). У цій же роботі Вебер звернув увагу на зв'язок між центром згину і центром кручення, тобто точкою перерізу, яка при крученні не рухається. Він помилково вважав, що обидві ці точки при крученні, супроводжуваному згином полиць профілю, збігаються.

У 1929 році Вагнер намітив риси теорії тонкостінних стержнів з довільною формою відкритого профілю [Wagner, 1929]. При виведенні своїх формул для додаткових нормальних напружень від кручення Вагнер користувався законом, аналогічним закону секторіальних площ, виведеному В.З. Власовим в 1936 р. для профілів довільного обрису [Власов, 1936]. При розгляді деформації кручення Вагнер вважав, що центр кручення при втраті стійкості збігається з центром згину. Насправді ж центр кручення, як правило, не збігається з центром згину. Збіг має місце тільки в одному окремому випадку поперечного перерізу стержня, а саме, коли центр згину збігається з центром ваги перерізу. Мабуть, вперше на неточність результатів Вагнера звернув увагу Остенфельд [Ostenfeld, 1931], який отримав точні розв’язки для таврового, кутикового і швеллерного перерізів.

У 1936 році Фрідріх Блейх і Ганс Блейх опублікували теорію згину, кручення і стійкості тонкостінного стержня з полігональним відкритим профілем [Bleich F. & Bleich H., 1936]. У задачі стійкості автори цієї статті, користуючись енергетичним методом, отримали систему трьох диференціальних рівнянь, що відносяться до випадку центрального стиснення.

Однак вони виходили із закону плоских перерізів і замінювали задані в поперечному перерізі нормальні напруження рівнодіючою, приймаючи її за зосереджену силу, прикладену в центрі тяжіння. Внаслідок такої заміни був втрачений один з трьох коренів відповідного детермінантного рівняння, а для двох інших коренів отримані неточні результати.

Теорія згину, кручення і стійкості тонкостінного стержня довільного профілю запропонована Каппусом в 1937 році [Kappus, 1937], на рік пізніше В.З. Власова.

Василь Захарович Власов *(1906-1958)*
рос. Василий Захарович Власов

У книзі В.З. Власова про тонкостінні стержні, яка вийшла в 1940 році [Власов, 1940], постановка задачі і її розв’язок викладені з максимальною повнотою. В.З. Власов відштовхувався від розробленої ним теорії циліндричних оболонок, але для тонкостінного стержня значно спростив загальні рівняння, ввівши дві кінематичні гіпотези: гіпотезу про відсутність зсувів серединної поверхні і гіпотезу про незмінність форми поперечного перерізу. При цьому виявилося, що депланація в разі стисненого кручення відрізняється лише масштабом від депланації, що відповідає вільному крученню того ж стержня (цей масштаб змінюється від перерізу до перерізу).

У формулі для нормального напруження, крім трьох звичайних членів, фігурує доданок, що ініціюється бімоментом і визначається за законом секторіальної площі. Побудована теорія дозволила дати вичерпний розв’язок задачі про роботу тонкостінного стержня при крученні, про згинно-крутильну форму втрати стійкості і про коливання тонкостінних пружних стержнів, а також розвинути методи розрахунку стержнів з пружними і жорсткими в'язями і методи розрахунку стержнів при поперечних навантаженнях.

У цій теорії виникли спочатку дещо незвичні поняття бімоменту, секторіального моменту інерції тощо. Але, як показала саме життя, до цих понять дуже швидко звикли. Детально досліджено питання про можливість застосування принципу Сен-Венена і показано, що він тут має обмежене застосування. Зокрема, В.З. Власов виявив ефект закручування тонкостінного стержня під впливом поздовжнього навантаження. Так, наприклад, для Z-подібного профілю при розтягуванні стінки подовження її крайніх

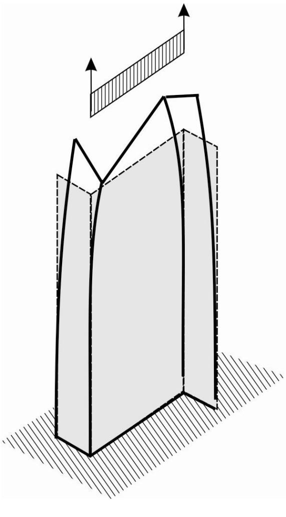


Рис. 10.4

волокон призводить до згину полиць, що створює закручування профілю (рис. 10.4).

У наступні роки з'явилася величезна кількість літератури, присвяченої обговоренню основ теорії В.З. Власова, розробці методичних варіантів її побудови (див., наприклад, роботи [Джанелидзе, 1943, 1944]), в яких аналізувалися можливості відмови від деяких гіпотез.

Гіпотеза про незмінність контуру перерізу особливих заперечень не викликала. Справа в тому, що підкріплюючі елементи типу ребер жорсткості, діафрагм тощо насправді створюють умови, близькі до тих, які стверджуються в цій гіпотезі. Значно більше уваги було приділено гіпотезі про відсутність зсувів в серединній поверхні.

Найбільш обґрунтоване дослідження точності цієї теорії виконано А.Л. Гольденвейзером [Гольденвейзер, 1949]. Виходячи з теорії оболонок, він показав, що гіпотеза про недеформівність контуру виконується досить точно навіть для коротких стержнів, в той же час гіпотеза про відсутність зсувів не тягне за собою істотних помилок лише за умови $d/L \sim t/d << 1$.

Проблема розрахункового аналізу стисненого кручення тонкостінного стержня з закритим профілем дещо затрималась у своєму розвитку. Розв’язок Бредта задовольняв інженерів-практиків, а дослідники билися над загадками стержнів відкритого профілю. Тільки в 1926 р. Е. Рейсснер розглянув стиснене кручення прямокутного коробчатого стержня [Reissner, 1926], і потім протягом багатьох років цей окремий випадок був, по суті, єдиним об'єктом досліджень в даній галузі.

Перша в світовій літературі публікація, присвячена стисненому крученню тонкостінних стержнів з закритим профілем, відноситься до 1932 року і належить В.М. Бєляєву [Беляев, 1932]. Їм розглянута коробка прямокутного перерізу, що складається з чотирьох відносно потужних поясів, чотирьох тонких стінок і деякого числа діафрагм. Для спрощення розв’язку В.М. Бєляєв запропонував вважати стінку такою, що не працює на нормальні напруження (в перерізі, перпендикулярному осі конструкцій), і здатною сприймати лише дотичні напруження; в той же час їм було прийнято, що кутові пояси працюють тільки на поздовжні зусилля (рис. 10.5). В.М. Бєляєв отримав зручну ланцюгову систему рівнянь для визначення зайвих невідомих («рівняння трьох осьових сил»).

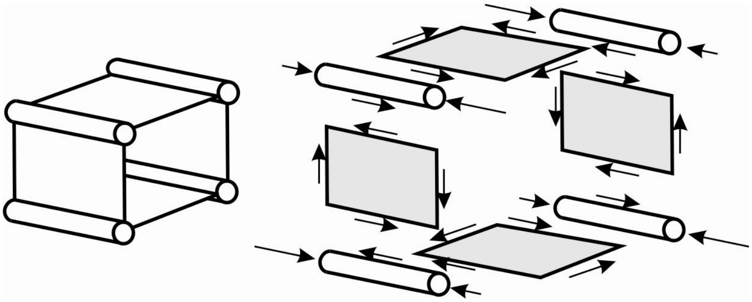


Рис. 10.5. Модель тонкостінного стержня із замкнутим перерізом

Важливе значення роботи В.М. Бєляєва полягає у виявленні і аналізі явища стисненого кручення в конструкціях із закритим профілем, однак запропонована ним методика, безпосередньо стосувалася тільки чотирипоясних конструкцій і не давала можливості досліджувати стиснене кручення в більш загальному випадку.

Поштовх новим дослідженням дала авіація, тут треба було детально передбачити особливості поведінки моноблочного крила літака при крученні. Створення прикладної теорії тонкостінних стержнів з закритим профілем довільної форми зобов'язане, в основному, працям О.А. Уманського. Їм було запропоновано оригінальний метод розрахунку тонкостінних стержнів з жорстким закритим профілем і розглянуто на основі бімоментної теорії ряд нових задач стосовно розрахунку плоских спарених стержневих конструкцій, названих ним біконструкціями.

Таке дослідження, виконане О.А. Уманським [Уманский, 1939], поклало початок вивченню великої проблеми стисненого кручення для загального випадку конструкцій довільного замкнутого профілю. О.А. Уманський висунув пропозицію описувати депланацію при стисненому крученні тим же законом, що і в разі вільного кручення (проте міра депланаційних переміщень є змінною по довжині конструкції), а форму перерізу в його площині вважати такою, що зазнає спотворень (рис. 10.6). На цій основі було отримано цілком загальний розв’язок задачі про стиснене кручення стержня з довільним закритим профілем.

Олександр Азарієвич Уманський
(1900-1973)

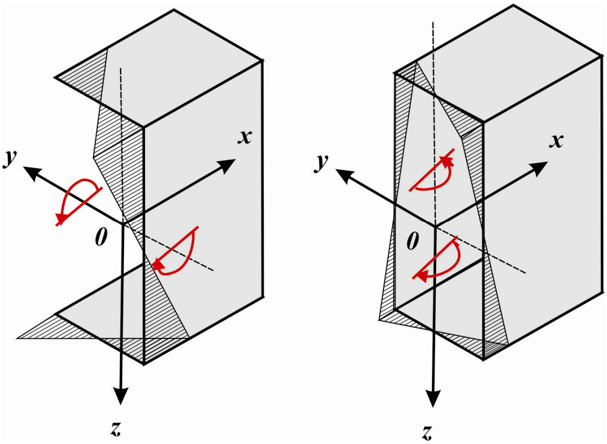


Рис. 10.6. Депланації і бімоменти стержня з відкритим і замкнутим перерізом

У подальшій роботі О.А. Уманського [Уманский, 1940] зазначене співвідношення було замінено іншим, причому друга редакція теорії О.А. Уманського виявилася більш точною. Значно пізніше цих праць з'явилися зовсім аналогічні публікації (без посилань на О.А. Уманського). Перший варіант теорії О.А. Уманського викладено в роботах Кармана і Крістенсена [Kármán &

Christensen, 1944], Райтхеля [Raithel, 1963] і Рюдигера [Rudiger, 1964]. Другий варіант теорії О.А. Уманського викладено в публікації Грассе [Grasse, 1965].

Георгій Юстинович Джанелідзе (*1916-1964)*
рос. Георгий Юстинович Джанелидзе

У книзі [Джанелидзе, Пановко, 1948], крім основних результатів, що відносяться до обґрунтування бімоментної теорії згинального кручення стержнів відкритого профілю, з достатньою повнотою викладаються також і методи визначення напружень і деформацій при стисненому крученні стержня закритого профілю.

Вони також розглянули шляхи вирішення задач про стиснене кручення, засновані на наближеній заміні тонкостінного стержня системою тонких поясів, які працюють на поздовжні зусилля і пов'язані обшивкою, що працює тільки на зсув (схема В.М. Бєляєва, рис. 10.5). У 1950 році до цієї схеми прийшов Бенскотер [Benscoter, 1950], потім її ефективно розвивали Аргіріс і Келсі [Argyris & Kelsey, 1960].

Поширення бімоментної теорії згинного кручення на тонкостінні плоскі криволінійні стержні дано в роботах Н.Я. Грюнберга [Грюнберг, 1949], Г.Ю. Джанелідзе [Джанелидзе, 1943], О.Р. Ржаніцина [Ржаницын, 1946] і О.А. Уманського [Уманский, 1944].

Приблизно в ці ж роки почалися дослідження роботи тонкостінного стержня за границею пружності. До числа перших відноситься стаття [Ржаницын, 1941]. В інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України проводила дослідження О.І. Стрельбицька [Стрельбицкая, 1954], [Стрельбицкая, 1956], дослідження якої, підтверджені експериментами, мають велике практичне значення.

Яків Гілелевич Пановко*(1913-2002)*
рос. Яков Гилелевич Пановко

10.1.2. Повернення до витоків

Прагнення до більш строгого обґрунтування практичних методів аналізу, характерне для останнього часу, породило ряд робіт, присвячених ретельному аналізу гіпотез, покладених в основу прикладних варіантів теорії тонкостінних стержнів.

Характерною в цьому відношенні можна назвати роботу [Rodriguez & Viano, 1997], в якій теорія В.З. Власова отримана як асимптотичне наближення тривимірної моделі призматичного тіла, у якого товщина елементів поперечного перерізу спрямовується до нуля. Роботи згаданого напряму часто ініціюються не тільки прагненням до «наведення порядку в основах», а й проблемами побудови досить універсальних алгоритмів для програмування задачі з метою її чисельного розв’язання. Тут часто не можна покладатися на інженерне чуття і неформальний аналіз, за допомогою яких вибирається та чи інша використовувана гіпотеза, а необхідно мати чітко формалізовані правила поведінки.

