# 11　等差数列・等比数列

## 11.1　数列とは

数列は，数を順番に並べたものである．例えば，

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \tag{11.1}$$

や

$$3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ 2,\ 6,\ 5,\ 3,\ 5,\ \cdots \tag{11.2}$$

は数列である．数列のなかで，(11.1) のように，数列の要素が有限個であるものを**有限数列**，(11.2) のように，数列の要素が無限個であるものを**無限数列**という．$n$ 番目の数は，$a_n$ のように表されることが多く，**第 $n$ 項**という．また，第 1 項を**初項**，有限数列の最後の項を**末項**といい，第 $n$ 項を $n$ に関する式で表現したものを**一般項**という．数列全体を表すときには，$\{\,a_n\,\}$ または $(\,a_n\,)$ のように表す．このため，括弧があるときは数列全体を，括弧がないときは第 $n$ 項を表していることに注意したい．

## 11.2　等差数列

例えば，

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$$

のように，隣り合った 2 つの項の差が常に一定であるような数列を**等差数列**といい，その一定の差を**公差**という．等差数列 $\{\,a_n\,\}$ は，初項 $a$ と公差 $d$ が与えられていれば，

$$a_1 = a, \qquad a_2 = a + d, \qquad a_3 = a + 2\,d, \qquad a_4 = a + 3\,d, \qquad \cdots$$

となるので，一般項 $a_n$ は

$$a_n = a + (n-1)\,d \tag{11.3}$$

と表せる．

## 11.3　等差数列の和

初項が $a$，公差が $d$ の等差数列において，初項から第 $n$ 項までの和を $S$ とする．第 $n$ 項の値を $\ell$ とすると，$\ell = a + (n-1)\,d$ である．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S &=& a &+& (a+d) &+& (a+2\,d) &+& \cdots &+& (\ell-d) &+& \ell \\ S &=& \ell &+& (\ell-d) &+& (\ell-2\,d) &+& \cdots &+& (a+d) &+& a \end{array}$$

の両辺の和をとると，$2\,S = n\,(a+\ell)$ となる．したがって，

$$S = \frac{n\,(a+\ell)}{2} = \frac{n\,\{2\,a + (n-1)\,d\}}{2}$$

と表せる．上の和を適用することにより，自然数の和および奇数の和に関して，次の関係式が得られる．

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$

(2) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2\,n-3) + (2\,n-1) = n^2$

## 11.4　等比数列

例えば,

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots$$

のように，隣り合った 2 つの項の比が常に一定であるような数列を**等比数列**といい，その一定の比を**公比**という．等比数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a$ と公比 $r$ が与えられていれば,

$$a_1 = a, \qquad a_2 = a\,r, \qquad a_3 = a\,r^2, \qquad a_4 = a\,r^3, \qquad \cdots$$

となるので，一般項 $a_n$ は

$$a_n = a\,r^{n-1} \tag{11.4}$$

と表せる．

## 11.5　等比数列の和

初項が $a$，公比が $r$ の等比数列において，初項から第 $n$ 項までの和を $S$ とする．このとき，第 $n$ 項は $a\,r^{n-1}$ である．

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & & \\ rS & = & & & ar & + & ar^2 & + & \cdots & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & + & ar^n \end{array}$$

の両辺の差をとると，$(1-r)\,S = a - a\,r^n$ となる．したがって，

$$r \neq 1 \text{ のとき} \qquad S = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$$

である．$r = 1$ のときには $S$ は $n$ 個の $a$ の和であるから，

$$r = 1 \text{ のとき} \qquad S = n\,a$$

である．

**例題** 11.1　第 2 項が 3，第 5 項が $-3$ である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，この数列の一般項を求めよ．

**（解）** 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を $a$，公差を $d$ とすると，(11.3) より $a_n = a + (n-1)\,d$ と表せる．$a_2 = 3$，$a_5 = -3$ より，

$$a + d = 3, \qquad a + 4\,d = -3$$

となり，この連立方程式を解くと，$a = 5$，$d = -2$ である．したがって，一般項は $a_n = 5 + (n-1)\cdot(-2) = -2\,n + 7$ である．■

**例題** 11.2　1 から 500 までの自然数について，3 の倍数の和を求めよ．

**（解）** 1 から 500 までの自然数で，3 の倍数の数の個数は 166 個であるから，

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 495 + 498 = \frac{166\cdot(3+498)}{2} = 41583$$