Володимир Ісаєвич Слівкер *(1937-2011)*
рос. Владимир Исаевич Сливкер

Багато років дослідників не влаштовувала нестиковка теорії тонкостінних стержнів відкритого профілю, в якій не враховуються зсувні деформації, з теорією тонкостінних стержнів замкнутого профілю, побудованою з урахуванням зсувів. Робилися різні спроби примирити ці підходи, які враховували у той чи інший спосіб вплив деформацій зсуву на роботу тонкостінного стержня. Помітний результат був отриманий відносно недавно В.І. Слівкером [Сливкер, 2005], який запропонував подати дотичні напруження у вигляді суми двох складових: дотичних напружень згину, породжених поперечними силами, і дотичних напружень кручення, що спричинені моментом стисненого кручення. Далі було запропоновано знехтувати дотичними напруженнями згину, віднісши їх до розряду другорядних, але зберегти в той же час дотичні напруження кручення. Така напівзсувна теорія є універсальною для розрахунку як тонкостінних стержнів відкритого профілю (на основі теорії В.З. Власова), так і закритого профілю (на основі теорії О.А. Уманського) з огляду на схожість відповідних диференціальних рівнянь кручення і енергетичних функціоналів

Важливим припущенням теорії тонкостінних стержнів є гіпотеза про незмінність форми поперечного перерізу. Однак в деяких випадках ця гіпотеза входить у протиріччя з даними спостережень. Ще на початку XX століття на цей факт звернули увагу при дослідженні поведінки криволінійних труб, коли результати розрахунку за звичайною теорії стержнів сильно розійшлися з фактично спостережуваною картиною деформацій. Стаття Т. Кармана [Karman, 1911], яку зараз вважають класичною, була першою роботою, в якій розкрита причина помітного відмінності теоретичних даних від експериментальних.

Згодом результати відмови від гіпотези про недеформівність поперечного перерізу почали інтенсивно вивчатися, коли набули актуальності питання місцевої стійкості сталевих конструкцій, виконаних з тонкостінних гнутих профілів.

Математичні труднощі вирішення цієї нелінійної задачі надовго затримали дослідження в цій галузі, і лише використання чисельних методів аналізу, зокрема, методу скінченних елементів зробило таку постановку задачі практичною. Так, наприклад, в роботі [Nedelcu, 2009] автор розглядає рівновагу тонкостінного стержня з недеформівним і деформівним поперечним перерізом, а також торкається питань стійкості.

Найчастіше чисельні дослідження поведінки тонкостінних стержнів виконуються з використанням методу скінченних елементів. Тут розв’язуються в тому числі і нелінійні задачі, аналітичне розв’язання яких практично нездійсненно, і однією з перших робіт такого типу можна вважати статтю Р. Барсума і Р. Галлагера [Barsoum & Gallagher, 1970], в якій розглядалося розв’язання задачі про стійкість плоскої форми рівноваги тонкостінного стержня відкритого профілю при чистому згині. В інших роботах досліджується поведінка тонкостінного стержня при великих переміщеннях і інші питання нелінійного поведінки [Chen & Blandford, 1991], [Meek & Lin, 1990], [Conci & Gattass, 1990].

10.2. Стійкість рівноваги

10.2.1. Дія поздовжньої сили

Як було зазначено вище, теорія тонкостінних стержнів походить із задачі про стійкість плоскої форми згину двотаврової балки. Але серйозне дослідження стійкості таких стержнів при дії поздовжньої сили почалося, по суті, в роботах В.З. Власова. В рамках його підходу задача про стійкість плоскої форми згину стає **окремим випадком загальної теорії стійкості рівноваги тонкостінних стержнів**.

Були виявлені деякі принципові відмінності в поведінці тонкостінного стержня від звичайного стержня Бернуллі-Ейлера.

По-перше, виявилося, що при позацентровій дії поздовжньої сили явище втрати стійкості може виникнути як в разі стиснення, так і в разі розтягування. У разі стиснення стержень може втратити стійкість при будь-якому положенні сили в поперечному перерізі; в разі ж розтягування явище втрати стійкості може мати місце за умови, якщо поздовжня сила прикладена поза областю стійкості, яка представляє собою коло незалежно від форми поперечного перерізу стержня.

По-друге, згинна і крутильна форми втрати стійкості рівноваги в загальному випадку центрально стиснутого стержня не розділяються. І якщо координати центру згину не дорівнюють нулю, (центр згину не збігається з центром ваги перерізу), то ейлерова згинна форма втрати стійкості при центральному стиску стає неможливою. Природною формою втрати стійкості для такого стержня є згинно-крутильна, при якій критична сила буде мати менше значення, ніж сила, знайдена за звичайною теорією поздовжнього згину.

Рівняння стійкості рівноваги тонкостінних стержнів, отримані В.З. Власовим, викликали свого часу жваву дискусію. Основним спонукальним мотивом цієї дискусії був спосіб виведення цих рівнянь, при побудові яких В.З. Власов виходив не з умов стійкості рівноваги, що призводять до однорідних рівнянь, а з деформаційних рівнянь, відкидаючи потім їх праві частини при визначенні критичних сил. Математично бездоганний шлях побудови рівнянь стійкості для тонкостінних стержнів, що не залишає лазівок для подальших суперечок з приводу строгості виведення цих рівнянь і заснований на варіаційному критерії стійкості, був вказаний лише в 1965 році В.В. Болотіним [Болотин, 1965].

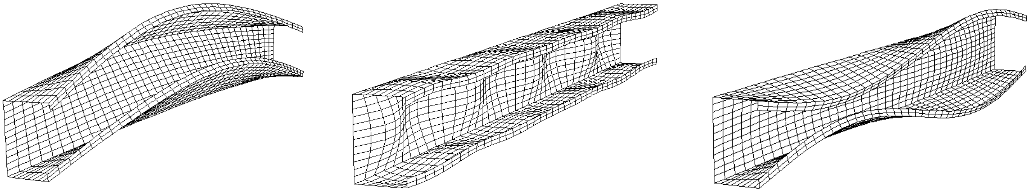
10.2.2. Місцева стійкість

Зі зменшенням товщини елементів тонкостінного стержня починають проявлятися такі особливості поведінки, які не відображаються класичною теорією В.З. Власова, що базується на гіпотезі про незмінність контуру поперечного перерізу стержня і розглядає тільки три форми втрати стійкості (згинну, крутильну, згинно-крутильну).

Можливість викривлення контуру поперечного перерізу тонкостінного стержня при стисненні і згині проявляється у вигляді локальної втрати стійкості, коли випучуються окремі пластини, які складають контур. При цьому лінії контакту суміжних пластин залишаються прямолінійними (рис. 10.7, *б*).

Пізніше в експериментальних роботах Дж.Б. Дуайта [Dwight, 1963] і теоретичних дослідженнях М.Л. Шарпа [Sharp, 1966] було звернуто увагу на особливу місцеву форму втрати стійкості, пов'язану із втратою стійкості одночасно декількох пружно пов'язаних пластин, що разом утворюють стержень, яку назвали дисторсією (рис. 10.7, *в*).

Роботи по оптимізації форми поперечного перерізу тонкостінних стержнів показали, що для таких перерізів дисторсія часто є домінуючою формою втрати стійкості. Цей факт стимулював дослідження дисторсії і розвиток відповідних методів аналізу. Як інструмент дослідження Хенкок і Лау розвивали і популяризували метод скінченних смуг [Hancock, 1985], [Hancock & Lau, 1987]. Вони досліджували роль граничних умов і провели зіставлення з даними експериментів, де була виявлена дисторсія.



а *б* *в*

Рис. 10.7. Втрата стійкості тонкостінного стержня: *а* – згинно-крутильна, *б* – місцева, *в* – дисторсійна

Експерименти показали, що несуча здатність тонкостінного стержня в момент місцевого випучування може бути не вичерпаною. Для того, щоб судити про несучу здатність, необхідно досліджувати закритичну поведінку стиснутого стержня. При цьому вирішуються такі задачі:

1) встановлення закону розподілу напружень в закритичній стадії по ширині елемента з метою визначення «ефективної», сприймаючої навантаження частини пластини;

2) дослідження загальної стійкості і розрахунок руйнівного навантаження стержня з ослабленим («редукованим») перерізом.

Першу задачу - визначення ефективної ширини (або "редукційного коефіцієнта") окремої пластини після місцевого випучування вперше розглянув І.Г. Бубнов [Бубнов, 1908]. Пізніше Т.Карман [Karman et al., 1932] представив інженерну методику врахування впливу втрати місцевої стійкості, заснованої на понятті «ефективного перерізу», коли зниження несучої здатності окремої пластини внаслідок її випучування замінювалося умовним «виключенням» з роботи її частини. З урахуванням модифікації, запропонованої Вінтером за результатами експериментів [Winter, 1947], ця методика використовується і сьогодні.

Різними дослідниками були отримані різні формули для визначення редукційного коефіцієнта. Необхідно відзначити, що точні розв’язки були знайдені для окремих пластин з ідеалізованими граничними умовами (шарнірне опирання, жорстке защемлення), і стосовно тонкостінних конструкцій такі рішення можна розглядати тільки як наближені. У зв'язку з цим становить інтерес робота [Koiter, 1976], де отримана проста формула для оцінки знизу редукційного коефіцієнта.

Задачу про несучу здатність тонкостінних стержнів, складених з пластин, після місцевого випучування, мабуть, вперше розглянули Байлард і Фішер [Bijlaard & Fischer 1954]. Досліджувалися стислі стійки двотаврового і квадратного перерізів. Було показано, що додаткові (по відношенню до місцевої форми) переміщення тонкостінних елементів стержня, зумовлені загальним згином, подібні до другої місцевої форми.

У перших роботах розглядалася тільки однобічне трактування взаємодії форм випучування, тобто урахування впливу тільки локального випучування на подальшу загальну втрату стійкості. Такий підхід може бути достатнім в разі, коли напруження загального випучування є значно вищими за критичні напруження місцевої форми, і обидві стадії процесу випучування можна розділити.

У загальному випадку місцеві і загальні форми випучування можуть складним чином впливати одна на одну, і цей «взаємовплив» виявляється важливим фактором, що визначає несучу здатність. Ігнорування цієї особливості поведінки стиснутих тонкостінних стержнів може привести на практиці до дуже небезпечних наслідків. Так, наприклад, було висловлено припущення про те, що саме взаємодія форм загальної та місцевої втрати стійкості стала ймовірною причиною ряду великих катастроф сталевих мостів у Відні (1969 р.), Мілфорді (1970р.), Мельбурні (1970р.), Кобленці (1971р.). Руйнування відбувалося при навантаженнях нижче теоретичних на 30% і більше (при цьому розрахункові критичні напруження загального випучування і місцевого випучування ребер були близькими).

Важливим етапом у розвитку теорії зв'язаного випучування пластинчато-стержневих систем з'явилася робота Нейта [Neut, 1969], яка розглядає стійку коробчатого перерізу у вигляді моделі, що складається з двох несучих полиць-пластин (жорсткістю бічних пластин нехтують). Завдяки урахуванню місцевих недосконалостей, граничне навантаження може виявитися як нижче, так і вище критичного значення навантаження для місцевої форми. Новизна роботи [Neut, 1969] полягала, перш за все, у виявленні нестійкості рівноваги стійки в точці біфуркації в разі близькості критичних напружень ейлерового і місцевого випучування і пов'язаної з цим чутливості до недосконалостей для стійок, близьких до рівностійких.

Запропонована в роботі [Neut, 1969] модель служила зручним об'єктом для дослідження питань зв'язаного випучування реальних конструкцій. Її використовували [Thompson & Lewis, 1972], [Neut, 1973], [Gilbert & Calladine, 1974], [Svensson & Croll, 1977] та ін. Було зроблено висновок про те, що саме зв'язане випучування в пружно-пластичній області, як правило, визначає несучу здатність стійки. В роботі [Thompson, Lewis, 1972], яка використала модель Нейта при розв’язанні задачі оптимального проектування, було показано, що при наявності місцевих недосконалостей оптимальна стійка не є однаково стійкою і відповідає умові підвищеного запасу за місцевою формою.

10.3. Системи з тонкостінних стержнів

Як правило, тонкостінні стержні працюють не поодинці, а в складі плоских або просторових систем. У зв'язку з цим з'явилися роботи, де була зроблена спроба розв'язати відповідні задачі. Основною проблемою тут виявилося питання сумісності деформацій у вузлах стикування тонкостінних елементів. Це питання легко вирішується для нерозрізного тонкостінного стержня, у якого на проміжній опорі збігаються депланації торцевих перерізів елементів, що стикуються.

Борис Миколайович Горбунов
(1901-1944)

Мабуть, першим, хто спробував вирішити питання про розрахунок рами, складеної з тонкостінних стержнів був Б.М. Горбунов, який вказав метод розрахунку плоских рам такого типу при просторовому навантаженні [Горбунов, 1943]. Тут, як і в наступних роботах Б.М. Горбунова та О.І. Стрельбицької [Горбунов, Стрельбицкая, 1948, 1950], де висвітлювалися питання розрахунку тонкостінних вагонних рам, використовувалася гіпотеза про абсолютну жорсткість в своїй площині вузлової фасонки, що забезпечувало рівність депланацій торцевих перерізів усіх стержнів, що сходилися у вузлі (рис. 10.8).

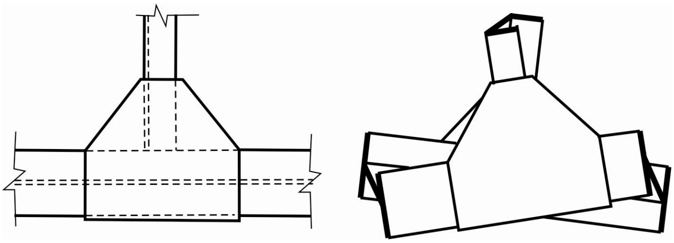


Рис. 10.8. Вузол вагонної рами

Робилося чимало спроб побудови досить універсального алгоритму для розрахунку довільних тонкостінних стержневих систем, і тут основною проблемою було формулювання крайових умов на кінцях тонкостінного стержня.

У деяких роботах виходили з того, що на кінці стержня депланація або повністю відсутня, або не зустрічає ніяких перешкод. Однією з перших в цьому напрямку була робота [Ставраки, 1948]. У ній розглядалися просторові (зокрема, циклічно симетричні) системи з тонкостінних стержнів за припущення, що їх вузли є або нескінченно жорсткими, і депланація торцевих перерізів всіх стержнів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю, або конструкція вузла така, що для всіх торцевих перерізів забезпечується свобода депланації.

В інших дослідженнях використовувалася гіпотеза про рівність депланації на торцях всіх тонкостінних стержнів, що сходяться у вузлі (див., наприклад, [Урбан, 1955]). В дещо зміненій формі ця ж гіпотеза присутня в роботі [Туснин, 2009], в якій вводиться поняття «коефіцієнта перетворення депланації ». Ці коефіцієнти задаються для переходів типу «стержень - стержень», а не «стержень - вузол» і визначаються для пари стержнів, що примикають до вузла. Яким він буде для третього, четвертого і т.д. стержня, які можуть сходиться в вузлі, невідомо. Оскільки депланація є скаляром, то повністю позбавлені сенсу висловлювання типу «орієнтація осі депланації», а також всі інші маніпуляції зі зміною орієнтації таких «осей», якими насичена книга [Туснин 2009].

У загальному випадку неспроможність гіпотези про рівність депланацій всіх торцевих перерізів, що примикають до вузла, була продемонстрована в роботі [Перельмутер, Юрченко, 2012]. На простих прикладах було показано, що депланації торцевих перерізів всіх елементів, що сходяться у вузлі, не збігаються, а їх значення залежать від конструкції вузла, деформація якого справляє помітний вплив на поведінку конструкції.

Поняття суперелемента вузла, введеного і дослідженого в [Szymczak et al., 2003], [Mikulski, 2010], дозволяє врахувати взаємодію між внутрішніми зусиллями і деформацією вузла і торцевими перерізами примикаючих до нього тонкостінних стержнів. Були запропоновані й інші прийоми розрахунку, що дозволяють врахувати деформативність вузлових з'єднань [Черный, 1996], [Cichoń, Koczubiej, 2008], [Koczubiej, 2011].

Література

Беляев В.Н. К расчету пространственной коробчатой системы при действии закручивающих сил // Техника воздушного флота, 1932, №4

Бернштейн С.А. Опытное исследование работы верхнего пояса открытого моста // Исследование напряжений и деформаций при статической работе моста, Вып. 60 — М.: Транспечать, 1927.— С. 288-296.

Болотин В.В. О понятии устойчивости в строительной механике. // Проблемы устойчивости в строительной механике. — М.: Стройиздат, 1965. — С. 6-27

Власов В.З. Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие осевой силы, изгиба и кручения // Вестник Военно-инженерной академии РККА, 1936, №20

Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни — М.: Госстройиздат, 1940

Гольденвейзер А.Л. О теории тонкостенных стержней // Прикладная математика и механика, Том 13, вып. 6, 1949

Горбунов Б.Н. Расчет пространственных рам из тонкостенных стержней // Прикладная математика и механика, 1943. Том 7, вып. 1.

Горбунов Б.Н., Стрельбицкая А.И. Теория рам из тонкостенных стержней. – М.: Гостехиздат, 1948. – 198 с.

Горбунов Б.Н., Стрельбицкая А.И. Расчет прочности тонкостенных стержневых систем // Расчет пространственных конструкций. Вып. 1. – М.: Изд-во министерства строительства предприятий машиностроения, 1950. – С. 97–162.

Грюнберг Н.Я. Изгиб н кручение тонкостенных криволинейных стержней, Труды лаб. строит, механики ЦНИПС, 1949.

Джанелидзе Г.Ю. Вариационная формулировка теории тонкостенных упругих стержней В. 3. Власова // Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 6, 1943.

Джанелидзе Г.Ю. Теория тонких криволинейных стержней, обладающих в поперечном сечении недеформируемым контуром // Прикл. матем. и механ., т. 8, вып. 1, 1944.

Джанелидзе Г.Ю., Пановко Я.Г. Статика упругих тонкостенных стержней, Гостехиздат, 1948. — 208 с.

Перельмутер А.В., Юрченко В.В. О расчете пространственных систем из тонкостенных стержней открытого профиля // Строительная механика и расчет сооружений, 2012, №6.— С. 18-25.

Ржаницын А.Р. Сложное сопротивление тонкостенных стержней с недеформируемым контуром в пределах и за пределами упругости // Труды лаборатории строительной механики ЦНИПС М.: Стройиздат, 1941

Ржаницын А.Р. Расчет металлических двутавровых балок, получивших начальное искривление в горизонтальной плоскости, 1946.

Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы — М.: Издательство АСВ, 2005.— 736 с.

Ставраки Л.Н. Пространственные прямоугольные рамы из тонкостенных стержней (глава V в книге Вайнберг Д.В., Чудновский В.Г. Пространственные рамные каркасы инженерных сооружений) К.: Гостехиздат Украины, 1948.

Тимошенко С.П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости // Известия СПб Политехнического института, т. IV, вып. 3-4, 1905 — С. 151-219; т. V, вып. 1-2, 1906 — С. 3-34; т. V, вып. 3-4, 1906 — С. 263-292.

Тимошенко С.П. Об устойчивости упругих систем. Применение новой методы к исследованию устойчивости некоторых мостовых конструкций // Известия Киевского политехнического института. Отдел инженерной механики, Книга 4, 1910 — С. 375-560

Тимошенко С.П. Воспоминания ─ М.: Вузовская книга, 2014 ─ 444 с.

Туснин А. Р. Численный расчет конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. — М. :Изд-во АСВ, 2009. — 143 с.

Уманский А.А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций.— М.: Оборонгиз, 1939.— 112 с.

Уманский А.А. О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета // Техника воздушного флота, 1940, № 12, с. 48-65.

Уманский А.А. Расчет тонкостенных кривых балок // Труды научно-технической конференции ВИА им. Н.Е. Жуковского. Вып. 2, том 2 М.: Издание ВИА, 1944 — С. 35-48.

Урбан И.В. Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций — М.: Трансжелдориздат, 1955 — 193 с.

Черный А. Н. К вопросу моделирования узловых соединений тонкостенной стержневой системы // Механика и процессы управления. – Ульяновск: УГТУ, 1996. – С. 54–58.

Argyris J.H., Kelsey S. Energy theorems and Structural Analysis —London: Butterworth Scientific publications, 1960 [Русск. перевод: Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций // Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем — Л.: Судпромгиз, 1961. — С. 37-293.]

Bach C. Versuche uber die tatsachliche Widerstandskraft von Balken mit U-formigem Querschnitt // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1909, vol. 53 — P. 1790–1795.

Bach C. Versuche über die tatsachliche Widerstandskraft von Tragern mit U-formigem Querschnitt // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1910, vol. 54 — P. 382–387.

Barsoum R.S., Gallagher R.H. Finite Element Analysis of Torsional and Torsional Flexural Stability Problems // Int. J. Num. Methods Engrg., 1970, Vol. 2, — P. 335-352

Benscoter S.U. Secondary stresses in thin-walled beams with closed cross-sections. Dissertation (Ph.D.), California Institute of Technology, 1950

Bijlaard P.P., Fischer G.P. Column strength of H-sectlon and sguare tube in postbuckling range of component plates. NACA, TN-2994, 1954.

Bleich F., Bleich H. Bending, torsion and buckling of bars composed of thin walls // IABSE Congress Report, 1936, Volume 2 — P. 871-894.

Bredt R. Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizitat. // ZVDI, 1896, vol. 40, No. 28 — P. 785–790 & No. 29 — P. 813–817.

Chen H., Blandford G.E. Thin-walled Space Frames. I: Largedeformation Analysis Theory. // J. Struct. Engrg., ASCE, 1991, Vol. 117, No. 8 — P. 2499-2520

Cichoń C., Koczubiej S. Consistent FEM model for thin-walled space frames // Czasopismo Techniczne, 21, Budownictwo 1-B, 2008, vol. 21. – P. 3–20.

Conci, A. Gattass M. Natural Approach for Geometric Nonlinear Analysis of Thin-walled Frames. // Int. J. Numer. Methods Engrg., 1990, Vol. 30 — P. 207-231

Distortions, Solid Mechanics, - 2, 25, Elsevier, pp 553 - 573.

Dwight J.B. Aluminum Sections with Lipped Flanges and Their Resistance to Local Buckling // Proceeding Symposium on Aluminum in Structural Engineering London: 1963

Eggenschwyler A. Zur Frage des Schubmittelpunktes // Schweizerische Bauzeitung, 1924, vol. 83, No. 22. – P. 259–261.

Eggenschwyler A. Über die Drehungsbeanspruchung von dunnwandigen symmetrischen-formigen Querschnitten // Der Eisenbau, 1921, vol. 12, No. 9 — P. 207–215.

Gilbert B.B., Galladine C.R. Interaction between the effects of local and overall imperfections on the buckling of elastic columns // J. Mech. Phys. Solids, 1974, Vol. 22, — P. 519-549.

Grasse W. Wolburafttorsion dtinnwandiger prismatischer Stabe beliebigen Querschnitts. Ingenieur—Archiv, 1965, Bd. 34, № 5.

Hancock G.J. Distortional Buckling of Steel Storage Rack Columns // Proc. ASCE. Journal of Structural Engineering, 1985, Vol. 111,12 — P. 2770-2783.

Hancock G.J ., Lau S.C.W. Distortional Buckling Formulas for Channel Columns // Proc. ASCE. Journal of Structural Engineering, ,1987, Vol.113, No 5 — P. 1063 - 1078.

Hikosaka H.,Takami K., Maruyama Y. Analysis of Elastic Distortional Instability of Thin-Walled Members with Open Polygonal Cross Section // Proceedings of Japan Society of Civil Engineers, Structural Eng./Earthquake Eng., 1987, Vol. 4, No. 1 ─ P. 31 - 40.

Kappus R. Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich // Luftfahrtforschung, 1937. Bd. 14, Nr. 9 — P. 444-457.

Karman Th. Űber die Formānderung d□nnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrore // Zeitschrift f□r Vereines deutscher Ingeniere, 1911, Band 55, №45

Kármán Th., Christensen N.B. Methods of analysis for torsion with variable twist // Journal of the Aeronautical Sciences, 1944, Vol. 11, No 2 — P. 110–124.

Koczubiej S., Cichoń C. Shell-beam model of thin-walled space structures for geometrically nonlinear analysis // Proceeding of the 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics CMM-2011, 9–12 May, 2011, Warsaw, Poland (Full text on CD-ROM).

Koiter W.T. General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures // WTHD Report № 590, 1976 — 41 p.

Lau S.C.W., Hancock G.J. Distortional Buckling Formulas for Channel Columns // Proc. ASCE. Journal of Structural Engineering, ,1987, Vol.113, No 5 ─ P. 1063 - 1078.

Mai1lart R. Über Drehung und Biegung // Schweizerische Bauzeitung, 1922, № 20. — C. 254-257.

Mai1lart R. Zur Frage der Biegung // Schweizerische Bauzeitung, 1921, № 18. — C. 195-197.

Meek J.L., Lin W. J. Geometric and Material Nonlinear Analysis of Thin-walled Beam-columns. // J. Struct. Engrg., ASCE, 1990, Vol. 116, No. 6 — P. 1473-1489.

Mikulski T. Thin-Walled Frames. Modeling and Sensitivity Analysis. Gdansk University of Technology —Gdansk: Publishers, Monographs, 2010.

Nedelcu M. Stability aspects for metallic structures: Ph. d. thesis. Technical University of Cluj-Napoca, 2009 — 107 p.

Neut A. The interaction of local buckling and column failure of thin-walled compression members // Proc. 12 Int. Congr. Appl. Mech. (Stanford Univ. 1968), Springer-Verlag, 1969.-P. 389-399.

Neut A. The sensitivity of thin-walled compression members to column imperfection // Int. J. Solids and Structures,- V 9, 1973.- P. 999-1011.

Ostenfeld A. Politecknisk Laezean stats Laboratorum for Bygningsstatik — Kopenhagen: Meddelelse, 1931.