である．■

**例題** 11.3　数列 $f$, $g$, $h$ が等差数列であるための必要十分条件は $2g=f+h$ が成り立つ[*1]ことであることを示せ．

**(解)**　等差数列は隣り合った 2 つの項の差が常に一定であるような数列であるから，

$$\text{数列 } f,\ g,\ h \text{ が等差数列である} \quad \Longleftrightarrow \quad g-f=h-g \quad \Longleftrightarrow \quad 2g=f+h$$

となる．■

**例題** 11.4　自然数 $n$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**(解)**　恒等式

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

の各辺の $k$ に関する 1 から $n$ までの和は

$$\begin{aligned}
(\text{左辺の和}) &= \left(2^3-1^3\right)+\left(3^3-2^3\right)+\left(4^3-3^3\right)+\cdots+\left\{(n+1)^3-n^3\right\} \\
&=(n+1)^3-1=n\left(n^2+3n+3\right), \\
(\text{右辺の和}) &= \left(3\cdot1^2+3\cdot1+1\right)+\left(3\cdot2^2+3\cdot2+1\right) \\
&\qquad +\left(3\cdot3^2+3\cdot3+1\right)+\cdots+\left(3n^2+3n+1\right) \\
&=3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+3\cdot(1+2+3+\cdots+n)+n\cdot1 \\
&=3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n \\
&=3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+\frac{n(3n+5)}{2}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &=\frac{1}{3}\left\{n\left(n^2+3n+3\right)-\frac{n(3n+5)}{2}\right\} \\
&=\frac{n}{6}\left(2n^2+3n+1\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

となる．■

**例題** 11.5　2 つの等差数列 2, 9, 16, $\cdots$ と 10, 20, 30, $\cdots$ がある．この 2 つの数列の共通な項を順に並べてできる数列の一般項を求めよ．

**(解)**　等差数列 2, 9, 16, $\cdots$ の一般項を $a_n$ とすると，$a_n=2+(n-1)7=7n-5$ である．共通な項となるのは $a_n$ が 10 の整数倍になるとき，つまり，自然数 $\ell$ を用いて $7n-5=10\ell$ と表せるときである．$7n=5(2\ell+1)$ より，$n$ は 5 の倍数であるから，自然数 $m$ を用いて $n=5m$ と表せる．$7m=2\ell+1$ より，$m$ は奇数であるから，自然数 $k$ を用いて $m=2k-1$ と表せ，$n=10k-5$ でなければならない．逆に，自然数 $k$ に対して $n=10k-5$ と表されるとき，$a_n=10(7k-4)$ となり，$a_n$ は 10 の整数倍である．したがって，共通な項を並べてできる数列の一般項は $10(7n-4)$ である．■

---

[*1] 等差数列 $\{a_n\}$ において，すべての自然数 $n$ に対して $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$ が成り立ち，これを**等差中項**という．また，等比数列 $\{a_n\}$ において，すべての自然数 $n$ に対して $a_{n+1}^2=a_{n+2}\,a_n$ が成り立ち，これを**等比中項**という．

**例題** 11.6　異なる 3 つの実数 $a$，$b$，$c$ がこの順で等差数列をなし，$a$，$c$，$b$ の順で等比数列をなす．さらに，$a\,b\,c = 27$ であるとき，$a$，$b$，$c$ の値を求めよ．

**（解）** $a$，$b$，$c$ の順で等差数列をなすので，等差中項より $2\,b = a + c$ である．また，$a$，$c$，$b$ の順で等比数列をなすので，等比中項より $c^2 = a\,b$ である．$27 = a\,b\,c = c^2 \cdot c = c^3$ であり，$c$ は実数であるから，$c = 3$ となる．$a \neq c = 3$ と

$$0 = 2\,(a\,b - c^2) = a\,(a+3) - 18 = (a+6)\,(a-3)$$

より $a = -6$ であり，$b = \dfrac{a+c}{2} = -\dfrac{3}{2}$ となる．したがって，

$$a = -6, \qquad b = -\frac{3}{2}, \qquad c = 3$$

である．■

**例題** 11.7　$\triangle$ABC の 3 辺 BC，CA，AB の長さがこの順で等比数列をなすとき，$\angle$B の最大値を求めよ．

**（解）** 公比を $r$ とし，$a = \mathrm{BC}$ とすると，$r > 0$，$\mathrm{CA} = a\,r$，$\mathrm{AB} = a\,r^2$ である．余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{B} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{r^4 + 1 - r^2}{2\,r^2} = \frac{(r^2-1)^2 + r^2}{2\,r^2} \geq \frac{1}{2}$$

となり，等号が成り立つのは $r = 1$ のときである．$\cos\theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲では単調減少であるから，$r = 1$（$\triangle$ABC が正三角形）のとき，$\angle$B の値は最大となり，その値は $\dfrac{\pi}{3}$ である．■