Raithel A. La sollecitazione di torsione semplice delle travi a parete sottile // Giornale del Ggenio civile, 1963, 101, № 10.

Reissner H. Neuere Probleme aus der Flugzeugstatik // Zeitschrift fur Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1926, No. 18 — P. 384-393.

Rodriguez J.M., Viano J.M. Asymptotic derivation of a general linear model for thin-walled elastic rods // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1997, Vol. 147 P. 287-321.

Rudiger D. Wolburafttorsion dtinnwandiger Hohlquerschnitte // Ingenieur—Archiv, 1964, Bd. 33, № 5.

Sharp M.L. (1966). Longitudinal Stiffeners for Compression Members // Journal of the Structural Division. Prjceeding ASCE, 1966, Vol. 92, N0 ST5 — P. 187-211

Svensson S.E., Croll J.G.A. Interaction between local and overall buckling //Int. J. Mech. Sci., 1977, Vol. I7, № 4 — P. 307-321.

Szymczak C., Kreja I., Mikulski T., Kujawa M. Sensitivity Analysis of Beams and Frames made of Thin-Walled Members. — Gdansk: Gdansk University of Technology Publishers, 2003.

*Takahashi K. (*1988),"A New Buckling Mode of Thin-Walled Columns with Cross-Sectional

Thompson J.M.T., Lewis G.M. On the optimum design of thin-walled members // J. Mech. Phys. Solids, 1972, Vol. 20, № 2.

Wagner H. Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. // Festschrift 25 Jahre T. H. Danzig,. — Danzig: Verlag A. W. Kefermann, 1929 — P. 329–344.

Weber C. Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik, 1926, vol. 6, No. 2 — P. 85–97.

Zimmermann H. Die Knickfestigkeit vollwandiger Stabe in neuer einheitlicher Darstellung // Zentralblatt der Bauverwaltung, 1922, vol. 42, — P. 34–39.

Нарис 11

СТАНОВЛЕННЯ І РОЗВИТОК ПОНЯТТЯ РОЗРАХУНКОВОЇ СХЕМИ СПОРУДИ

Тільки в тому випадку, якщо ми дуже ясно уявимо собі різні аспекти виникнення задач, можна сподіватися, що ми оберемо розумні математичні моделі і застосуємо осмислені математичні методи. Як ми будемо в подальшому неодноразово підкреслювати, поняття відіграють таку ж важливу роль, що і рівняння, а створення і інтерпретація математичних моделей навіть важливіші за ті частинні рівняння, до яких вони приводяться.

Р. Беллман

Створення розрахункових моделей споруд є одночасною задачею як фахівців з будівельної механіки, так і фахівців з конструкцій. Тільки при їх спільній роботі можуть бути створені різні апроксимації реальної фізичної роботи споруди.

І.І. Гольденблат, В.Л. Баженов

Розрахункова схема відображає уявлення конструктора про реальний об'єкт дослідження і про особливості його поведінки. Вона є спрощеною моделлю об'єкта, моделлю очищеною від несуттєвих подробиць і тісно пов'язаною з набором деяких фізичних уявлень про закони, які керують поведінкою об'єкта дослідження. В даний час існує величезний досвід побудови розрахункових схем, з цього досвіду в кожному конкретному випадку запозичуються «типові деталі», такі як ідеалізація форми (стержень, пластина, оболонка), закономірності поведінки матеріалу (пружний, пластичний і т.п.), правила об'єднання цих деталей тощо. Цей арсенал конструктора вироблявся протягом усієї історії будівельної механіки як науки і продовжує удосконалюватися і в даний час.

11.1. Початок шляху. Аналіз окремих задач

Поняття про розрахункову схему зародилося, очевидно, разом із появою науки про міцність в 1638 році, коли вийшла друком книга Галілея «Бесіди і математичні докази, що стосуються двох нових галузей науки», хоча сам термін «розрахункова схема» з'явився значно пізніше.

Уже перші спроби розрахункового аналізу поведінки конструкції, спроби, спрямовані на пошук руйнівного навантаження, виходили з деяких гіпотез про розташування небезпечного перерізу і про розподіл зусиль в ньому. Сукупність цих гіпотез ми сьогодні назвали б розрахунковою моделлю задачі або розрахунковою схемою.

Галілей вважав тверді тіла непружними і досліджував задачу про міцність стержня, розглядаючи його в стані руйнування (в граничному стані за сучасною термінологією). Руйнування він відносив до двох видів деформації - розтягу і згину.

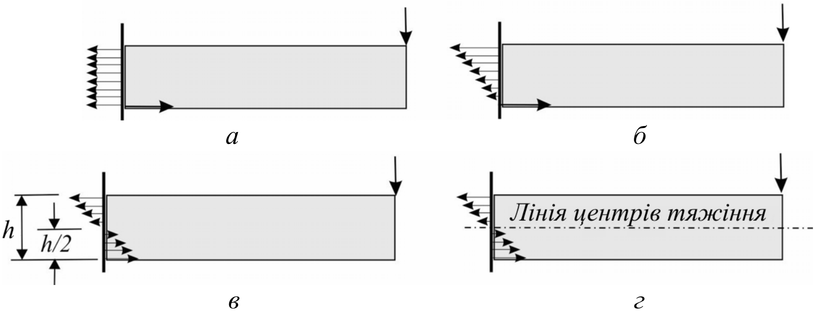


Рис. 11.1. Схеми згину

У першому випадку міцність покладалася пропорційною площі поперечного перерізу, другий випадок Галілей прив'язав до першого, припустивши, що злам консолі відбувається шляхом розкриття тріщини зверху і обертання навколо нижнього ребра, при цьому весь переріз зазнає рівномірного розтягу (рис. 11.1,*а*). Питання про місце зламу в явному вигляді не ставилося, мабуть, Галілей вважав це очевидним.

Надалі було запропоновано кілька законів розподілу напружень по висоті перерізу: Маріотт [Mariotte, 1686] і Лейбніц [Leibniz, 1684] вважали розподіл лінійним з початком координат на краю перерізу (рис. 11.1,*б*), тоді як Паран [Parent, 1713] використовував цей самий закон, але розташовував початок координат посередині висоти перерізу (рис. 11.1,*в*). І лише Нав'є [Navier, 1826] помістив початок координат в центрі ваги (рис. 11.1,*г*). Нарешті, соратник Нав'є по школі мостів і доріг Персі, розвиваючи підхід Нав'є, ввів поняття про момент інерції перерізу, яке стало і залишається неодмінним атрибутом опису розрахункових схем стержневих конструкцій.

Підхід, що був заснований на пошуку схем руйнування і використовував модель у вигляді набору нескінченно жорстких блоків, втрата зв'язку між якими в тій або іншій формі пов'язувалася з руйнування, ще багато років панував в задачі про міцність арок [Бернштейн, 1936]. Важливим було те, що серед можливих схем руйнування з'явилися також зсувні (рис. 11.2)

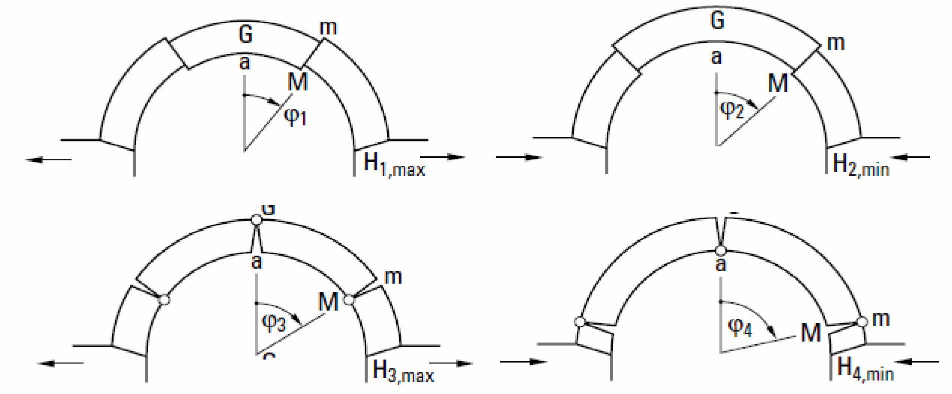


Рис. 11.2. Варіанти руйнування арки за Кулоном

До першого періоду становлення будівельної механіки відноситься і задача про форму гнучкої нитки. Вона розвивалася за двома напрямками. Перший був пов'язаний із задачею, яку сформулював Яків Бернуллі: «*знайти яку форму набуває канат, вільно підвішений в двох точках*», і цей напрямок зіграв важливу роль в становленні математичного аналізу.

П'єр Варіньон
(1654 - 1722)
фр. Pierre Varignon

Другий напрям можна пов'язати з ім'ям Варіньона, основна праця якого [Varignon, 1725] була опублікована вже після його смерті і присвячена теорії мотузкового багатокутника - розрахунковій схемі, яка становить одну з основ графостатики. Ще через 100 років задача про мотузковий багатокутник привернула до себе увагу в зв'язку з проблемою розрахунку висячих мостів, ланцюги яких є мотузковими багатокутниками.

Відкриття закону Гука в 1660 р. і встановлення загальних рівнянь Нав'є в 1821 р. представляють, без сумніву, дві важливі віхи в подальшому розвитку теорії, що почалася з Галілея. Закон Гука дав необхідне експериментальне обґрунтування теорії.

У період часу між відкриттям закону Гука і встановленням загальних рівнянь теорії пружності, отриманих Нав'є, інтерес дослідників був спрямований на розв’язання і узагальнення задачі Галілея, на суміжні проблеми щодо коливань стержнів і пластинок. Перше значне дослідження в цьому напрямку зроблено в 1705 р. Яковом Бернуллі. Воно відноситься до форми пружної кривої стержня і ґрунтується на припущенні, що опір зігнутого бруса залежить від розтягу і стиску його поздовжніх волокон.

При виведенні рівняння згину стержня Я. Бернуллі використовував закон Гука і, крім того, дві наступні гіпотези:

- перерізи, плоскі і перпендикулярні до ребер призми до її згину, залишаються і після згину також плоскими і нормальними до цих ребер і волокон або поздовжніх елементів, які стають криволінійними;
- волокна, одні розтягнуті, інші укорочені, опираються згину незалежно, як нібито вони представляють собою малі ізольовані призми, що не роблять одна на одну ніякої дії.

Ці ж положення були пізніше прийняті Ейлером в його дослідженні, щодо проблем пружної лінії і коливань тонких брусів. Розрахункова схема стержня Ейлера-Бернуллі представляла пружний стержень у вигляді лінійної сукупності частинок, які чинять опір згину.

Успішний розвиток теорії тонких стержнів, заснованої на спеціальних гіпотезах, призвів до думки, що теорія пластинок і оболонок може бути побудована таким же чином. Першим, хто зайнявся цією проблемою, був Ейлер. Він запропонував розглядати дзвін, як сукупність тонких кілець, кожне з яких веде себе, як кривий брус. Слідом за цією роботою було проведене дослідження Якова Бернуллі (молодшого). Він розглядав оболонку як подвійний шар кривих брусів, причому бруси однієї системи перерізаються з брусами іншої системи під прямим кутом [Bernoulli, 1789]. Приводячи оболонку до плоскої пластинки, він отримав рівняння, яке, як ми тепер знаємо, не вірне (не було враховано закручування брусів).

Спроба Якова Бернуллі мала, мабуть, метою отримати теоретичне обґрунтування експериментальних результатів Хладні [Chladni, 1802], щодо фігур вузлових ліній, які спостерігаються при коливаннях пластинок.

Ці результати залишалися ще непоясненими, коли в 1809 році французький Інститут запропонував в якості теми для роботи на Премію задачу про тони коливань пластинки. Після декількох спроб в цій області з'явилася робота Софі Жермен, яка була премійована в 1815 р. і опублікована лише через шість років [Germain, 1821].

Але чітку розрахункову модель пластинки, що згинається, лише в 1850 році запропонував Кірхгоф [Kirchhoff, 1850], який поклав в основу своєї теорії пластинок дві гіпотези, нині загально визнані. Ці гіпотези такі:

- кожна пряма, яка спочатку була перпендикулярною до серединної площини пластинки, залишається при згині

Густав Роберт Кірхгоф *(1824–1887)*
нім. Gustav Robert Kirchhoff

прямою і нормальною до серединної поверхні зігнутої пластинки;

- елементи серединної площини пластинки не зазнають подовження при малих прогинах пластинки під поперечним навантаженням.

Ці припущення дуже близькі за своїм змістом до гіпотези плоских перерізів, прийнятої в наш час в елементарній теорії згину брусу.

11.2. Пружні стержневі системи

До початку тридцятих років XIX століття будівельна механіка мала на своєму озброєнні розрахункові моделі стержнів, арок і пластин - базових елементів, з яких складаються реальні споруди. Всі ці розрахункові моделі усвідомлювалися порізно, в той час як у багатьох випадках вони взаємодіють, виступаючи в ролі окремих фрагментів більш складної конструкції. Якщо в XVIII столітті конструктивно-технічний розвиток будівництва сконцентрувався на кам'яних арках, то в XIX столітті інтерес інженерів змінився і став орієнтуватись на аналіз каркасних конструкцій. У зв'язку з бурхливим розвитком залізничного будівництва перехід від елементарних несучих систем до складених конструктивних схем відбувався значно швидше, ніж в монолітних конструкціях (таких як кам'яна кладка і бетон), при цьому геометричні та фізичні властивості таких структур стали логічною абстракцією розрахункової схеми у вигляді ферми.

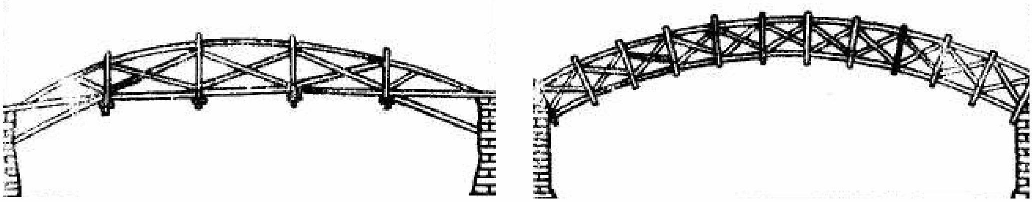


Рис. 11.3. Схеми мостів Палладіо

Рис. 11.4. Ферма Тауна

Схема балочної ферми, що складається з паралельних поясів, з'єднаних решіткою, мабуть, вперше була запропонована Палладіо ще в XVI столітті (рис. 11.3), але важливим об'єктом розрахункового аналізу ферми стали лише з появою запропонованої Тауном (Ithiel Town) в 1820 році конструкції балочної ферми з багатогратчастим заповненням (рис. 11.4).

Спочатку ферми такого роду розглядалися як балки з наскрізною стінкою. Таким чином вони були представлені в лекціях Нав'є [Navier, 1833/1878]. У розрахунку Нав'є використовує тільки поперечні перерізи верхніх і нижніх поясів, вважаючи, що це можливо зробити, якщо до поясів приєднуються разом з рядом поперечних елементів і «хрести святого Андрія», тобто діагональні елементи, які перетинаються.

Карл Кульман
(1821 - 1881)
нім. Karl Culmann

З використанням такої розрахункової схеми було побудовано мости з різними конструктивними системами, запропонованими Джеймсом Уорреном (James Warren), Стівеном Лонгом (Stephen Harriman Long), Вільямом Гау (William Howe) і іншими винахідниками [Перельмутер, 2015].

Значну кількість дерев'яних мостів в Північній Америці описав Карл Кульман, вказавши при цьому, скільки з них виявляють ознаки пошкодження, а скільки з них зазнали руйнування, незважаючи на щедре використання матеріалу [Culmann, 1851]. У цих мостах Кульман зазначив різні структурні системи і вказав, що за умови правильного проектування вони чудово виконали б свої функції.

Він створив теорію розкісних структур, засновану на наступних припущеннях:

- система заповнення стержнями між верхніми і нижніми поясами повинна бути влаштована таким чином, щоб всі стержні завжди утворювали трикутники;
- стержні повинні мати можливість обертатися без обмеження в стиках.

За допомогою умов рівноваги Кульман зміг розрахувати зусилля в елементах будь-якої статично визначуваної розкісної структури зазначеного типу.

Майже одночасно з'явилася робота Шведлера [Schwedler, 1851], в якій було зазначено (див. рис. 11.5):

> «*Якщо конструкція в цілому вважається жорсткою, то малі опори, викликані пружним згином в точках a, d, c тощо є незначними в порівнянні з опором розпірок, або, іншими словами, можна прийняти, що окремі компоненти ферми мають можливість обертатися в точках a, d, c тощо.*»

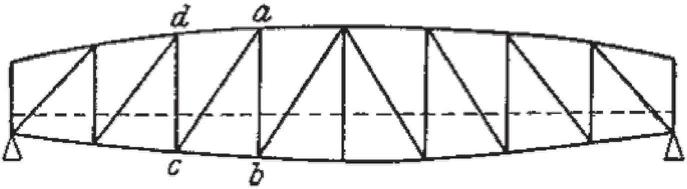


Рис. 11.5. Шарнірна модель ферми Шведлера

Таким чином, Шведлер вперше виконав процес абстракції, який є типовим для теорії споруд: від фізичної несучої конструкції (реальної наскрізної системи, наприклад, дерев'яної ферми) через абстрактну несучу систему (модель наскрізної споруди або розкісну стержневу систему за Кульманом) до розрахункової схеми (шарнірної фермі), описаної за допомогою фізико-геометричних властивостей.

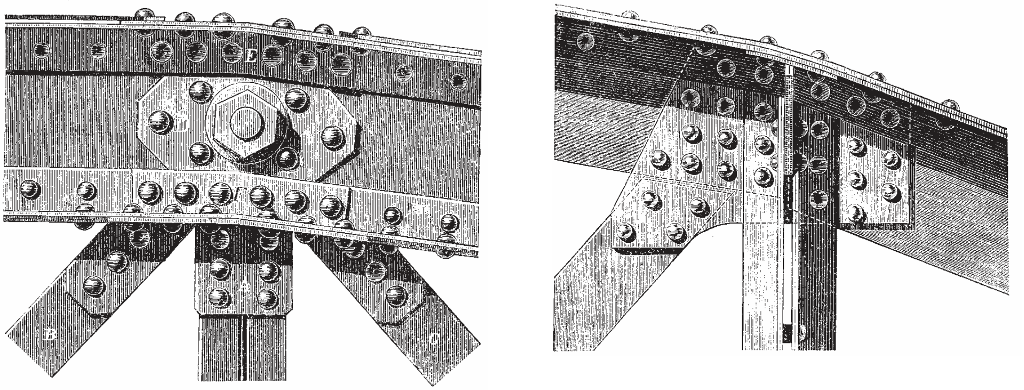
Винахід розрахункової схеми в формі шарнірної ферми став керівним поняттям для розвитку теорії споруд у другій половині XIX століття. Важливо, що для цієї схеми можна було незалежно виконати аналіз її топологічної структури. Такий аналіз став посилено розвиватися в роботах, присвячених з'ясуванню кінематичних властивостей спочатку фермених конструкцій, а потім і стержневих конструкцій будь-якого іншого виду.

Друге важливе досягнення, яке бере свій початок від розрахункової схеми ферми, було вироблення поняття вузла, в якості якого розглядався шарнір, що з'єднує стержні ферми. Потім вузловий шарнір став розглядатися як матеріальна точка, для якої складаються рівняння рівноваги, і в цій якості вузол став невід'ємною приналежністю розрахункової схеми стержневих (і не тільки стержневих) систем.

Йоганн Вільгельм Шведлер *(1823 –1894) нім. Johann Wilhelm Schwedler*

Розрахункова схема ферми була вельми наочною, а робота ферми виявилася дуже чіткою. Знайшлося чимало інженерів, які спробували реалізувати схему ферми конструктивно. Так, сам Шведлер для мосту через р. Брахе (нині р. Брда) біля Черська, побудованого в 1861 р. за його проектом, розробив шарнірні вузли (рис. 11.6,*а*). Але вже за дев'ять років інший міст через р. Брахе був побудований біля Бромберга (сьогодні Бидгощ), знову за проектом Шведлера, але на цей раз вже з використанням клепаних з'єднань (рис. 11.6,*б*).

Еміль Вінклер *(1835 — 1888) нім. Emil Winkler*



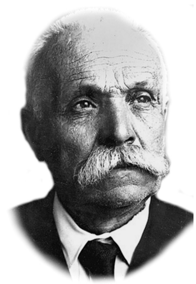
а *б*

Рис. 11.6. Вузли мостових ферм

Еміль Вінклер усвідомлював, що шарнірна модель ферми не відповідає реальній роботі металевих ферм з клепаними з’єднаннями [Winkler, 1872]. За рахунок жорсткості вузлів в стержнях ферми виникають деякі згинальні моменти і внаслідок цього додаткові напруження. Проблема їх визначення, на яку, мабуть, першим звернув увагу Мандерла [Manderla, 1880], привела до появи методу переміщень.

Розрахункові схеми рамних конструкцій, у яких більшість вузлових з'єднань є жорсткими, стали швидко поширюватися в зв'язку з будівництвом залізобетонних каркасів. А розрахункова схема ферми з ідеальними шарнірами виявилася деяким наближенням до реальності.

Оцінку ступеня відносного приросту напружень, що виникають за рахунок жорсткості вузлів, виконав Е.О. Патон [Патон, 1901], і як показали його дослідження, «фермене наближення» є тим більш точним, чим більшою є гнучкість стержневих елементів ферми. По суті, було поставлено важливе питання, яке згодом виникало і в інших ситуаціях, питання про межі застосовності тієї чи іншої розрахункової схеми, про необхідність її уточнення або кардинальної зміни при виході її параметрів за деяку межу.



Євген Оскарович Патон
(1870–1953)

Наприклад, С.П. Тимошенко запропонував модель балки, що згинається, яка відрізняється від моделі Ейлера-Бернуллі тим, що при деформації поперечні перерізи залишаються плоскими, але не перпендикулярними деформівній серединній лінії стержня, а в динаміці враховуються інерційні складові, пов'язані з поворотом поперечних перерізів [Тимошенко, 1916]. Для плит аналогічне удосконалення моделі Кірхгофа запропонував Е. Рейсснер [Reissner, 1945]. В обох випадках мова йшла про необхідність введення уточнень, коли помітну роль починають грати зсувні деформації.

Перехід від аналізу фермених моделей стержневих конструкцій до вивчення рамних систем став масовим в кінці XIX століття і особливо в першій половині XX століття. Тут далося взнаки інтенсивне застосування в будівництві монолітних залізобетонних конструкцій.

Першій чверті XX століття належить формулювання задачі про загальні правила побудови розрахункових моделей і тут треба відзначити роботу [Герсеванов, 1923] де майже вперше було чітко сформульовано що:

- розрахункова схема будується виходячи з очікуваної форми руйнування і деформування, яка ґрунтується на досвіді будівельної практики;
- в розрахунковій схемі застосовуються лише такі гіпотези відносно властивостей конструкції та діючих навантажень, які дозволяють побудувати ефективну методику розрахунків.

Микола Михайлович Герсеванов *(1879 – 1950)*
рос. Николай Михайлович Герсеванов

А сама проблема обґрунтування розрахункових моделей, крім звернення до результатів експериментальних досліджень, отримала розвиток в наступному напрямку. Були запропоновані шляхи перетворення розрахункової моделі більш загального вигляду, наприклад моделі тривимірного континууму задачі теорії пружності, до тієї чи іншої моделі конструктивного елементу певного типу. Особливо часто такий підхід використовувався для побудови теорії пластин і оболонок.

Перша спроба виведення рівнянь теорія оболонок з рівнянь теорії пружності була зроблена Г. Ароном [Aron, 1874]. Далі цей напрямок розвивався в роботах А. Лява [Love, 1888], А. Бессета [Basset, 1892], Х. Лемба [Lamb, 1890], А.І. Лур'є [Лур'є, 1947] та ін.

Після виведення розв’язувальних рівнянь теорії оболонок і розробки відповідних розрахункових схем стали розвиватися різного роду некласичні варіанти теорії. Тут в першу чергу слід згадати теорії оболонок типу Тимошенка-Рейсснера, що враховують деформації поперечного зсуву. Крім того, до некласичних можна віднести теорії ребристих і багатошарових оболонок.

Перші роботи в цій галузі для пластин, підкріплених ребрами, виконані І.Г. Бубновим [Бубнов, 1904]. Теорія ребристих оболонок загального вигляду представлена в роботах А.І. Лур'є [Лур'є, 1947] і В.З. Власова [Власов, 1949]. А.І. Лур'є розглядав ребра як стержні Кірхгофа-Клебша, а В.З. Власов - як тонкостінні стержні.

Багатошарові оболонки досліджувалися з різних точок зору в багатьох роботах в основному в двох основних напрямках. До першого належать теорії, засновані на розрахункових схемах, де кінематичні гіпотези приймалися для всього пакета шарів. Вже на початковому етапі дослідження показали неприйнятність цього підходу, якщо властивості шарів суттєво різняться, тому в останні роки суттєвий розвиток отримали роботи другого напрямку, в яких використовувалася ускладнена розрахункова схема, де кінематичні гіпотези приймаються для кожного шару окремо.

11.3. Пружна основа

При створенні розрахункової схеми об'єкт дослідження виділяється з навколишнього середовища, взаємодія з яким реалізується у вигляді навантажень і впливів, а також умов закріплення. Природно, що границя між об'єктом розрахунку і зовнішнім оточенням прокладається умовно, і її вибір помітно позначається на побудові розрахункової схеми.

Традиційно з давніх часів до складу розрахункової схеми вводиться нерухомий недеформівний елемент, який умовно називають «землею», з яким зазвичай пов’язують систему відліку і для якого не потрібно виконання умов рівноваги. І дуже багато років всі умови обпирання формулювалися як жорстка «прив'язка до землі». Ця традиція вперше була порушена Емілем Вінклером, який в своїх лекціях з пружності і міцності розглянув задачу про балку на пружній основі [Winkler, 1867]. Ця задача виникла в зв'язку з аналізом роботи залізничного рейкового шляху, і Вінклер виходив з того, що кожна шпала осідає під навантаженням на величину, яка визначається жорсткістю основи *C*, незалежно від поведінки сусідньої ненавантаженої шпали. Механічна модель такого типу представлена на рис. 11.7.

Однак більшості реальних ґрунтів властива розподільна здатність, коли, на відміну від вінклерової розрахункової схеми, до роботи залучаються не тільки безпосередньо навантажені частини основи, але і прилеглі до них області ненавантаженого ґрунту. В якості альтернативи була запропонована модель у вигляді пружного півпростору [Wieghart, 1922], яка представляє основу як ізотропне пружне тіло нескінченних розмірів в плані і по глибині, і низку інших моделей з двома коефіцієнтами постелі, які усувають головну ваду моделі Вінклера (дозволяють враховувати розподільну здатність ґрунту). Такою ж розподільною властивістю володіють двопараметрові розрахункові моделі, які майже не ускладнюють математичну постановку задачі в порівнянні з моделлю Вінклера.

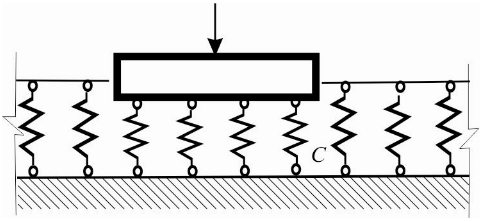


Рис. 11.7. Розрахункова схема Вінклера

Згідно із М.М. Філоненко-Бородичем (рис. 11.8), двопараметрова модель пружної основи являє собою необмежену в обидві сторони нерозтяжну нитку, яка натягнута силою C_2 і з'єднує верхні кінці безперервно розташованих пружин з розподіленою жорсткістю C_1 [Филоненко-Бородич, 1945].

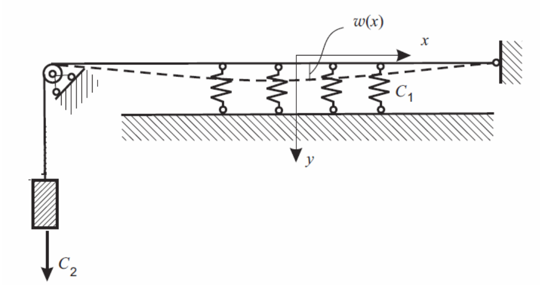


Рис. 11.8. Розрахункова модель М.М. Філоненко-Бородича

Дискретна двопараметрова модель П.Л. Пастернака показана на рис. 11.9. В цій моделі z-подібні абсолютно жорсткі елементи з'єднані з землею сукупністю пружин, які є дискретним аналогом коефіцієнта C_1 (який характеризує жорсткість основи при стиску), тоді як пружини, розташовані між сусідніми z-подібними елементами, служать дискретним аналогом коефіцієнта C_2, який характеризує жорсткість основи при зсуві) [Пастернак, 1954].

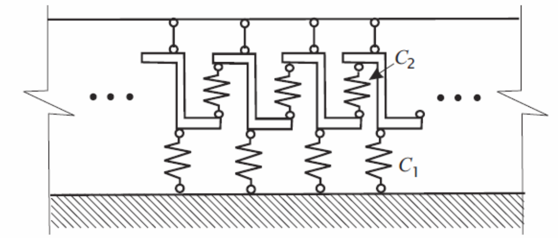


Рис. 11.9. Розрахункова модель П.Л. Пастернака

В наш час, коли практичним стандартом став метод розрахунку об'єкта за схемою «споруда+основа», кількість використовуваних розрахункових моделей основи зросла до дуже великих величин. Та умовна границя, яка виділяє досліджуваний об'єкт з навколишнього середовища, помітно розширилася. Досить типовий приклад показаний на рис. 11.10, де кількість ступенів свободи наземної частини будівлі становить 96720, а при розгляді спільної роботи будівлі з основою вона стає рівною 305837.

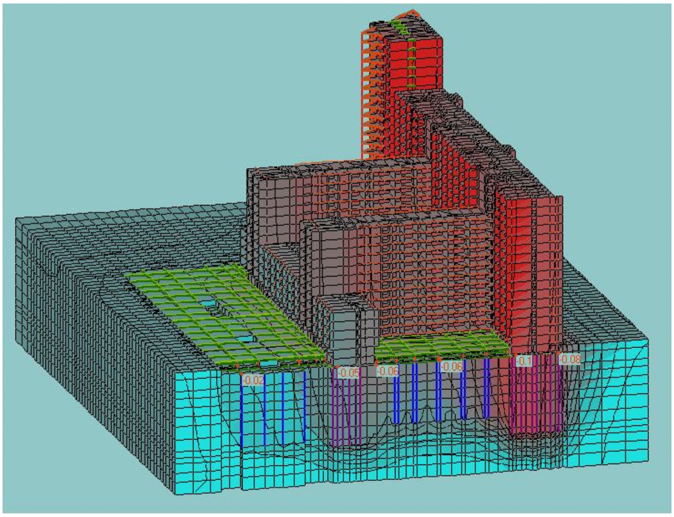


Рис. 11.10. Розрахункова модель споруди з основою

Введення в практику розрахунків моделі пружної основи порушило традицію використання чорно-білої логіки при аналізі в'язей, що накладаються на систему, (є в'язь - немає в'язі). Ця обставина наштовхнула на думку про відмову від ідеалізації властивостей вузлових сполучень і використання в розрахункових схемах моделі піддатливих вузлів. В наш час такий підхід навіть регламентується деякими нормативними документами. Наприклад, Єврокод-3 оперує такими поняттями, як жорсткий вузол, напівжорсткий вузол і піддатливий вузол.

Крім того, урахування пружної основи порушило ще один давно усталений принцип, згідно з яким конкретний елемент моделі відповідає конкретному елементу фізичної системи. Можна говорити що вся модель фізична, коли всі її елементи мають конкретні фізичні прототипи. Але в даному випадку існує елемент моделі, який не має фізичного прототипу – напівнескінченні частини основи моделюються скінченними за розмірами механічними елементами (пружинами, закріпленими у вузлах, які не мають аналогу в фізичній системі). Можна говорити, що в такому випадку моделюється функція, а не геометричний образ.

11.4. Структурний аналіз

Детальний аналіз ряду окремих задач і простих об'єктів призвів до того, що було вироблено такі поняття як матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, пружний стержень, пластина тощо. Для них були вивчені ті властивості, які використовуються, коли з таких деталей, як з деякого «конструктора», збирається складніша модель задачі, що цікавить нас. І природним чином виникла проблема аналізу складеної розрахункової схеми такого роду. Більшість досліджень була присвячена розрахунковим схемам ферм, вони приваблювали своєю «однорідністю» і чітким поділом топологічних (структура, закріплення) і метричних (координати вузлів, розміри перерізів) даних.

Рудольф Фрідріх Альфред Клебш
(1833 - 1872)
нім. Rudolf Friedrich Alfred Clebsch

А́вгуст Фердіна́нд Мебіус
(1790 — 1868)
нім. August Ferdinand Möbius

Якщо говорити про повну систему визначальних рівнянь, то в роботі в 1862 р. Альфред Клебш показав, що для довільної ферми сукупність рівнянь рівноваги і сумісності деформацій має розв’язок [Clebsch, 1883]. Але в першу чергу проблема можливості розв'язання розглядалася з точки зору тих рівнянь рівноваги, до яких приводила складена розрахункова схема - до аналізу її статичної визначуваності і незмінюваності.

Ще в 1837 році А.Ф. Мебіус довів теорему про те, що у фермі, яка має *n* шарнірів, для отримання жорсткої незмінюваної конструкції необхідно, щоб було не менше $2n–3$ стержнів в плоскій системі і не менше $3n–6$ стержнів в разі просторової системи [Möbius 1837]. При цьому він, мабуть, вперше вказав на можливість існування виняткових конфігурацій, коли має місце нескінченно мала рухливість без деформації стержнів (випадок миттєвої змінюваності за сучасною термінологією).

Досліджуючи ці випадки, Мебіус знайшов, що детермінант системи рівнянь рівноваги при цьому обертається на нуль. Зв'язок ознаки змінюваності з виродженням системи розв’язувальних рівнянь став згодом основою машинного аналізу кінематичних властивостей розрахункової схеми будь-якого (не тільки ферменого) типу. Результати А.Ф. Мебіуса, що залишилися тоді невідомими, пізніше були заново відкриті П.Л. Чебишовим [Чебишев, 1870] і Отто Мором [Mohr, 1874] і лише тоді увійшли в розрахункову практику.

Характерне для кінця XIX і першої половини XX століття масове захоплення методом сил привело до появи різних прийомів побудови основної системи цього методу і до задачі виявлення зайвих в'язей у статично невизначуваних розрахункових схемах. Для стержневих систем були детально вивчені зв'язки між властивостями статичної визначуваності, незмінюваності і здатністю реалізовувати попереднє напруження. Були вказані способи визначення статико-кінематичних властивостей, засновані на зведенні системи до деякого числа жорстких дисків, об'єднаних стержнями-в'язями. При цьому вводилися поняття про прості і кратні шарніри і інші ідеалізовані елементи розрахункової схеми.

Помітні зміни в уявленнях про розрахункову схему пов'язані з переходом до розрахунку за методом переміщень. У методі переміщень елементи системи вважаються приєднаними тільки до вузлів розрахункової схеми, один з одним безпосередньо вони не з'єднуються. Зазначена особливість побудови розрахункової схеми часто нехтувалася інженерами, вихованими на поняттях розрахункової схеми в стилі методу сил, вона не завжди видна і при використанні традиційних для методу сил способів зображення розрахункової схеми.

Так, розрахункова схема, показана на рис. 11.11, *a* в традиційній формі, властивій методу сил, може навести на думку про безпосереднє з'єднання елементів одного з іншим, в той час як більш детальне зображення на рис. 11.11, *b* дозволяє уникнути такого висновку. Зауважимо також, що в детальному зображенні видно і інші особливості реалізації розрахункової схеми, зокрема, можливість виконання однакових кінематичних умов з використанням різних наборів в'язей, що накладаються на вузли, і умов приєднання елементів до вузлів.

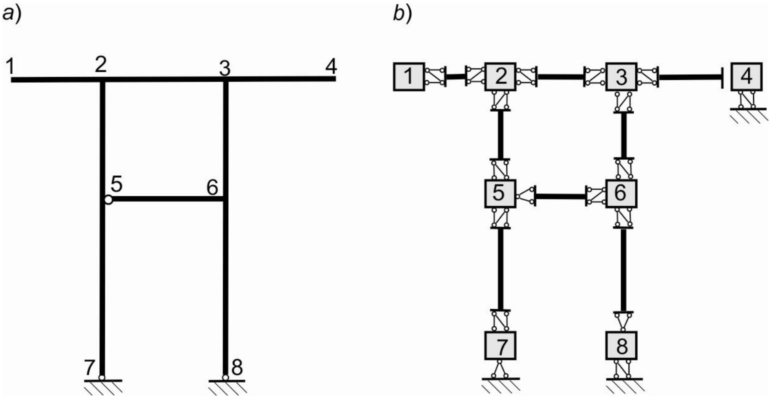


Рис. 11.11. Зображення розрахункової схеми: *a* – традиційне; *b* – детальне.

Неврахування зазначеної відмінності не завжди є безпечним. Наприклад, з точки зору кінематичних властивостей задачі два варіанти розрахункової моделі, представлені на рис. 11.12, рівноправні (балка, затиснена на лівому кінці і шарнірно оперта на правому).

Але з точки зору завдання зусиль ці варіанти розрізняються — у схемі на рис. 11.12,*b* момент передається на стержень, і вузол 2 в цій схемі буде мати поворот, а у схемі на рис. 11.12,*a* момент не передається, і вузол 2 цієї схеми буде мати нульовий кут повороту. Щоб і в схемі на рис. 11.12,*a* також виникав згинальний момент в стержні, його слід вважати не вузловим, а прикладеним до стержня в перерізі біля вузла.

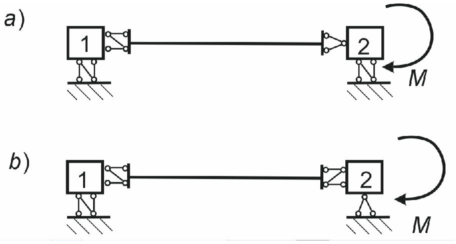


Рис. 11.12. Два варіанти представлення однієї розрахункової схеми

Згаданий вище поділ топологічних і метричних властивостей розрахункової схеми дав поштовх роботам, пов'язаним з використанням теорії графів для аналізу властивостей стержневих систем. Таким був підхід вже в піонерних публікаціях [Fenves & Branin, 1963], [Перельмутер, 1965], а в роботі Ді Маттіо [Di Mattio, 1963] ступінь статичної невизначуваності вивчається виключно як топологічна властивість розрахункової схеми. Пізніше з'явилися роботи, в яких топологічна зв'язність розрахункової схеми зіставлялася зі структурою розташування ненульових елементів матриці жорсткості системи, що розраховується, і можливістю оптимальної нумерації невідомих [Akyjz & Utku, 1968], [Клемперт, 1973]. Були запропоновані деякі штучні прийоми, спрямовані на поліпшення зазначеної структури навіть за рахунок збільшення порядку матриці жорсткості [Перельмутер, Слівкер, 1976].

Річард Бакмінстер Фуллер *(1895 —1983)* *англ.Richard Buckminster Fuller*

Практичний інтерес до розрахунку висячих і вантових систем, характерний для робіт другої половини XX століття, призвів до детального вивчення топологічних і метричних властивостей вироджених (миттєво змінюваних і миттєво жорстких) систем. Тут з'явився ряд фундаментальних робіт [Кузнецов. 1960], багато досліджень були ініційовані введенням Бакмінстером Фуллером систем типу «тенсегриті» [Fuller, 1961]. Цим терміном він позначив каркасні структури, в яких задіяні безперервні ланцюги елементів, що працюють на розтяг, і вставні деталі, що працюють на стиск (рис. 11.13).

Дослідження властивостей миттєво-жорстких систем і систем типу «тенсегриті» зажадало повернутися до загальних принципів аналізу статико-кінематичних властивостей складних структурних схем [Шулькин, 1977], [Calladine, 1978], [Connelly, 1980]. При цьому розглядалися і системи з односторонніми в'язями, для яких були встановлені можливі поєднання статичних і кінематичних властивостей [Перельмутер, 1968].

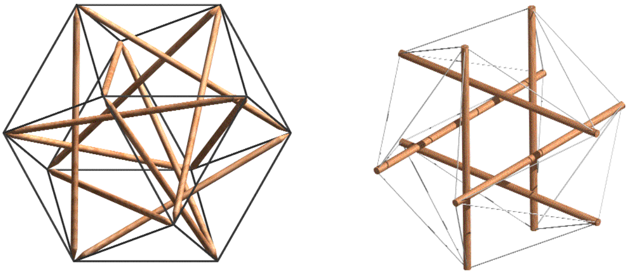


Рис. 11.13. Приклади структур тенсегриті

11.5. Розрахункові схеми методу скінченних елементів

Поява і розвиток МСЕ істотно позначилося на проблемі вибору і обґрунтування розрахункової схеми. Навіть опис геометричного образу конструкції став предметом вибору розраховувача, як, наприклад, в задачах, де криволінійна поверхня оболонки моделюється багатогранним набором плоских скінченних елементів. Втім, така проблема виникала і раніше, при використанні наближеного опису кривих стержнів деяким багатокутником.

Можливість подання розрахункової моделі як сукупності скінченних елементів, кількість і конфігурація яких не обмежена нічим, крім наявної в розпорядженні розраховувача бібліотеки скінченних елементів, абсолютно по новому поставила питання про кількість основних невідомих, ступінь кінематичної і статичної невизначуваності та інші, раніше непорушні характеристики розрахункової схеми споруди. Кількість невідомих переміщень (ступінь кінематичної невизначуваності) перестала бути характеристикою задачі і стала предметом свавілля розраховувача.

Для багатьох типів конструктивних систем були вироблені деякі «стандартні» підходи до складання скінченноелементих розрахункових схем. Так, наприклад, на перших етапах використання МСЕ набула популярності розрахункова модель тонкостінних фюзеляжних конструкцій і крил літальних апаратів, яка набиралася із зсувних панелей і підтримуючого їх по краях каркаса зі стержнів, здатних сприймати тільки поздовжні сили.

У такій моделі крила (рис. 11.14) стержні імітують роботу під навантаженням поздовжніх елементів конструкції крила, які піддаються при згині крила стиску і розтягу. Пластини імітують роботу стінок, що перешкоджають зсуву, а також верхню і нижню обшивку крила.

Цю модель широко пропагував Дж. Аргіріс [Argyris & Kelsey, 1954], і хоча вона виникла ще до появи МСЕ [Ebner & Köller, 1937], [Уманський, 1950], її реалізація виявилася прийнятною лише в рамках МСЕ, хоча тут вона проіснувала лише кілька років. Можливості, що надавались обчислювальними комплексами, які швидко вдосконалювалися, вже до 70-х років XX століття дозволили значно уточнити зазначену розрахункову модель і врахувати згинні деформації підкріплюючого каркасу.

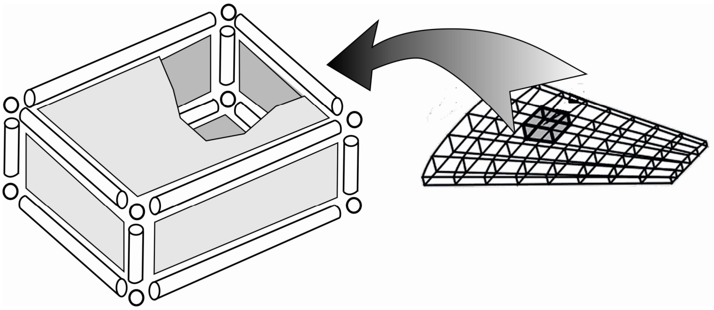


Рис. 11.14. Модель тонкостінної системи

З'явилися нові підходи до побудови розрахункової схеми для пластин та оболонок з ребрами. Тут виникли конкуруючі пропозиції, а з ними і проблема їх верифікації. На рис 11.15 представлений відповідний приклад, де наведений варіант розрахункової схеми, складеної з просторових елементів (рис. 11.15, *б*), і варіант моделювання пластинчастими і стержневими елементами, зв'язок між якими реалізується через нескінченно жорсткі вставки (рис. 11.15, *в*).

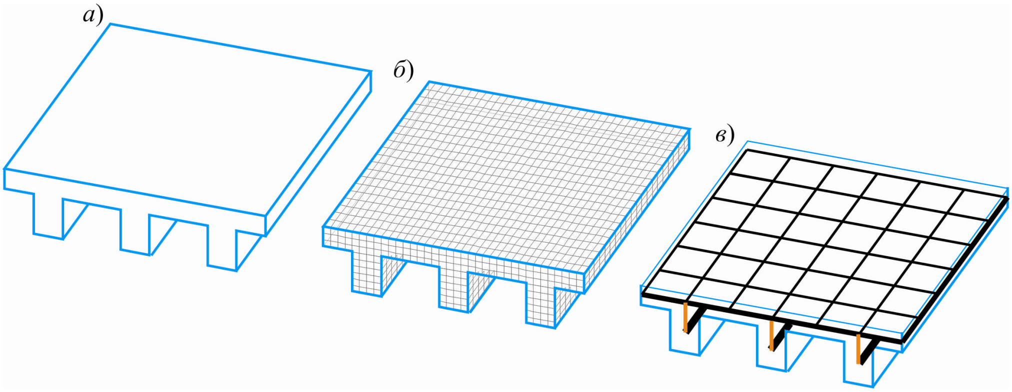


Рис. 11.15. Можливі варіанти моделювання ребристої пластини

Для промислових і цивільних будівель, де, наприклад, використовуються наскрізні колони, в розрахункових схемах найчастіше відмовляються від подання такої колони у вигляді деякого приведеного за жорсткістю суцільного стержня, а використовують більш деталізований опис конструкції. І, найголовніше, практично відмовилися від плоских розрахункових схем, розв’язуючи всі задачі за допомогою просторових моделей. Основним напрямком розвитку стало застосування все більш громіздких розрахункових схем, число невідомих порядку сотень тисяч стало звичайним в практиці розрахунків, при цьому настільки докладна деталізація не завжди викликана необхідністю, а пов'язана з формальною побудовою розрахункової схеми за інформацією графічної програми, за допомогою якої готуються креслення.

Можливість моделювання конструкцій довільної природи, в тому числі і таких, де окремі частини представляються стержнями, інші - пластинами або оболонками, а треті - тривимірними тілами, поставило питання, пов'язані із сполученням скінченних елементів різного типу і виникаючими тут проблемами, спричиненими відмінністю вузлових ступенів свободи у елементів різного типу. Була зазначена [Перельмутер, Сливкер, 2001] необхідність використання спеціальних прийомів, наприклад, таких як заведення стержневого елемента в тіло плоского диска (рис. 11.16).

Метод скінченних елементів реалізується в програмних комплексах, можливості яких безперервно ростуть. Цей факт часто служить підставою для безроздільного збільшення розрахункових схем, яке здійснюється під гаслом уточнення. Надлишкова деталізація системи часто є реакцією розраховувача на потребу в уточнених даних по екстремальним результатами за відсутності попередньої інформації про місце появи такого результату. Тоді на всяк випадок застосовується деталізована розрахункова схема, яка можливо дозволить не пропустити необхідний результат.

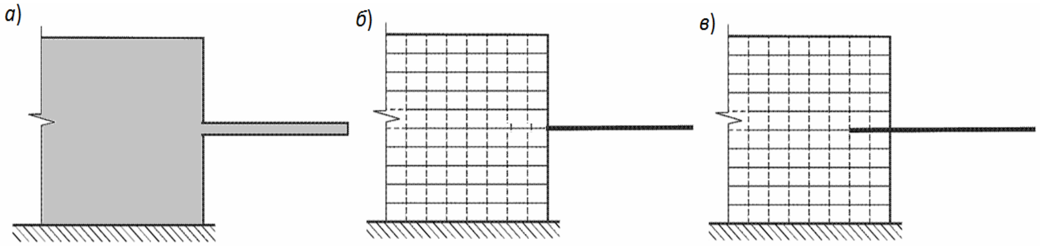


Рис. 11.16. Моделювання спряження стержня і диска: *а* – задача; *б* – варіант, який не забезпечує затиснення; *в* – рекомендоване рішення

Але потрібно враховувати, що вказаний результат може бути все одно упущений через труднощі аналізу і осмислення надлишкової інформації. І часто це, так зване уточнення, призводить до затінення основних особливостей роботи конструкції, і для їх аналізу паралельно з детальною розрахунковою схемою розглядається і її спрощений варіант. При цьому в деяких випадках виникає нетривіальна проблема зіставлення результатів, особливо складна в тих випадках, коли немає точної відповідності між елементами порівнюваних розрахункових схем [Перельмутер, Сливкер, 2001].

Насамкінець зазначимо, що аналіз розрахункових схем методу скінченних елементів тісно пов'язаний з проблемою збіжності методу. Математичні докази відповідних фактів (наприклад, вимога сумісності полів переміщень) потребують їх інтерпретації в термінах розрахункових моделей, що послідовно «згущуються». Зокрема у випадку несумісних елементів потрібно пам'ятати, що розв’язок задачі розрахунку еквівалентний мінімізації повної потенційної енергії системи (функціоналу Лагранжа), а апроксимація поля переміщень деяким скінченним набором заздалегідь заданих функцій звужує можливість довільного деформування, тобто може трактуватися як накладення деяких в'язей. Якщо елементи несумісні, то на їх границях можливі деякі переміщення, не існуючі в континуальній розрахунковій моделі (наприклад, взаємні кути повороту пластин), які відповідають відсутності деяких в'язей.

При збільшенні числа скінченних елементів і зменшенні їх розмірів зростає загальне число ступенів свободи конструкції і, отже, зменшується вплив накладених вузлових в'язей. Цей процес при виконанні певних умов і забезпечує збіжність методу для сумісних скінченних елементів. З іншого боку, цей же процес веде до того, що зменшуються взаємні переміщення на міжелементних границях в несумісних елементах, що можна трактувати як певне замикання раніше знятих в’язей. Отже, збіжність несумісних елементів може мати місце лише в тих випадках, коли позитивні тенденції від подолання накладених в'язей превалюють над цією негативною тенденцією накладення в'язей на міжелементних границях.

Одночасно з апроксимацією поля переміщень іноді здійснюються і інші наближення, пов'язані з необхідністю застосування скінченноелементної моделі, а саме, заміна геометричної форми конструкції близькою до неї. При апроксимації геометрії системи, крім зміни форми, можуть зазнати змін і крайові умови, оскільки вони тепер належать до границь з іншим обрисом. Тут можна зіткнутися з підводними каменями, пов'язаними з тим, що граничний перехід форми контуру не обов'язково супроводжується граничним переходом кінематичних властивостей. Про це свідчить відомий парадокс Сапонджяна для вільно опертої багатокутної пластинки [Пановко, 1985].

На перших порах застосування МСЕ обговорювалася так звана проблема «малої довжини» стержневого скінченного елемента, коли акцентувалася увага на тому, що в курсах опору матеріалів або будівельної механіки стержень визначався як об'єкт, один з розмірів якого (довжина) помітно перевищував інші, які визначали габарити поперечного перерізу. Але у використовуваній розрахунковій моделі стержень, як елемент розрахункової схеми, може виявитися дуже коротким. Здавалося б, що виникає явне порушення угод про те, що таке стержень. Насправді, ніякого порушення тут немає, оскільки припущення про достатню довжину стержня було необхідно лише для обґрунтування виду відповідного диференціального рівняння; а що стосується методу його розв’язання, коли використовується досить дрібне членування стержня (читай, інтервалу інтегрування) на ділянки, то це на вигляді рівняння ніяк не позначається.

11.6. Деякі нові тенденції

В останні десятиліття з'явилася і стала інтенсивно розвиватися галузь будівельної механіки, заснована на імовірнісному аналізі. При цьому зазнали суттєвої зміни підходи до самої процедури розрахунку і до побудови відповідної розрахункової моделі.

У детермінованому варіанті передбачається повна ідентичність параметрів всіх однакових елементів споруди. Вважається, наприклад, що всі поперечники просторового каркасу мають однакові прольоти, всі колони цих поперечників - однакові перерізи тощо. При цьому всі елементи такого типу зводяться до одного представника, а іноді і до одного його перерізу. Такий підхід є прийнятним при закладеному в норми проектування підході до розрахунку, заснованому на напівімовірнісному методі граничних станів. Тоді всі ймовірнісні характеристики формулюються і оцінюються поза розрахунковою схемою, а в розрахунок вводяться лише деякі гарантовані найгірші статистичні оцінки середніх, стандартів, квантилів тощо, які дійсно однакові для всіх ідентичних елементів, оскільки одним з визначень їх «ідентичності» як раз і є однаковість закону розподілу.

Перехід до істинно імовірнісного розрахунку пов'язаний з тим, що доводиться оперувати ні з параметрами розподілів випадкових величин, а з самими розподілами, коли випадкові параметри починають працювати не поза, а всередині розрахункової схеми. І в такій схемі кожна з «ідентичних» підконструкцій повинна бути визначена у вигляді набору взаємно незалежних (або кореляційно пов'язаних) випадкових величин (можливо, функцій) з однаковими законами розподілу [Болотин, 1971]. У такій постановці вже не можна уявити собі розрахункову схему, наприклад, плоскої задачі, яка передбачає тотожність (або жорстку корельованість з коефіцієнтом кореляції, що дорівнює одиниці) всіх паралельно розташованих плоских підсистем.

Тут слід відзначити таку характерну особливість - дедалі більша деталізація схем з переходом до аналізу багатоелементних конструкцій (наприклад, будівлі в цілому) вимагає залучення дуже великого числа параметрів, за допомогою яких така схема описується. Якщо ці параметри є випадковими величинами, імовірнісні властивості яких мають статистичне обґрунтування, то при збільшенні числа таких параметрів зростає ступінь невизначеності розрахункової моделі в цілому. Так, якщо деякий результат розрахунку лінійно залежить від N незалежних випадкових параметрів (наприклад, зовнішніх навантажень у вузлах системи), то стандарт цього результату пропорційний стандарту вхідних даних (в цьому випадку навантажень) з множником порядку $(N)^{1/2}$. Неважко оцінити, яка вірогідність результатів розрахунку при дуже великих значеннях N.

Є більш детальні пропозиції щодо визначення впливу точності вихідних даних на результати розрахунку (див., наприклад, [Подольский, 1984]). Вони свідчать про те, що за відсутності досить детальної інформації про вхідні параметри більш доцільно застосовувати прості розрахункові моделі. Така особливість розрахункового моделювання пов'язана з тим, що втрата інформації через неповноту вихідних даних може значно перевищити накопичення інформації за рахунок уточнення розрахункової схеми.

Зазначене вище ні в якій мірі не слід розглядати як панегірик «старим добрим часам», коли все вирішувалося з використанням формули $qL^2/8$ і підрахунком на логарифмічній лінійці. Просто на зміну бездумному ускладненню розрахункових схем повинна прийти нова культура їх використання, що включає в себе і оцінку можливої невизначеності розв’язку. Зараз же ми, маючи сучасні можливості розрахунку складних і надскладних систем, досліджуємо їх в постановці задачі, яка в більшій мірі відповідає XIX століттю, ніж початку XXI.

Насамкінець слід зауважити, що зазначена вище проблема впливу вихідних даних на вигляд розрахункової схеми властива не тільки задачам імовірнісного характеру. Вибір і обґрунтування розрахункової схеми не може бути відділений від рівня поінформованості щодо конструкції, яка розраховується, так само як і від методу розв’язання тієї математичної задачі, до якої призводить обрана розрахункова схема.

Більш того, багато математичних операцій, які використовують при розв’язанні задачі, часто мають механічну інтерпретацію, використання якої допомагає зрозуміти особливості обчислювального процесу. Як приклад можна послатися на інтерпретацію алгоритму Гаусса для розв’язання канонічної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, як на послідовність накладення (метод сил) або зняття (метод переміщень) в'язей [Гантмахер, 1967]. Ілюстрація такого роду сприяє кращому розумінню проблеми.

Література

Бернштейн С.А. Очерк истории расчета свода // Исследования по теории сооружений — М.-Л.: ОНТИ, 1936 — С. 228-245.

Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений — М. Стройиздат, 1971 — 256 с.

Бубнов И.Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды — СПб.: Изд-во Политехнического института, 1904 — 93 с.

Власов В.З. Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней // Известия АН СССР. ОТН, №6, 1949. [Переиздание: Власов В.З. Избранные труды, Том 1 — М.: Изд-во АН СССР, 1962 — С. 440-458].

Гантмахер Ф.Р. Теория матриц — М.: Наука, 1967 —576 с.

Герсеванов Н.М. Применение математической логики к расчету конструкций — М.: ОНТИ, 1923.

Гольденблат И.И., Бажанов В.Л. Физические и расчетные модели сооружений // Строительная механика и расчет сооружений, 1970, №2.— С. 23-27.

Клемперт Ю.З. О нумерации вершин графа системы линейных алгебраических уравнений // Вопросы оптимального использования ЭЦВМ в расчетах строительных конструкций Казань: Изд-во Казанского университета, 1973.

Кузнецов Э.Н. Введение в теорию висячих систем М.: Стойиздат, 1960 — 144 с.

Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек – М.: Гостехиздат, 1947. – 252 с.

Мастаченко В.Н. Об оценке адекватности расчетных и реальных моделей строительных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений, 1971, №4.— С. 3-7.

Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей — М.: Физматлит, 1994 — 192 с.

Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы.— М.: Наука, 1985.— 288 с.

Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели.— М. Л.: Госстройиздат, 1954.— 56 с.

Патон Е.О. Расчет сквозных ферм с жесткими узлами. - М. 1901. – 159 с.

Перельмутер А.В. О применении теории графов к некоторым задачам строительной механики // Строительная механика и расчет сооружений, 1965, № 3. — С. 13–16.

Перельмутер А.В. Статические и кинематические свойства систем с односторонними связями // Строительная механика и расчет сооружений, 1968, № 2.— С. 18–20.

Перельмутер А.В. Очерки по истории металлических конструкций —М.: Издательство СКАД СОФТ, Издательский дом АСВ, 2015.— 256 с.

Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Особенности алгоритмизации метода перемещений при учете дополнительных связей // Метод конечных элементов и строительная механика. Труды ЛПИ, № 349. — Л., 1976. — С. 28–36.

Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. — К.: ВВП «Компас», 2001. — 446 с

Подольский Д.М. Расчет конструктивных систем с неопределенными жесткостными характеристиками // Надежность и долговечность машин и сооружений, 1984, Вып. 6.— С. 78-86.

Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Часть 2. Стойки и плиты — СПб.: Типография А.Э. Коллинс, 1916 — 416 с.

Уманский А.А. К теории образования пространственных систем // Расчет пространственных конструкций. Вып. 1 — М.: Машстройиздат, 1950 — С. 51-72.

Филоненко-Бородич М.М. Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку // Труды МЭМИИТ, 1945.— Вып.53.

Чебышев П.Л. О параллелограммах // Труды съезда естествоиспытателей. Отдел технологии и практической механики — СПб.: 1870 — С.9-30.

Шулькин Ю.Б. Кинематический анализ стержневых конструкций // Расчет пространственных конструкций. Вып.XVII М.: Стройиздат, 1977 — С.4-31.

Akyjz F.A., Utku S. An Automatic Node-Relabeling Scheme for Bandwidth Minimization of Stiffness Matricesv // AIAA Journal, 1968, Vol. 6, No. 4 — P. 728-730.

Argyris J.H., Kelsey S. The analysis of fuselages of arbitrary cross-section and taper // Aircraft Engineering, 1954, N 33 — P. 71-83.

Aron H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dunnen, beliebig gekrummten elastischen Shale // J. Reine und Angew. Match., 1874. Vol. 78. — P. 136–173.

Basset A.B. On the exemption and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells // Phil Trans. Roy. Soc. London, 1891. Ser. A 181. — P. 430–480.

Bernoulli J. Essai theoretique sur les vibrations des plaques elastiques rectangulaires et libres // Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1789, T. V.

Calladine C. R. Buckminster Fuller's "tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames // International Journal of Solids Structures, 1978, Vol.14 — P.161–172.

Chladni E.F.F. Die Akustik. — Leipzig: 1802.

Clebsch A. Theorie der Elastizität fester Körper, 1883.

Connelly R. The rigidity of certain cabled networks and the second order rigidity of arbitrarily triangulated convex surfaces. Adv. in Math., 1980, Vol.37 — P. 272–299.

Culmann K. Der Bau der hölzernen Brücken in den Vereinigten Staaten von Nordamerika // Allgemeine Bauzeitung, 1851, vol. 16 — P. 69–129.

Di Mattio F.I. Statically Indeterminacy and Stability of Structures // Journal of Structural Division/ ASCE. 1963, ST3 — P. 63-76.

Ebner H., Koller H. Zur Berechnung des Kraftverlaufs in versteiften Zylinderschalen // Luftfahrtforschung, 1937, Vol. 14 — P. 607–626.

Fenves S.J., Branin F.H. Network topological formulation of structural analysis. // Journal of Structural Division. ASCE. 1963, Vol. 89, No. ST4 — P. 483–514.

Fuller R. Buckminster. Tensegrity // Portfolio and Art News Annual, 1961, No. 4 — P. 112-127.

Germain S. Recherches sur la theorie des suifaces elastiques. — Paris: 1821. — 96 p.

Kirchhoff G. R. Üeber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1850, Bd 40. — S. 51- 88.

Lamb H. On the deformation of an elastic shell // Proc. London Math. Soc. 1891. Vol. 21. — P. 119.

Leibniz G. W. Demonstrationes novae de Resistentis solidorum // Acte Eruditorum Lipsiae, 1684. — P. 319-325.

Love A.E.H. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1888. Ser. A 179. — P. 491–546.

Manderla H. Die Berechnung der Sekundarspannungen, welche im einfachen Fachwerk in Folge starrer Knotenverbindungen auftreten // Allgemeine Bauzeitung, 1880, vol. 45 — P. 27–43.

Mariotte E. Traite du mouvement des eaux et des autres corps fluides. — Paris: 1686.

Möbius A.F. Lehrbuch der Statik, Bahd 2 1837.

Mohr O. Beitrag zur Theorie des Fachwerke // Zeitschrift der Architektur und Ingenieurin. — Vereines zu Hannover, 1874.

Navier C.L.M.H. Resume des lecons donnees a l'ecole des ponts et chaussees sur l'appliquation de la mecanique a l'etablissement des constructions et des machines. Premiere Partie. — Paris: 1826. — 288 p.

Navier C.L.M.H. Resume des Lecons donnees a l'Ecole des Ponts et Chaussees sur l'Application de la Mecanique a l'Etablissement des Constructions et des Machines. 2nd ed., vol. 1: Lecons sur la resistance des materiaux et sur l'etablissement des constructions en terre, en maconnerie et en charpente, revues et corrigees. vol. 2: Lecons sur le mouvement et la resistance des fluides, la conduite et la distribution des eaux. vol. 3: Lecons sur l'etablissement des machines. — Paris: Carilian-Goeury, 1833/1838.

Parent A. De la veritable mecanique de resistance des solides, et reflections sur la systeme de M. Bernoulli de Bale Essais et recherches des mathematiques et des physiques, 1713. — V. 3. — P. 187-201.

Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics, 1945, Vol. 12, — P. A68-A77.

Schwedler J.W. Theorie der Bruckenbalkensysteme // Zeitschrift fur Bauwesen, 1851, vol. 1, col. 114–123, 162–173 & 265–278.

Varignon P. Nouvelle mècanique ou statique Paris, 1725.

Wieghart K. Über die Balken auf nachgiebiger Unterlage // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1922, Bd. 2, Heft 3.

Winkler E. Die Lerne von der Elastizität und Festigkeit — Prag: 1867.

Winkler E. Die Gitterträger und Lager gerader Träger eiserner Brücken — Vienna: Carl Gerold's Sohn, 1872.

ЗМІСТ

Нарис 9. ЕТАПИ РОЗВИТКУ ЗАДАЧ СИНТЕЗУ В ТЕОРІЇ СПОРУД …………………………………………….. 345

Нарис 10. СТАТИКА І СТІЙКІСТЬ ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ……………………………………………………... 379

Нарис 11. СТАНОВЛЕННЯ І РОЗВИТОК ПОНЯТТЯ РОЗРАХУНКОВОЇ СХЕМИ СПОРУДИ …….....…………….…….. 399